

## 混沌系统的统一投影同步

李农<sup>1)†</sup> 李建芬<sup>2)</sup>

1) (空军工程大学工程学院, 西安 710038)

2) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2011年1月12日收到; 2011年1月30日收到修改稿)

提出一种实现混沌系统投影同步的统一方法. 通过构建一个广义比例矩阵和一个合适的响应系统, 建立了混沌投影同步的通用模型, 依据比例矩阵的不同种类, 可实现广义投影同步、错位投影同步和广义混合错位投影同步等各种类型的混沌投影同步. 利用 Lyapunov 稳定性理论给出了相应的证明, 最后以多卷波混沌系统和超混沌 Qi 系统为例, 进行了错位投影同步和广义混合错位投影同步的数值仿真, 仿真结果进一步表明了该方法的有效性.

**关键词:** 混沌系统, 广义比例矩阵, 统一投影同步

**PACS:** 05.45.Xt

## 1. 引言

最初由 Pecora 和 Carroll 提出的混沌系统同步<sup>[1]</sup>方法, 已发展出多种同步方案<sup>[2-12]</sup>. 其中投影同步的概念是指在混沌系统的同步向量之间建立某种比例关系, 当同步向量之比为相同的常数或函数时, 便构成投影同步<sup>[5,6]</sup>或函数投影同步<sup>[7,8]</sup>; 当同步向量之比为由常数或函数组成的对角矩阵时, 便构成修正投影同步<sup>[9]</sup>或函数修正投影同步<sup>[10-12]</sup>. 近年来, 有学者提出一种错位同步<sup>[13]</sup>的概念. 所谓错位同步, 是指同步向量中的各分量并不一一对应关系, 而是错位发生同步, 即驱动系统的第  $i$  个状态分量与响应系统的第  $j$  个状态分量随着时间的增长而趋于一致. 文献[14]将广义投影同步与错位同步相结合, 形成一种新型同步方案, 称作错位投影同步, 并针对超混沌 Qi 系统, 构造了非线性反馈控制器, 实现了 Qi 系统的错位投影同步; 文献[15]将广义混合投影同步与错位同步相结合, 实现了改进的 Lü 混沌系统的广义混合错位投影同步. 然而, 上述各种混沌投影同步方案, 并没有建立混沌投影同步的通用理论模型, 且通常采用非线性缩减的控制器设计, 普适性较差.

本文从一般的混沌系统出发, 利用单向耦合混沌同步原理, 提出了一种混沌系统的统一投影同步

方法. 通过一个通用的广义比例矩阵, 建立了混沌系统投影同步的通用模型, 讨论了比例矩阵与各种混沌投影同步的关系, 给出了相应的理论证明; 并以多卷波混沌系统和超混沌 Qi 系统为例进行了错位投影同步和广义混合错位投影同步的数值仿真, 所得结果进一步表明了该方法的有效性.

## 2. 混沌系统的统一投影同步方案

考虑具有如下形式的同步混沌系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (2)$$

这里  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$  是  $n$  维状态向量;  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in R^n$  连续光滑非线性函数. 对于驱动系统(1)和响应系统(2), 任取初始值, 若存在  $n$  维非奇异且可微的矩阵  $\Psi = [\varphi_{ij}] (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 我们称为广义比例矩阵, 使下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \Psi\mathbf{y}\| = 0, \quad (3)$$

则系统(1)和系统(2)获得统一投影同步.

混沌系统的统一投影同步, 通过广义比例矩阵  $\Psi$  决定了混沌系统的投影同步类型, 其元素取值决定了同步向量各分量间的同步关系和投影比例因子, 使得各种投影同步均可视为统一投影同步的特殊情况. 根据同步向量是否存在错位关系, 可将投影同步分为广义投影同步和广义错位投影同步两

† E-mail: ln2807@163.com

大类,而广义比例矩阵  $\psi$  亦相应分为对角阵和非对角阵两种类型.

1)当广义比例矩阵  $\psi$  为对角阵时,对应广义投影同步.其中又可分为下面几种情况:(a)对角线元素为相等的常数或函数,即为投影同步或函数投影同步,而完全同步和反相同步又是投影同步的特殊情况,此时对角线元素分别为 1 和 -1;(b)对角线元素为不等的常数或函数,称修正投影同步或函数修正投影同步.

