

一类四维超混沌系统的界及同步的研究

张晓丹[†] 崔丽娟

(北京科技大学数理学院, 北京 100083)

(2011年1月28日收到; 2011年3月28日收到修改稿)

文章研究了一类四维连续自治系统, 在一定条件下它只有一个平衡点, 却表现出复杂的动力学行为. 文章首先分析了系统的平衡点及李雅普诺夫指数; 其次对该系统的界进行了估计, 给出了界的表达式. 通过设计一个控制器, 研究了该四维超混沌系统的完全同步, 并做出了相应的数值模拟.

关键词: 超混沌系统, 李雅普诺夫指数, 混沌系统的界, 同步

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Gg, 05.45.Vx, 05.45.Pq

1. 引言

自从1963年Lorenz发现了第一个混沌系统, 即Lorenz混沌模型^[1], 关于混沌系统的研究就开始受到人们的广泛关注, 混沌也成为了非线性科学中的一个研究热点, 许多混沌^[2-4]和超混沌系统^[5]也应运而生. 超混沌系统通常是指具有多于一个正的李雅普诺夫指数^[6]的混沌系统, 这也表明它比混沌系统更具复杂性, 有更复杂的动力学行为. 众所周知, 在社会学和经济学模型中有很多的超混沌系统模型, 典型的例子如四维超混沌Chua电路系统^[7]、四维Rössler超混沌系统^[8]等. 由于超混沌系统在保密系统中更具能力、效率和安全性, 所以更广泛的应用于非线性电路, 保密系统, 神经网络, 生物系统等领域^[9,10].

一个混沌系统有界是指它的吸引子在相空间中有界, 它的界的估计对混沌的控制、同步及其应用有重要意义, 技术上讲这也是一项十分艰巨的任务. 1987年, Lwovov等人研究了Lorenz系统的界并得出了系统的球形和柱形上界^[11]. 2003年陈关荣等人讨论了Chen系统的有界性^[12], 得到了Chen系统的上界估计. 2005年李大梅等人对Lorenz系统族进行界的估计^[13,14]. 2007—2009年, 李大梅, 陆君安, 王培等人先后得到Lorenz-Haken超混沌的四维椭球形最终界与四维Lorenz-Stenflo系统的最终界和正向不变集^[15,16]. 之后, 不

断有学者参与这一问题的研究并得到新的结果^[17].

研究混沌的目的是为了应用, 在混沌长期的研究中, 人们发现混沌同步在保密通讯领域有巨大的应用前景^[18,19]. 因此混沌同步一直亦是混沌控制的研究热点之一. 本文根据文献[20]提出的一类四维连续自治系统, 基于李雅普诺夫稳定性定理及最小二乘法给出了此类超混沌系统界的估计, 并以此混沌系统为驱动装置, 实现该系统的完全同步.

2. 超混沌系统数学模型及动力学行为分析

在文献[20]中陈关荣等人提出了一个新奇的超混沌系统, 这个四维超混沌系统是通过文献[21]中的混沌系统的两个二次项增加常参数并且引入状态反馈控制得到的. 本文在文献[20]的基础上, 通过改变一次项系数并引入状态反馈控制, 得到如下数学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + eyz, \\ \dot{y} &= cx - dxz - gy + w, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= -fy - hw. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, f > 0, h \geq 0$ 是参数. 当 $a = 35; b = 4; c = 25; e = 35; d = 5; f = 100, g = 1, h = 1$ 时, 系统(1)显示混沌态, 见图1.

