

# 非高斯 Lévy 噪声驱动下的非对称双稳系统的相转移和平均首次穿越时间\*

顾仁财 许勇<sup>†</sup> 张慧清 孙中奎

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2011年5月28日收到; 2011年6月29日收到修改稿)

研究了非高斯 Lévy 噪声激励下非对称双稳系统的相转移和首次穿越问题. 首先利用 Grünwald-Letnikov 有限差分方法数值求解系统所对应的分数阶 Fokker-Plank 方程, 得到了系统的稳态概率密度函数. 然后分析了系统的非对称参数以及噪声强度和稳定性指标对稳态概率密度函数的影响, 发现了非对称参数和稳定性指标的变化都能够诱导系统发生相转移. 进一步研究了系统的平均首次穿越时间, 得到了非对称参数、噪声强度和稳定性指标影响系统平均首次穿越时间的不同作用机理.

**关键词:** 非高斯 Lévy 噪声, 非对称双稳系统, 相转移, 平均首次穿越时间

**PACS:** 05.40.-a, 05.40.Fb, 05.45.-a

## 1. 引言

由于自然现象中存在大量的不确定性因素, 有必要考虑受随机因素影响的不同系统<sup>[1-3]</sup>. 随机因素有时对动力学系统的演化往往起着决定性作用, 随机因素和非线性的共同作用可以诱发丰富的物理现象, 例如噪声诱导相转移、噪声诱导跃迁、随机共振、随机分岔等, 这已引起各领域学者的广泛关注<sup>[4-7]</sup>. 1997年, Li 等<sup>[4]</sup>利用韦斯平均场近似方法研究了关联高斯噪声诱导的相转移问题. Yang 等<sup>[5]</sup>通过 Fox 近似方法和最速下降法研究了色关联高斯噪声作用下的肿瘤细胞增长模型的平均首通时间. 2004年, Han 等<sup>[6]</sup>应用线性化方法, 讨论了信号直接调制下色关联高斯噪声驱动的单模激光的随机共振现象. 最近, Xu 等<sup>[7]</sup>利用随机平均法研究了高斯色噪声激励下 Duffing-van der pol 振子的随机分岔, 发现系统参数、噪声强度和关联时间的变化都能够诱导系统出现随机分岔现象.

随机激励可划分为高斯随机激励和非高斯随机激励, 现今的随机动力学的一系列理论和数值结

果主要是在高斯噪声情形下得到的<sup>[8,9]</sup>, 高斯噪声激励下的非线性系统可以应用许多传统的理论方法去研究. 然而, 高斯噪声只是实际中随机噪声的理想化, 只能在均值小范围的附近起伏, 不能模拟大幅度起伏的噪声. Lévy 噪声<sup>[10,11]</sup>作为一类重要的非高斯噪声, 具有长拖尾性质, 能够有效的模拟大范围的起伏, 从而更为准确的反映客观实际存在的随机扰动. 事实上, 在许多物理学, 自然科学和社会科学的复杂系统里都观察到了 Lévy 噪声的存在<sup>[12-14]</sup>. 在随机动力系统里, Lévy 噪声被认为与高斯噪声同等重要, 而且高斯噪声是 Lévy 噪声的一种特殊情形(稳定性指标  $\alpha = 2.0$ ). 近年来, 不仅在物理学、生物学、地球科学等自然学科, 而且在经济学, 社会学等领域里, 非高斯 Lévy 噪声逐渐吸引了许多学者的广泛关注<sup>[15-18]</sup>.