2)当广义比例矩阵  $\psi$  为非对角阵时,对应的同步类型统称为广义错位投影同步.涵盖了错位投影同步、混合错位投影同步和广义混合错位投影同步及各种函数类错位投影同步等概念.对于  $\psi$  中的任意行或列元素  $\varphi_{ij}$ ,若至少存在一个非零实数,使

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| x_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \varphi_{ij} y_j \right\| = 0$  成立,则称系统(1)和系统(2)产生了广义错位投影同步.其中:(a)当矩阵  $\psi$  中每行每列有且仅有一个相等的非零实数时,则为错位投影同步;(b)当矩阵  $\psi$  中每行每列有且仅有一个不相等的非零实数时,则为混合错位投影同步;(c)当矩阵  $\psi$  中每行每列存在一个以上的非零实数,且其取值可以互不相同,则为广义混合错位投影同步.如果将上述非零实数改为可微的实函数,即为相应的函数类错位投影同步.

如何设计一个合适的响应系统,实现与驱动系统的统一投影同步,本文给出了下面的方法,以系统(1)作为驱动系统,构造响应系统如下:

$$\dot{y} = g(y, x) = \psi^{-1} [f(\psi y) + K(x - \psi y) - \dot{\psi} y], \quad (4)$$

其中  $\psi$  为广义比例矩阵,  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$  为反馈增益矩阵.

假设函数  $f(\cdot)$  满足如下的 Lipschitz 条件

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

式中  $L > 0$  为 Lipschitz 常数.定义系统(1)与系统(4)的同步误差为  $e = x - \psi y$ ,

则误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\psi} y - \dot{\psi} y \\ &= f(x) - \psi \psi^{-1} [f(\psi y) + K(x - \psi y) - \dot{\psi} y] - \dot{\psi} y \\ &= f(x) - f(\psi y) - Ke. \end{aligned} \quad (5)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T e,$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T \dot{e} = e^T [f(x) - f(\psi y) - Ke] \\ &= e^T [f(x) - f(\psi y)] - e^T Ke \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|e^T\| \|f(x) - f(\psi y)\| - e^T Ke \\ &\leq L \|e\|^2 - e^T Ke \\ &= L \sum_{i=1}^n e_i^2 - \sum_{i=1}^n k_i e_i^2 \\ &= (L - k) \sum_{i=1}^n e_i^2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\|*\|$  为欧氏空间的 2-范数;  $k = \min\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ .

当  $\|e\| = 0$ , 有  $\dot{V}(t) = 0$ ; 若选择合适的  $K$ ,

满足  $k > L$ , 则有  $\dot{V}(t) < 0$ , 根据 Lyapunov 稳定性理论,误差系统(5)在原点渐近稳定,选取不同的广义比例矩阵  $\psi$ ,即可实现系统(1)与系统(4)各种类型的混沌投影同步.

上述使误差系统(5)渐近稳定的前提,即要求反馈增益矩阵  $K$  各元素中的最小值  $k$  满足  $k > L$  的条件,仅是系统(4)与系统(1)实现统一投影同步的充分条件而非必要条件.事实上,许多混沌系统仅通过一个耦合项就可以获得统一投影同步,即选择  $K = \text{diag}(0, \dots, k_i, \dots, 0)$ , 此时,(6)式为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq L \|e\|^2 - e^T Ke \\ &= L \left( \sum_{i=1}^n e_i^2 \right) - k_i e_i^2 \\ &= Ln \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n} - k_i e_i^2 \\ &= Ln \bar{e}^2 - k_i e_i^2. \end{aligned}$$

$\bar{e}^2$  为  $(e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2)$  的平均值,若选择驱动系统的一个变量  $x_i$ , 使  $\bar{e}^2 \leq e_i^2$ , 则有

$$\dot{V}(t) \leq Ln \bar{e}^2 - k_i e_i^2 \leq (Ln - k_i) e_i^2.$$

选择  $k_i > Ln$ , 即可使  $\dot{V}(t) < 0$ . 同样可以实现混沌系统的统一投影同步.