[†] E-mail: bkdzxd@163.com

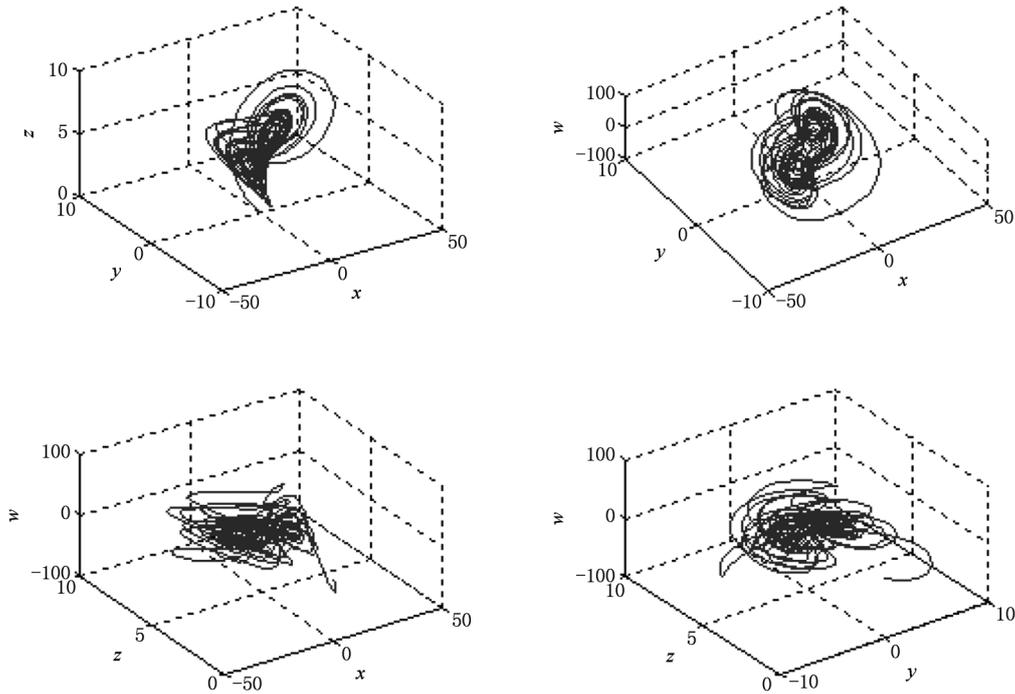


图1 当 $a = 35; b = 4; c = 25; d = 5; e = 35; f = 100; g = 1; h = 1$ 系统(1)的三维相位图

2.1. 平衡点

对系统(1),当 $h = 0$ 或 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, f > 0, h > 0$ 且 $(a + \frac{ce}{d})^2 < \frac{4ae}{d}(g + \frac{f}{h})$ 时,系统只有一个零平衡点 $S(0,0,0,0)$,此时在 S 处系统的雅克比矩阵为

$$\begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & -g & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & -f & 0 & -h \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$F(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^3 + (a + g + h)\lambda^2 + (f + hg + ag + ha - ac)\lambda + af + agh - ach) = 0, \quad (2)$$

令 $p = a + g + h, q = f + ag + hg + ha - ac, k = af + agh - ach$, (2) 式为

$$F(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + k) = 0. \quad (3)$$

设 $A = p^2 - 3q, B = pq - 9k, C = q^2 - 3pk, \Delta = B^2 - 4AC$,根据盛金公式,当 $\Delta < 0$ 时,方程(3)有4个不相等的实根.例如,当 $a = 35, b = 4, c = 25, d = 5, e = 35, f = 100, g = h = 1$ 时,系统只有一个零平衡点 $S(0,0,0,0)$,满足 $\Delta = -290956800 < 0$,平衡点 S 对应的特征值为 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -51.6326, \lambda_3 =$

$8.7341, \lambda_4 = 5.8985$.即原点是系统的鞍点.系统(1)轨迹见图1.当 $\Delta > 0$ 时,方程(3)有两个实根和一对共轭复根,即

$$\lambda_1 = b, \lambda_2 = \frac{(-p - \sqrt[3]{Y_1} - \sqrt[3]{Y_2})}{3},$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{-2p + \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2}}{6} \pm i \frac{\sqrt[3]{Y_1} - \sqrt[3]{Y_2}}{6} \sqrt{3},$$

其中 $Y_{1,2} = Ap + \frac{3}{2}(-B \pm \sqrt{\Delta})$ 特别当 $\sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2} > 2p$,且 $a > g + h$ 时, $\lambda_1 \cdot \text{Re}(\lambda_3, \lambda_4) < 0, \lambda_2 \cdot \text{Re}(\lambda_3, \lambda_4) < 0$,原点是系统的鞍焦点.例如,当 $a = 10, b = 13, c = 20, d = 5, e = 35, f = 100, g = h = 1$ 时,系统只有一个零平衡点 $S(0,0,0,0)$,满足 $\Delta = 102793200 > 0$,平衡点对应的特征值是

$$\lambda_1 = -13, \lambda_2 = -18.5923,$$

$$\lambda_3 = 3.2962 + 5.7185i,$$

$$\lambda_4 = 3.2962 - 5.7185i,$$

此时原点是该系统的鞍焦点;对应系统的图像如图2所示.