2005年, Jin 等<sup>[19]</sup>研究了加性和乘性白噪声驱动下非对称双稳系统的逃逸问题, 讨论了噪声对平均首次穿越时间的影响. Zhang 等<sup>[20]</sup>在 2007年通过最速下降法研究了色关联的加性和乘性白噪声激励下非对称双稳系统的平均首次穿越时间. 2009年, Wang 等<sup>[21]</sup>利用统一色噪声近似理论研究了白

\* 国家自然科学基金(批准号: 10972181, 10902085, 11102157)、西北工业大学基础研究基金和翱翔之星资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn

关联的乘性色噪声和加性色噪声驱动下非对称双稳系统的平均首次穿越时间. 迄今为止, 非高斯 Lévy 噪声作用下的非对称双稳系统的动力学并未被研究. 基于此, 本文研究了非高斯 Lévy 噪声激励下非对称双稳系统的相转移和首次穿越问题. 研究结果显示, 系统的非对称参数和噪声的稳定性指标的改变均能使系统稳态概率密度的峰数发生变化, 从而观察到了系统的相转移行为. 此外, 进一步研究了非对称参数、噪声强度和稳定性指标对系统平均首次穿越时间的影响.

## 2. 非高斯 Lévy 噪声激励下的非对称双稳系统

考虑如下形式的一维非对称双稳系统:

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + \zeta(t), \quad (1)$$

其中,  $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + rx$ ,  $\zeta(t)$  为稳定性指标为  $\alpha$  的非高斯 Lévy 噪声.

系统(1)中  $\zeta(t)$  是 Lévy 过程  $L(t)$  的时间导数,  $L(t)$  可视为广义的维纳过程.  $\zeta(t)$  的样本数据服从  $\alpha$  稳定的 Lévy 分布  $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$ , 其由如下特征函数  $\Phi(k)$  所表示, 而  $\Phi(k)$  为  $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$  的傅里叶变换, 即

$$\Phi(k) = F(L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{ik\zeta} L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu),$$

于是当  $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$  时

$$\Phi(k) = \exp\left[-\sigma^\alpha |k|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right], \quad (2)$$

当  $\alpha = 1$  时

$$\Phi(k) = \exp\left[-\sigma |k| \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(k) \frac{2}{\pi} \ln |k|\right)\right]. \quad (3)$$

这里参数  $\alpha(0 < \alpha \leq 2)$  表示稳定性指标, 描述 Lévy 稳定分布  $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$  的渐进拖尾, 当  $\alpha < 2$  时,  $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu) \sim |\zeta|^{-\alpha-1}$ , 其中  $|\zeta| \gg 1$ .  $\beta(-1 \leq \beta \leq 1)$  是偏斜参数, 描述分布的偏离程度,  $\mu(-\infty \leq \mu \leq \infty)$  是中心或者是位置参数, 代表当  $\alpha > 1$  时分布的均值,  $\sigma$  为广义扩散系数,  $D = \sigma^\alpha$  为噪声强度. 图 1(a) 显示了不同稳定性指标和偏斜参数下 Lévy 噪声的概率密度函数, 图 1(b) 是按照 McCulloch 算法<sup>[22]</sup>产生的 Lévy 噪声的一条样本路径 ( $\alpha = 1.75$ ,

$\beta = 0.0, \mu = 0.0, \sigma = 1.0$ ). 本文考虑概率密度函数  $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$  是对称的情形 ( $\beta = \mu = 0$ ), 并取  $1 \leq \alpha \leq 2$ .