### 3. 数值仿真

分别以多卷波混沌系统<sup>[16]</sup>和超混沌 Qi 系统<sup>[17]</sup>为例说明本文提出的方案.多卷波混沌系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 - bx_2 - cx_3 \\ &\quad + dh(x_1, h_1, k_1, p_1, q_1), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$h(x_1, h_1, k_1, p_1, q_1) = \begin{cases} (2q_1 + 1)k_1 & (x_1 > q_1 h_1 + 1), \\ k_1(x_1 - ih_1) + 2ik_1 & (|x_1 - ih_1| \leq 1, -p_1 \leq i \leq q_1), \\ (2i + 1)k_1 & (ih_1 + 1 < x_1 < (i + 1)h_1 - 1, -p_1 \leq i \leq q_1 - 1), \\ -(2p_1 + 1)k_1 & (x_1 < -q_1 h_1 - 1). \end{cases}$$

当参数  $a = b = c = d = 0.7, h_1 = 18, k_1 = 9, q_1 = p_1 = 2$  时,系统呈 6 卷混沌吸引子,如图 1 所示.

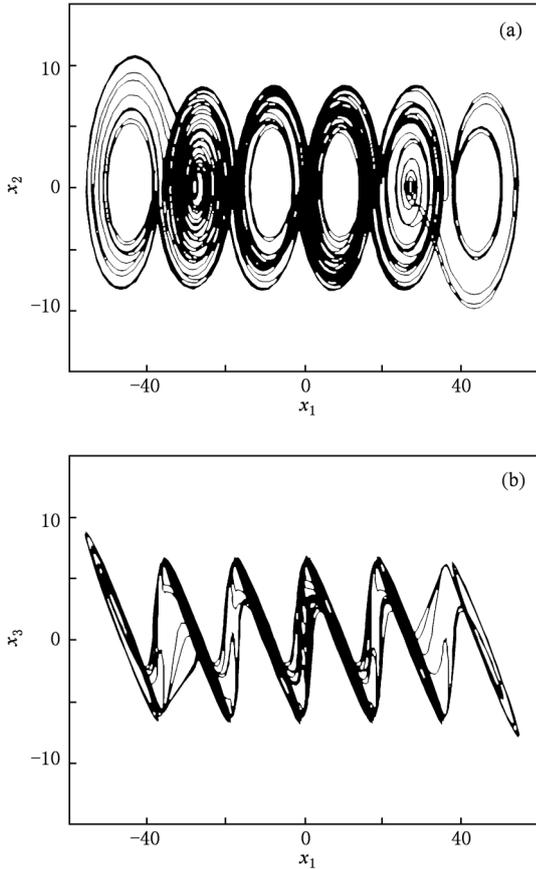


图 1 6 卷混沌吸引子相图 (a)  $x_2-x_1$ ; (b)  $x_3-x_1$

超混沌 Qi 系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 - gx_4 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + hx_3 + x_1 x_2, \end{aligned} \quad (8)$$

当参数  $a = 50, b = 20, c = 13, d = 8, g = 33, h = 30$  时,系统呈超混沌状态,其吸引子相图如图 2.