2.2. 李雅普诺夫指数分析

当 $a = 35, b = 4, c = 25, d = 5, e = 35, f = 100, g = 1, h = 1$ 时系统(1)的李雅普诺夫指数是 $LE_1 = 10.7327, LE_2 = 3.8503, LE_3 = -3.4399, LE_4 =$

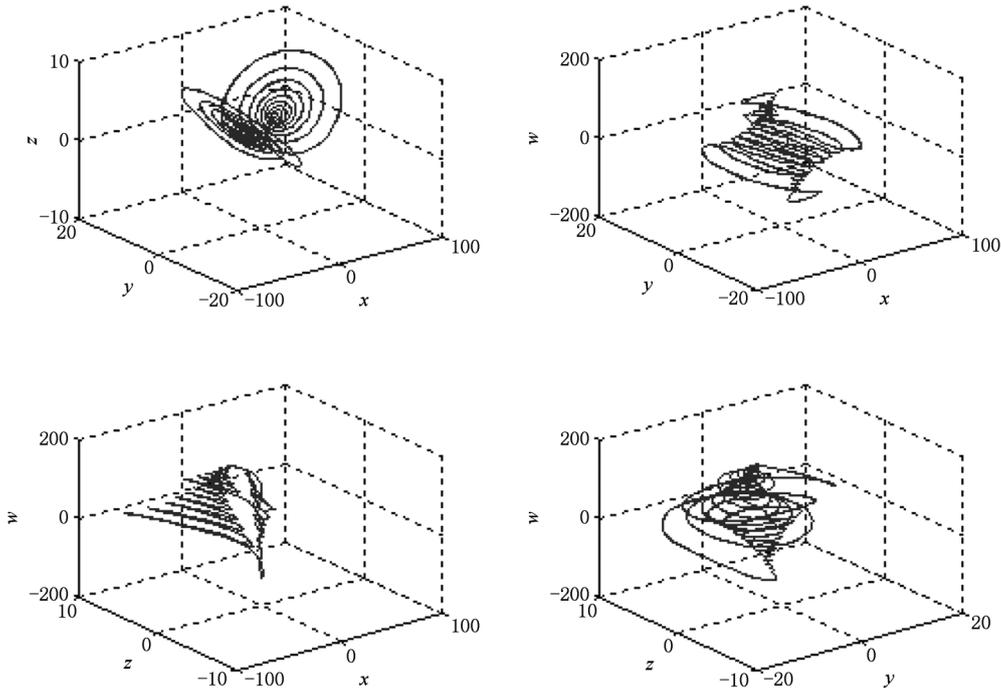


图2 $a=10, b=13, c=20, d=5, e=35, f=100, g=h=1$ 时系统(1)的三维相位图

- 26. 3476, 其最大的李雅普诺夫指数比较大, 说明系统(1) 的运动轨迹比较复杂. 并且具有两个正的李雅普诺夫指数, 因此系统(1) 是超混沌系统, 其动力学行为较一般混沌系统更加难以预测. 此外系统(1) 的李雅普诺夫指数维数是

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^j LE_i = 3 + \frac{LE_1 + LE_2 + LE_3}{|LE_4|} = 3 + \frac{10.7327 + 3.8503 - 3.4399}{26.3476} = 3.4229. \quad (4)$$

由于该系统的李雅普诺夫指数维数是分数维数, 从而从另一方面验证了系统(1)是混沌系统.

3. 超混沌系统界的估计

定理 1 当 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, f > 0, g > 0, h > 0$ 时, 系统(1) 的轨迹包含在椭球体 $\Omega = \{(x, y, z, w) \mid \frac{fd}{2e}x^2 + fy^2 + \frac{fd}{2}(z - m)^2 + w^2 \leq R^2\}$ 中, 其中

$$R = \max \left\{ \sqrt{\frac{fd}{2}}m, |r_1|, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8a|b-a|}}, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8g|b-g|}}, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8h|b-h|}} \right\},$$

$$m = \frac{ad + 2ec}{de}, r_1^2 = \frac{fbdm^2}{8\min(a, g, b, h)} + \frac{3}{8}f dm^2.$$