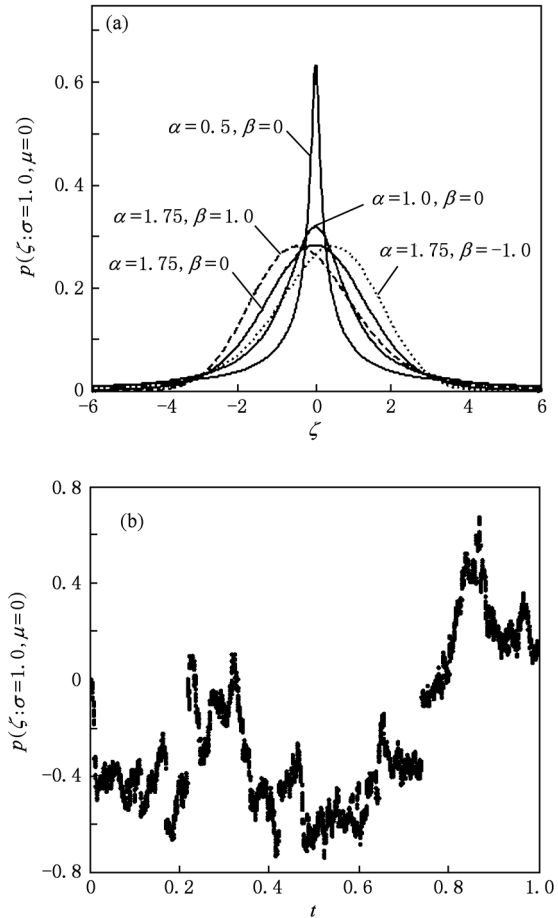


图 1 (a) 不同参数下的 Lévy 噪声的概率密度函数; (b) Lévy 噪声的样本路径

## 3. 非高斯 Lévy 噪声诱导的相转移

系统(1)所对应的分数阶 Fokker-Plank 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} U'(x) P(x, t) + D \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial |x|^\alpha}. \quad (4)$$

式中空间分数阶导数  $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$  是通过 Weyl 分数算子定义的:

$$\frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = -\frac{D_+^\alpha P(x, t) + D_-^\alpha P(x, t)}{2 \cos(\pi\alpha/2)}, \quad (5)$$

其中

$$D_+^\alpha P(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^x \frac{P(\eta, t) d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-1}}, \quad (6)$$

$$D_-^\alpha P(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^\infty \frac{P(\eta, t) d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-1}}. \quad (7)$$

在  $\alpha = 2.0$  时,非高斯 Lévy 噪声则退化为高斯白噪声,系统(1)的稳态概率密度是

$$P_{st}(x) = N \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right], \quad (8)$$

其中  $N$  为归一化常数.当系统参数  $r$  满足  $0 < |r| < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ , 稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  是双峰结构的.在  $\alpha \neq 2.0$  时,方程(4)的解析解一般是不可得的,我们可以采用 Grünwald-Letnikov 有限差分方法<sup>[23]</sup>进行数值求解,计算中取时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 初始条件  $P(\nu, 0) = \delta(\nu)$ .

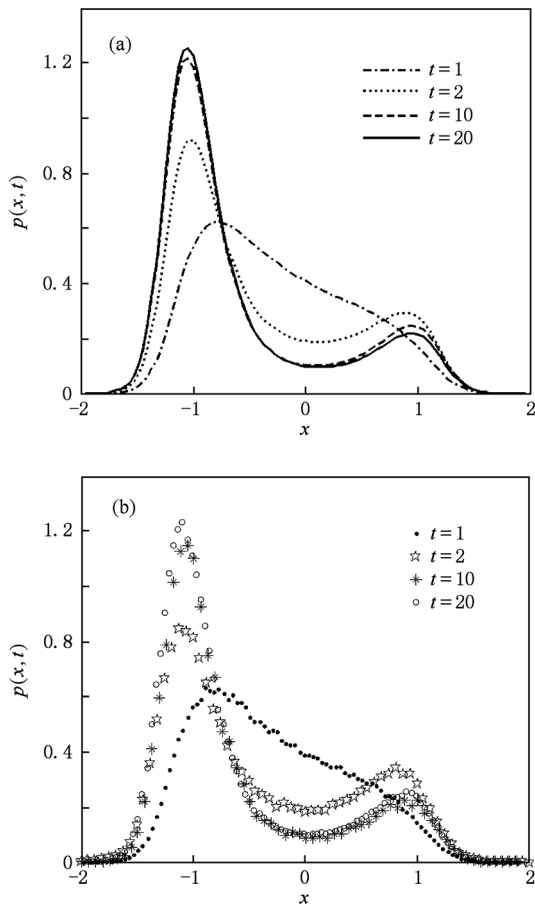


图2  $\alpha = 1.75, D = 0.2, r = 0.2$  时,不同时刻下的概率密度函数  $P(x, t)$  (a) Grünwald-Letnikov 有限差分法; (b) Monte Carlo 方法