### 3.1. 错位投影同步

以 6 卷混沌系统(7)作为驱动系统,构造响应系统,实现混沌系统的错位投影同步.此时,广义

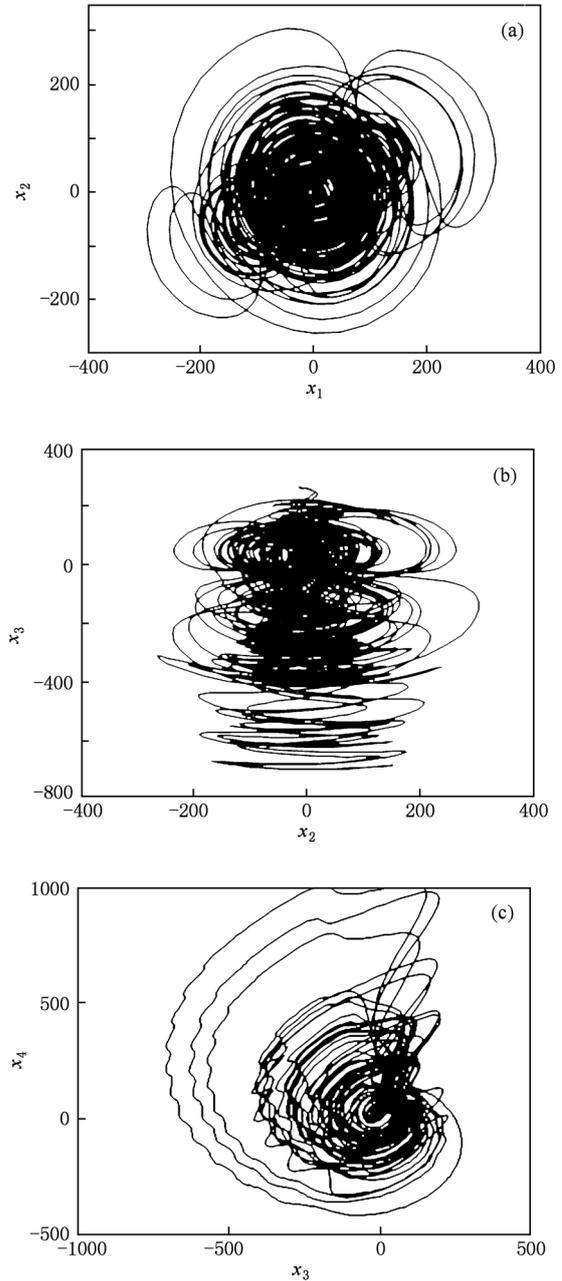


图 2 Qi 系统的超混沌吸引子相图 (a)  $x_2-x_1$ ; (b)  $x_3-x_2$ ; (c)  $x_4-x_3$

比例矩阵  $\psi$  为非对角阵,且每行每列同时仅有一个相同的非零元素构成同步变量间的错位关系和投影比例因子.选择

$$\psi = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$\psi^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于  $\psi$  为常数矩阵, 则  $\dot{\psi} = 0$ , 取比例因子  $\alpha = 2$ . 因此, 按(4)式构造响应系统可得

$$\dot{\mathbf{y}} = \psi^{-1} [f(\psi \mathbf{y}) + K(\mathbf{x} - \psi \mathbf{y})],$$

其中

$$\begin{aligned} \psi \mathbf{y} &= (2y_3, 2y_1, 2y_2), \\ f(\psi \mathbf{y}) + K(\mathbf{x} - \psi \mathbf{y}) &= (2y_1 + k(x_1 - 2y_3), 2y_2, -2ay_3 - 2by_1 \\ &\quad - 2cy_2 + d_1 h(2y_3, h_1, k_1, p_1, q_1)), \end{aligned}$$

故响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{2}(2y_2), \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{2}[-2ay_3 - 2by_1 - 2cy_2 \\ &\quad + dh(2y_3, h_1, k_1, p_1, q_1)], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{2}[2y_1 + k(x_1 - 2y_3)]. \end{aligned} \quad (9)$$

驱动系统(7)与响应系统(9)的错位投影同步误差为  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \psi \mathbf{y} = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = (x_1 - 2y_3, x_2 - 2y_1, x_3 - 2y_2)$ . 选取系统初值分别为:  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 1 \ -0.1]$ ,  $\mathbf{y}(0) = [0 \ 0 \ 0]$ , 反馈系数为  $k = 2$ . 模拟结果见图 3.