证明 令

$$F(x, y, z) = a_1(x - s)^2 + a_2(y - l)^2 + a_3(z - m)^2 + a_4(w - n)^2. \quad (5)$$

它沿着系统(1)的轨迹求导数得到

$$\begin{aligned} \dot{F}/2 = & a_1(x - s)[a(y - x) + eyz] \\ & + a_2(y - l)(cx - dxz - gy + w) \\ & + a_3(z - m)(xy - bz) \\ & + a_4(w - n)(-fy - hw). \end{aligned} \quad (6)$$

令

$$s = l = n = 0, a_1 = \frac{fd}{2e}, a_2 = f,$$

$$a_3 = \frac{fd}{2}, a_4 = 1, m = \frac{ad + 2ec}{de}, \quad (7)$$

(5)与(6)式化简为

$$F = a_1x^2 + fy^2 + a_3(z - m)^2 + w^2, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}/2 = & -a_1ax^2 - fgy^2 - a_3b\left(z - \frac{m}{2}\right)^2 \\ & - hw^2 + \frac{a_3bm^2}{4}. \end{aligned} \quad (9)$$

1) 如果 $(1/2)\dot{F} > 0$, 则有

$$a_1ax^2 + gfy^2 + a_3b\left(z - \frac{m}{2}\right)^2 + hw^2 < \frac{a_3bm^2}{4},$$

从而

$$F = a_1x^2 + fy^2 + a_3(z - m)^2 + w^2 < \frac{fdbm^2}{8\min(a, g, b, h)} + \frac{3}{8}fdm^2 \triangleq r_1^2. \quad (10)$$

2) 如果 $(1/2)\dot{F} \leq 0$, 则 F 沿轨迹是非增函数,

F 的最大值点满足方程 $\dot{F} = 0$:

$$\frac{a_1x^2}{a_3bm^2} + \frac{fy^2}{a_3bm^2} + \frac{a_3(z - \frac{m}{2})^2}{a_3m^2} + \frac{w^2}{a_3bm^2} = 1.$$

定义

$$H^2 = \frac{a_3bm^2}{4a}, M^2 = \frac{a_3bm^2}{4g}, L^2 = \frac{a_3m^2}{4},$$

$$N^2 = \frac{a_3bm^2}{4h}, C = \frac{m}{2},$$

则上式变为

$$\frac{a_1x^2}{H^2} + \frac{fy^2}{M^2} + \frac{a_3(z - C)^2}{L^2} + \frac{w^2}{N^2} = 1. \quad (11)$$

函数 F 可表为

$$F = a_1x^2 + fy^2 + a_3(z - 2C)^2 + w^2. \quad (12)$$

下面用拉格朗日乘数法求 F 在条件(11)下的最大值. 定义拉格朗日函数

$$G = a_1x^2 + fy^2 + a_3(z - 2C)^2 + w^2 + \lambda \left(\frac{a_1x^2}{H^2} + \frac{fy^2}{M^2} + \frac{a_3(z - C)^2}{L^2} + \frac{w^2}{N^2} - 1 \right),$$

令

$$\frac{1}{2}G_x = \left(a_1 + \frac{\lambda a_1}{H^2} \right) x = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}G_y = \left(f + \frac{f\lambda}{M^2} \right) y = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}G_z = a_3(z - 2C) + \frac{\lambda a_3(z - C)}{L^2} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}G_w = \left(1 + \frac{\lambda}{N^2} \right) w = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}G_\lambda = \frac{a_1x^2}{H^2} + \frac{fy^2}{M^2} + \frac{a_3(z - C)^2}{L^2} + \frac{w^2}{N^2} - 1 = 0. \quad (17)$$

由(15)式得

$$z - C = \frac{CL^2}{L^2 + \lambda}, \quad (18)$$

由(17)得 $\lambda \geq 0$ 或 $\lambda \leq -2L^2$.

(i) 当 $\lambda > 0$ 时, 由(13)—(14), (16)—(17)式可得 $x = y = w = 0, z - C = \pm C$, 但由(18)式, $0 <$

$\frac{CL^2}{L^2 + \lambda} = z - C \neq C$, 矛盾, 所以此时方程

(13)—(17)无解.

(ii) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -2L^2$ 时, 求解(13)—(17)得到 $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ 或 $(0, 0, 2C, 0)$.