图2(a)是通过 Grünwald-Letnikov 有限差分法得到的结果,为了验证该方法的有效性,我们利用文献[24]中的数值方法求解方程(1), Monte Carlo 模拟次数  $N = 10^5$ , 结果如图2(b)所示.可以发现,采用 Monte Carlo 方法得到的结果和用 Grünwald-Letnikov 有限差分法得到的结果符合得很好.从图2

中可以看出,在  $t > 10$  s, 概率密度函数  $P(x, t)$  基本不随时间而改变,故可以认为系统已经进入了平稳状态,即可以取系统稳态概率密度函数  $P_{st}(x) = P(x, 10)$ .

图3(a)显示了当  $D = 0.2, \alpha = 1.75, r$  分别取  $-0.5, 0.1, 0.4$  时系统的稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$ . 从图中可以看出,在噪声强度  $D$  和稳定性指标  $\alpha$  固定时,在非对称参数  $r$  从  $-0.5$  增大到  $0.4$  的过程中,  $P_{st}(x)$  从单峰结构转化为双峰结果,再从双峰结构转化成单峰结构,即系统发生了两次相转移.图3(b)给出了  $r = 0.2, \alpha = 1.5$  时,噪声强度  $D$  对稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  的影响.可以发现,随着噪声强度  $D$  的增大,  $P_{st}(x)$  的峰值逐渐减小,而且左峰明显要比右峰变化的快,但在此过程中  $P_{st}(x)$  始终为双峰结构,因此噪声强度  $D$  的改变不能诱导系统发生相转移.

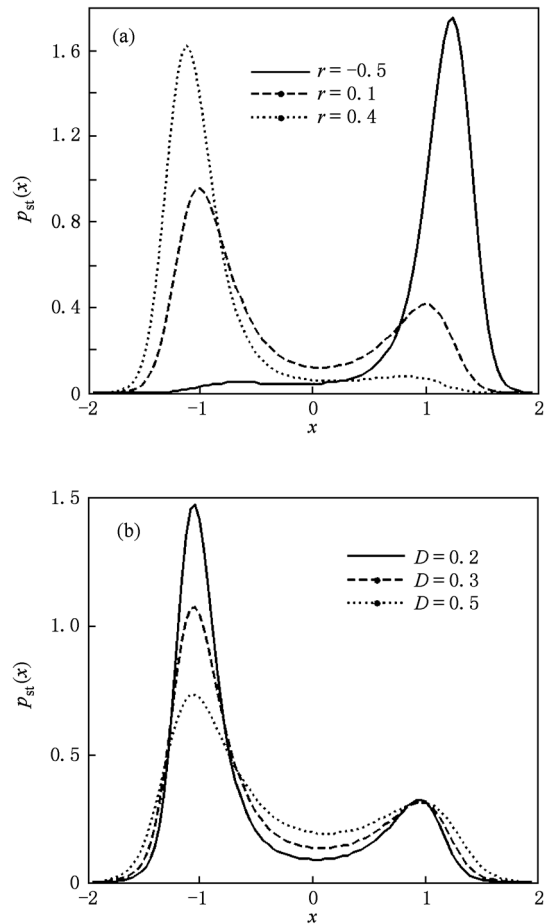


图3 不同非对称参数下的稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  (a)  $D = 0.2, \alpha = 1.75$ ; (b)  $r = 0.2, \alpha = 1.5$

固定噪声强度  $D = 0.5$ , 图4显示了非对称参

数  $r = -0.2$  和  $0.4$  稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  随着稳定性指标  $\alpha$  的变化曲线. 由图可知, 在  $r = -0.2$  时, 在  $\alpha$  减小的过程中,  $P_{st}(x)$  的双峰性质不会发生改变, 但峰形会变得更加陡峭, 两个峰的峰值也逐渐增大. 在图 4(b) 中, 当  $\alpha = 2.0$  时  $P_{st}(x)$  为单峰结构, 然而当  $\alpha = 1.1$  时  $P_{st}(x)$  为双峰结构. 因此, 在稳定性指标从  $2.0$  减小到  $1.1$  的过程中, 系统出现了一次相转移.