### 3.2. 混合错位投影同步

若错位投影同步中的比例因子各不相同, 则构成混合错位投影同步. 以超混沌 Qi 系统(8)作为驱动系统, 可选择如下的广义比例矩阵

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

逆阵为

$$\psi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

响应系统为

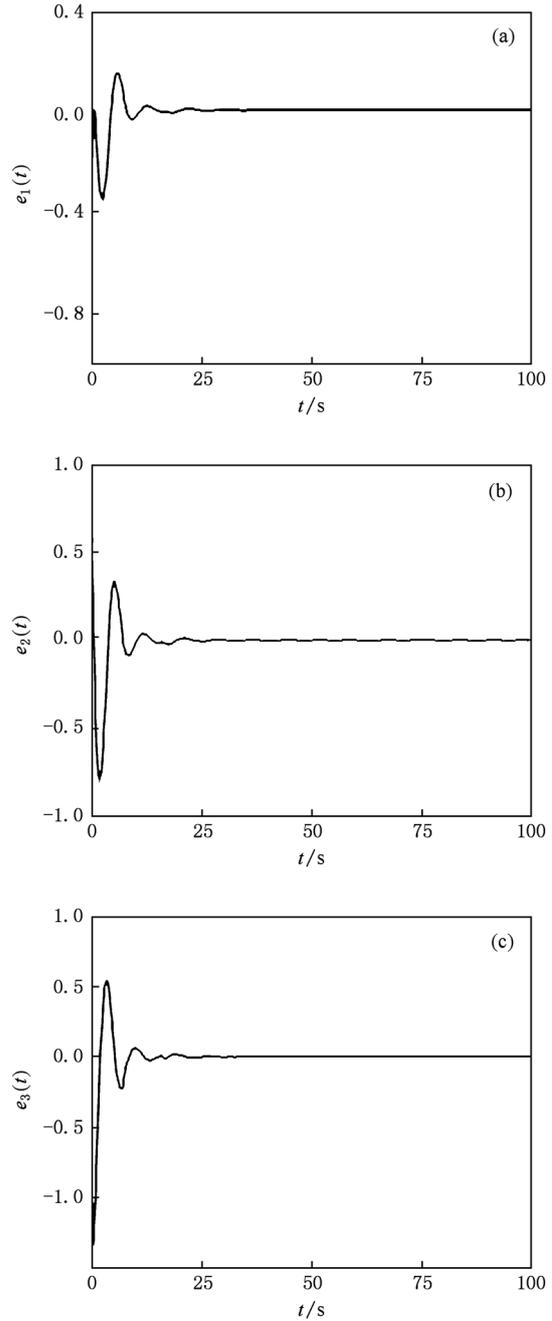


图 3 系统(7)与系统(9)误差向量的时域波形 (a)  $e_1(t)$ ; (b)  $e_2(t)$ ; (c)  $e_3(t)$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{3}[-3cy_1 - 0.5gy_3 - 2y_2y_4], \\ \dot{y}_2 &= [a(-2y_4 - y_2) - 2y_4 \cdot 3y_1], \\ \dot{y}_3 &= 2[-0.5dy_3 + 3hy_1 - 2y_2y_4], \\ \dot{y}_4 &= -0.5[b(y_2 - 2y_4) \\ &\quad - y_2 \cdot 3y_1 + k(x_2 + 2y_4)]. \end{aligned} \quad (10)$$

混合错位投影同步误差为  $\mathbf{e} = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$

$(t), e_4(t)) = (x_1 - y_2, x_2 + 2y_4, x_3 - 3y_1, x_4 - 0.5y_3)$ , 选取系统初值分别为  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 2 \ 0 \ 0.5]$ ,  $\mathbf{y}(0) = [1 \ -3 \ 0 \ 0]$ , 反馈系数为  $k = 100$ . 模拟结果见图 4.