从而

$$F_{\max_1} = 4a_3C^2 = \frac{fd}{2}m^2.$$

(iii) 当 $\lambda < -2L^2$ 时, x, y, w 不同时为零. 不妨设 $x \neq 0$, 由(13)可得 $\lambda = -H^2$. 因为 $-H^2 = \lambda < -2L^2$, 所以 $b > 2a$. 由(18)式得

$$z = \frac{(2L^2 - H^2)C}{L^2 - H^2} = \frac{(2a - b)m}{2(a - b)}.$$

若 $a \neq g, a \neq h$, 则 $H^2 \neq M^2, H^2 \neq N^2$, 此时由(14), (16)和(17)式可解得

$$y = w = 0, a_1x^2 = H^2 \frac{b^2 - 2ab}{(a - b)^2}$$

从而

$$F_{\max_2} = H^2 + \frac{a_3C^2H^2}{H^2 - L^2} = \frac{fdb^2m^2}{8a(b - a)}, b > 2a.$$

当 $a = g \neq h$, 或 $a = h \neq g$, 或 $a = g = h$ 时, 类似可证

$$F_{\max} = F_{\max_2} = a_1x^2 + fy^2 + a_3(z - 2C)^2 + w^2 = \frac{fdb^2m^2}{8a(b - a)}, b > 2a. \quad (19)$$

若 $y \neq 0 (x = 0)$ 或 $w \neq 0 (x = 0)$ 由(15)或(17)式可得 $\lambda = -M^2$ 或 $\lambda = -N^2$. 由 $-M^2 < -2L^2$ 或 $-N^2 < -2L^2$ 可导出 $b > 2g$ 或 $b > 2h$. 仿照上述讨论可求得

$$F_{\max_3} = M^2 + \frac{a_3C^2M^2}{M^2 - L^2} = \frac{fdb^2m^2}{8g(b - g)}, b > 2g. \quad (20)$$

或

$$F_{\max_4} = N^2 + \frac{a_3C^2N^2}{N^2 - L^2} = \frac{fdb^2m^2}{8h(b - h)}, b > 2h. \quad (21)$$

总结(i)和(ii), 令

$$R = \max \left\{ \sqrt{\frac{fd}{2}}m, |r_1|, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8a|b - a|}}, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8g|b - g|}}, \sqrt{\frac{fdb^2m^2}{8h|b - h|}} \right\},$$

可完成定理1的证明.

当 $a = 35; b = 4; c = 25; d = 5; e = 35; f = 100, g = h = 1$ 时, 满足 $b > 2g = 2h$. 根据定理1, $R^2 = 52938$, 即系统(1)包含在椭球 $\Omega(\Omega: 7.1429x^2 +$

$100y^2 + 250(y - 11)^2 + w^2 \leq 52938$) 内部, 见图 3.

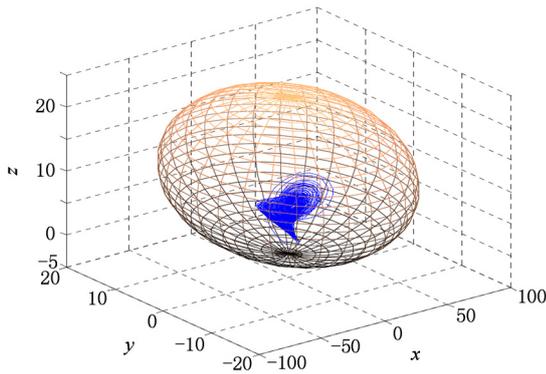


图3 四维超混沌系统包含在椭球体内

4. 超混沌系统的同步

定义 1 设有驱动系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{22}$$

与响应系统

$$\dot{y} = g(y, x), \tag{23}$$

其中 $x \in R^n, y \in R^n, f, g: R^n \rightarrow R^n$ 均为连续函数. 假定系统(22)与(23)的解分别为 $x(t, x_0)$ 和 $y(t, y_0)$. 若它们满足条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| = 0$, 则称系统(22)与(23)是同步的.

将系统(1)作为驱动系统, 定义响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + ey_1z_1 - k_1(x_1 - x), \\ \dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1z_1 - gy_1 + w_1 - k_2(y_1 - y), \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1 - k_3(z_1 - z), \\ \dot{w}_1 &= fy_1 - hw_1 - k_4(w_1 - w). \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $k_{1,2,3,4}$ 均为正参数与 a, b, c, d, e, f 有关.

定理 2 当

$$\begin{aligned} k_1 &> \frac{2ce + deM_3 + 2deM_2 - ad}{2d}, \\ k_2 &> \frac{da + 2ce + deM_3 + edM_1 - 4eg}{4e}, \\ k_3 &> \frac{2M_2 + M_1 - 2b}{2}, k_4 > 0 \end{aligned}$$

时驱动系统(1)和响应系统(24)达到完全同步.

这里 $M_1 = \sqrt{\frac{2e}{fd}}R, M_2 = \frac{R}{\sqrt{f}}, M_3 = \sqrt{\frac{2e}{fd}}R + m.$

证明 由定理 1, $|x| < \sqrt{\frac{2e}{fd}}R = M_1, |y| <$

$\frac{R}{\sqrt{f}} = M_2, |z| < \sqrt{\frac{2e}{fd}}R + m = M_3, |w| < R.$

令 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z, e_4 = w_1 - w$, 则系统(1)和系统(24)的误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1) + ee_2e_3 + eze_2 + eye_3 - k_1e_1, \\ \dot{e}_2 &= ce_1 - de_1e_3 - dx_1e_3 - dze_1 - ge_2 + e_4 - k_2e_2, \\ \dot{e}_3 &= e_1e_2 + e_1y + xe_2 - be_3 - k_3e_3, \\ \dot{e}_4 &= -fe_2 - he_4 - k_4e_4. \end{aligned} \tag{25}$$

取 $V(e) = \frac{1}{2} \left(\frac{fd}{2e}e_1^2 + fe_2^2 + \frac{fd}{2}e_3^2 + e_4^2 \right)$, 则 V 是正定函数, 其沿系统(25)轨线的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= -\frac{fd}{2e}(k_1 + a)e_1^2 - f(k_2 + g)e_2^2 \\ &\quad - \frac{fd}{2}(b + k_3)e_3^2 - (k_4 + h)e_4^2 \\ &\quad + \left(\frac{afd}{2e} + fc - \frac{fd}{2}z \right) e_1e_2 \\ &\quad + fdy_1e_3 - \frac{fd}{2}xe_2e_3 \\ &\leq -\frac{fd}{2e}(k_1 + a)e_1^2 - f(k_2 + g)e_2^2 \\ &\quad - \frac{fd}{2}(b + k_3)e_3^2 - (k_4 + h)e_4^2 \\ &\quad + \left(\frac{afd}{2e} + fc + \frac{fd}{2}M_3 \right) |e_1| |e_2| \\ &\quad + fdM_2 |e_1| |e_3| + \frac{fd}{2}M_1 |e_2| |e_3| \\ &\leq -\frac{fd}{2e}(k_1 + a)e_1^2 - f(k_2 + g)e_2^2 \\ &\quad - \frac{fd}{2}(b + k_3)e_3^2 - (k_4 + h)e_4^2 \\ &\quad + \frac{afd + 2fce + fdeM_3}{4e} \\ &\quad \times (e_1^2 + e_2^2) + \frac{fdM_2}{2}(e_1^2 + e_3^2) \\ &\quad + \frac{fdM_1}{4}(e_2^2 + e_3^2) \\ &= -\frac{fd}{2e}(k_1 - k'_1)e_1^2 - f(k_2 - k'_2)e_2^2 \\ &\quad - \frac{fd}{2}(k_3 - k'_3)e_3^2 - (k_4 + h)e_4^2. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{2ce + deM_3 + 2deM_2 - ad}{2d}, \\ k'_2 &= \frac{da + 2ce + deM_3 + edM_1 - 4eg}{4e}, \\ k'_3 &= \frac{2M_2 + M_1 - 2b}{2} \end{aligned}$$

当 $k_1 > k'_1, k_2 > k'_2, k_3 > k'_3, k_4 > 0$ 时, $\dot{V}(e) < 0$, 此

时 $V(e)$ 零解渐近稳定, 即驱动系统(1)和响应系统(24)实现完全同步.