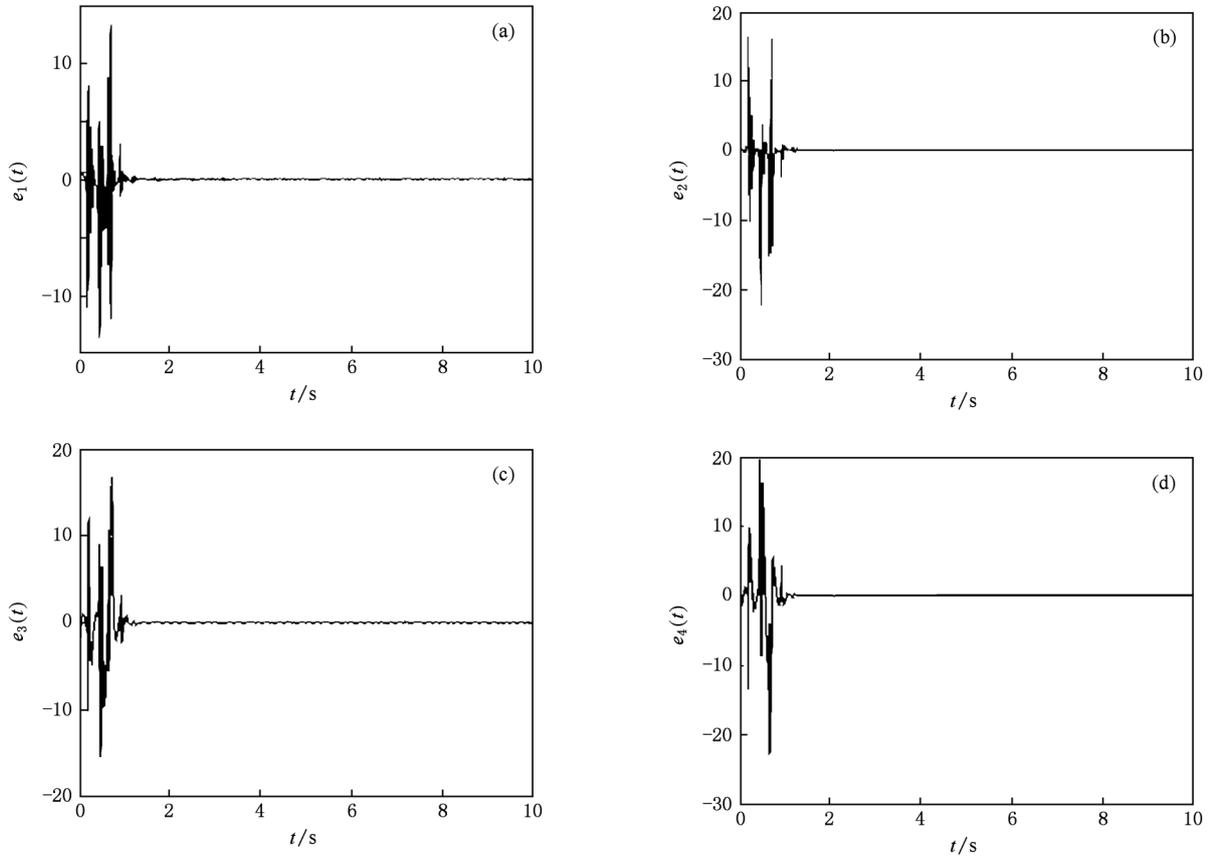


图 4 系统(8)与系统(10)误差向量的时域波形 (a)  $e_1(t)$ ; (b)  $e_2(t)$ ; (c)  $e_3(t)$ ; (d)  $e_4(t)$

### 3.3. 广义混合错位投影同步

广义混合错位投影同步,其同步向量的各分量不再局限于一对一的错位同步关系,且投影比例因子亦各不相同.此时,广义比例矩阵  $\psi$  的每行每列均可有一个以上的非零值,且各元素取值可以各不相同,依然以超混沌系统(8)作为驱动系统.设

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -0.5 & 0 & 2.5 & 1.5 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$\psi^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & 0.2 & 0.25 \\ 1 & -0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 1/6 & -2/15 & 0.4 & 1/12 \end{bmatrix},$$

有  $\psi\mathbf{y} = \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4) = (y_2 + 2y_3, -0.5y_1 +$

$$2.5y_3 + 1.5y_4, -y_1 + 3y_4, 4y_1 - 2y_2).$$

$f(\psi\mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \psi\mathbf{y}) = F(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ , 即

$$F_1(\mathbf{X}) = a(X_2 - X_1) + X_2X_3,$$

$$F_2(\mathbf{X}) = b(X_1 + X_2) - X_1X_3 + k(x_2 - X_2),$$

$$F_3(\mathbf{X}) = -cX_3 - gX_4 + X_1X_2,$$

$$F_4(\mathbf{X}) = -dX_4 + hX_3 + X_1X_2.$$

据(4)式,响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}} = \psi^{-1}[f(\psi\mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \psi\mathbf{y})], \text{ 即}$$

$$\dot{y}_1 = 0.5F_1(\mathbf{X}) - 0.4F_2(\mathbf{X})$$

$$+ 0.2F_3(\mathbf{X}) + 0.25F_4(\mathbf{X}),$$

$$\dot{y}_2 = F_1(\mathbf{X}) - 0.8F_2(\mathbf{X}) + 0.4F_3(\mathbf{X}),$$

$$\dot{y}_3 = 0.4F_2(\mathbf{X}) - 0.2F_3(\mathbf{X}),$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{6}F_1(\mathbf{X}) - \frac{2}{15}F_2(\mathbf{X})$$

$$+ 0.4F_3(\mathbf{X}) + \frac{1}{12}F_4(\mathbf{X}). \quad (11)$$

广义混合错位投影同步误差为

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)) \\ &= (x_1 - y_2 - 2y_3, x_2 + 0.5y_1 - 2.5y_3 \end{aligned}$$

$$- 1.5y_4, x_3 + y_1 - 3y_4, x_4 - 4y_1 + 2y_2).$$

模拟结果见图 5.

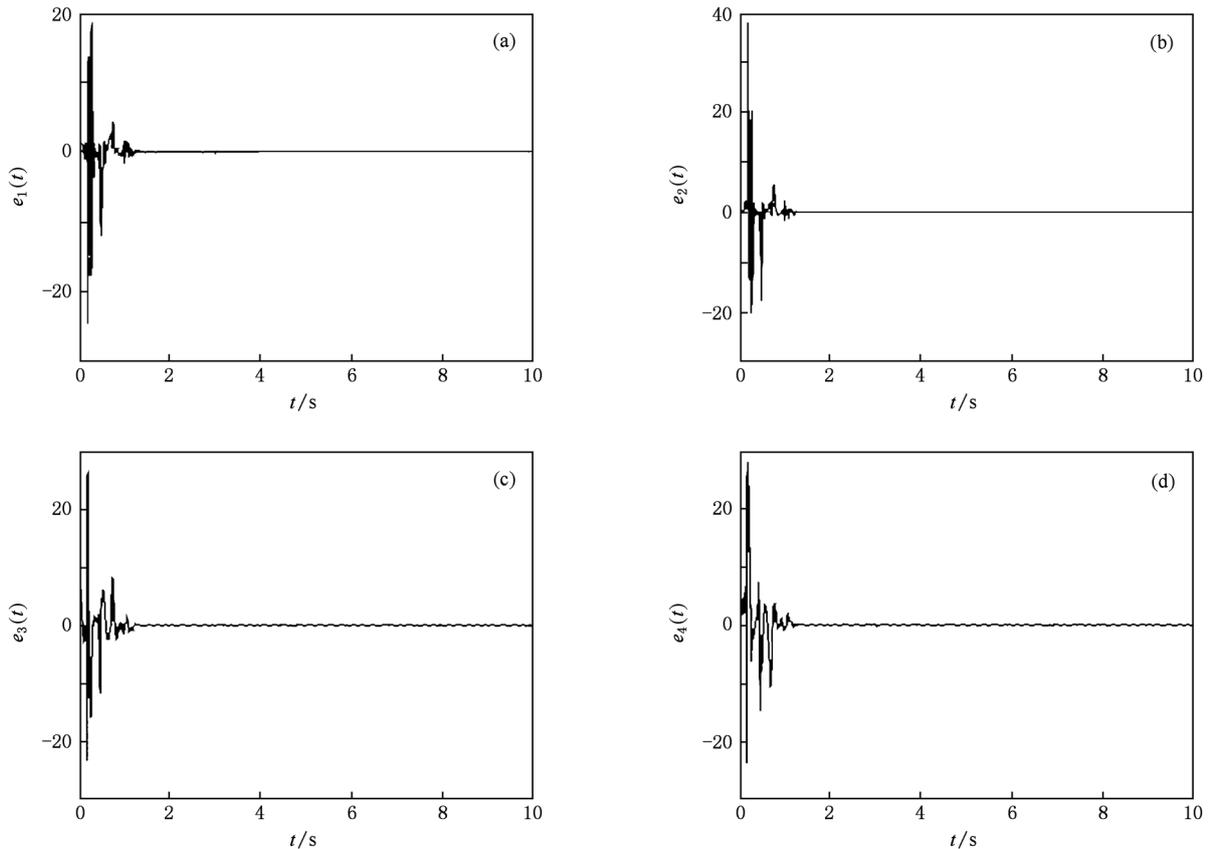


图5 系统(8)与系统(11)误差向量的时域波形 (a) $e_1(t)$ ; (b) $e_2(t)$ ; (c) $e_3(t)$ ; (d) $e_4(t)$