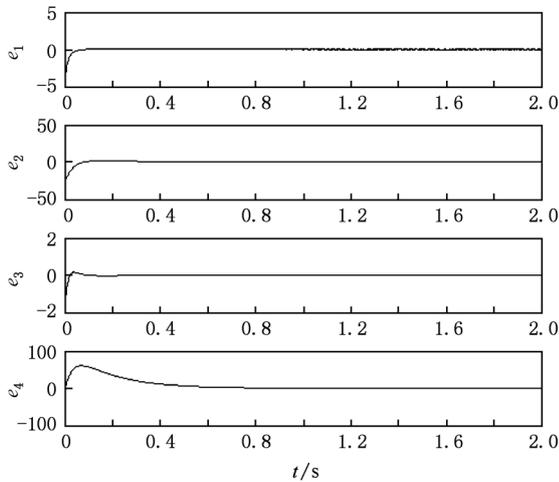


图4 驱动系统和响应系统的同步效果

为了验证理论结果, 用 MATLAB 进行数值仿真. 此时驱动系统(1)和响应系统(24)分别取初值 $(-1, 30, 2, 10)$ 和 $(-3, 4, 0.2, 6)$, 当 $a = 35, b = 4, c = 25, d = 5, e = 35, f = 100, g = h = 1$ 时系统(1)有一个典型的吸引子, 同时根据定理 1 不难算出 $M_1 = 75.1443, M_2 = 20.0832, M_3 = 23.7017$, 根据定理 2 可以选择控制器中的正系数为 $k_1 = 1410, k_2 = 153, k_3 = 63, k_4 = 1$. 驱动系统(1)与响应系统(24)的同步效果如图 4 所示.

5. 结 论

通过构造合适的李雅普诺夫函数并结合拉格朗日乘数法确定了系统(1)在 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, f > 0, g > 0, h > 0$ 下的界, 然后设计了一个线性控制器实现了超混沌系统的同步, 最后通过数学软件 MATLAB 给出了相应的数值模拟.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **12** 659
- [3] Zhang X D, Wang Z, Zhao P D 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 397
- [4] Zhao P D, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2791 (in Chinese) [赵品栋, 张晓丹 2008 物理学报 **57** 2791]
- [5] Cenys A, Tamaservicius A, Baziliauskas A, Krivickas R, Lindberg E 2003 *Chaos, Soliton. Fract.* **17** 349
- [6] Zhang X D, Liu X, Zhao P D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4415 (in Chinese) [张晓丹, 刘翔, 赵品栋 2009 物理学报 **58** 4415]
- [7] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **13** 2889
- [8] Rossler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [9] Wang J, Chen Z, Yuan Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
- [10] Hua C C, Guan X P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1391
- [11] Leonov G, Bunin A, Kokschn N 1987 *Z. Angew. Math. Mech.* **67** 649
- [12] Zhou T, Tang Y, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **13** 2561
- [13] Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G R 2005 *Chaos, Soliton. Fract.* **23** 529
- [14] Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G R 2006 *J. Math. Appl.* **323** 844
- [15] Li D M, Wu X Q, Lu J A 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **156** 121
- [16] Wang P, Li D M, Hu Q L 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Number Simulat.* **15** 2514
- [17] Zheng Y, Zhang X D 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010505
- [18] Chen G R, Lv J H 2003 *Dynamical analysis, control and synchronization of a class of Lorenz systems* (Beijing: Science Press) p9 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京: 科学出版社)第 9 页]
- [19] Min L Q, Zhang X D, Chen G R 2005 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **15** 119
- [20] Chen Z Q, Yang Y, Qi G Y, Yuan Z Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [21] Qi G Y, Chen G R, Du S, Chen Z Q, Yuan Z 2005 *Physic. A* **352** 295

The bound for a class of four-dimensional hyperchaotic system and its synchronization

Zhang Xiao-Dan[†] Cui Li-Juan

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

(Received 28 January 2011; revised manuscript received 28 March 2011)

Abstract

In this paper, a class of four-dimensional continuous autonomous system is studied. It has only one balance under certain conditions but it shows a complicated dynamic behavior. The equilibrium points and Lyapunov exponents of the system are analyzed. The bound of this system is estimated and the expression of the bound is presented. In addition, the complete synchronization is also discussed by designing a linear controller. Finally, the corresponding numerical simulations are performed.

Keywords: hyperchaotic system, Lyapunov exponent, bound of chaotic system, synchronization

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Gg, 05.45.Vx, 05.45.Pq

[†] E-mail: bkdzxd@163.com