图3—5模拟了3种类型的混沌错位投影同步. 由图可见,随着时间  $t$  的增长,它们各自的误差信号都渐近衰减到零. 由响应系统(9)—(11)式可见,其同步系统均采用一个耦合项,即驱动系统只需向响应系统传递一个驱动变量,即可实现驱动、响应系统的全变量混沌错位投影同步.

虽然数值仿真仅给出了广义比例矩阵  $\psi$  为常数矩阵时的情形,但同样适用于  $\psi$  为函数矩阵时的投影同步. 只要广义比例矩阵  $\psi$  满足非奇异、可微的条件,即可以实现各种类型的函数投影同步,如错位函数投影同步、混合错位函数投影同步和广义混合错位函数投影同步等.

#### 4. 结 论

针对一般的混沌系统,通过引入一个广义比例矩阵,建立了混沌系统投影同步的通用模型,将各种投影同步方法表达为混沌系统的统一投影同步,理论证明和数值仿真结果均表明该方法的有效性. 由于混沌同步是基于单向耦合原理,对许多混沌系统,只需从驱动系统向响应系统传递一个驱动变量即可实现各种类型的混沌投影同步,因而具有普适性好、实用性强等特点.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [2] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804

[3] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816  
 [4] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese)  
 [王兴元、孟 娟 2008 物理学报 **57** 726]

- [5] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [6] Wang X Y, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2498 (in Chinese) [王兴元、王勇 2007 物理学报 **56** 2498]
- [7] Du H, Zeng Q, Wong C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5402
- [8] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1847
- [9] Li G H 2007 *Chaos, Soliton. Fract.* **32** 1454
- [10] Du H, Zeng Q, Wong C 2009 *Chaos, Soliton. Fract.* **42** 2399
- [11] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3743
- [12] Wang J A, Liu H P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2265 (in Chinese) [王健安、刘贺 2010 物理学报 **59** 2265]
- [13] Hu M F, Xu Z Y 2007 *Syst. Eng. Electr.* **29** 1346 (in Chinese) [胡满峰、徐振源 2007 系统工程与电子技术 **29** 1346]
- [14] Min F H, Wang E R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7657 (in Chinese) [闵富红、王恩荣 2010 物理学报 **59** 7657]
- [15] Xu Y H, Zhou W N, Fang J A 2009 *Chaos, Soliton. Fract.* **42** 1305
- [16] Lü J H, Chen G R, Yu X G, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **51** 2476
- [17] Qi G Y, Michael A, Barend J, Chen G R 2009 *Chaos, Soliton. Fract.* **40** 2544

## Unified projective synchronization of chaotic system

Li Nong<sup>1)†</sup> Li Jian-Fen<sup>2)</sup>

1) (Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

2) (Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

(Received 12 January 2011; revised manuscript received 30 January 2011)

### Abstract

A unified method for the projective synchronization of chaotic system is proposed in this paper. The universal model of chaotic projective synchronization is established by constructing a generalized proportion matrix and an appropriate response system. All kinds of synchronized schemes can be achieved by varying the generalized proportion matrix, including generalized projective synchronization, dislocated projective synchronization and generalized hybrid dislocated projective synchronization and so on. The stability analysis in the paper is proved using Lyapunov stability theory. Numerical simulations of generalized hybrid dislocated projective synchronization for multiscroll chaotic attractors system and hyperchaotic Qi system verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** chaotic system, generalized proportion matrix, unified projective synchronization

**PACS:** 05.45.Xt

† E-mail: ln2807@163.com