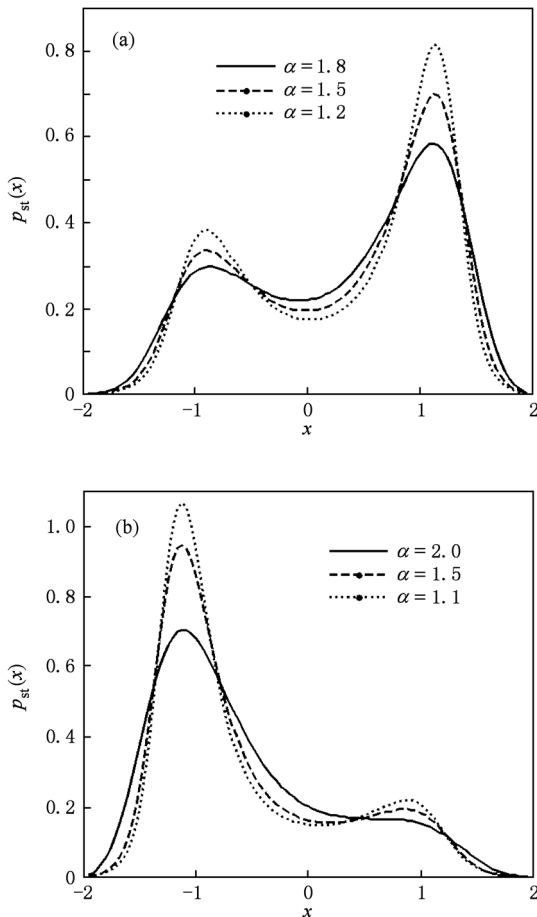


图 4  $D = 0.5$  时, 不同稳定性指标下的稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  (a)  $r = -0.2$ ; (b)  $r = 0.4$

综上所述, 非对称参数  $r$  和噪声稳定性指标  $\alpha$  的改变均可能诱导相转移的发生. 图 5 是系统在参数平面  $(r, \alpha)$  上的分岔图. 其中, 着色区域代表  $P_{st}(x)$  为单峰结构, 无色区域代表  $P_{st}(x)$  为双峰结构,  $l_1$  为两类区域的边界线. 由图可以看出, 随着稳定性指标  $\alpha$  的减小, 单峰型区域逐渐缩小而双峰区域则扩大. 参数  $r$  或  $\alpha$  从无色区域变化到着色区域, 或者从着色区域变化到无色区域的过程中, 系统将发生一次相转移, 且分岔点在两种区域的交界线  $l_1$  上.

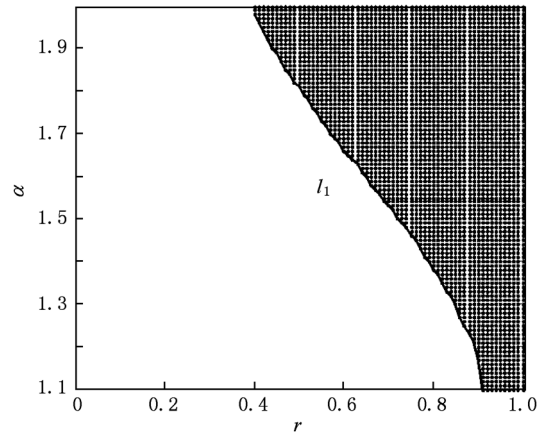


图 5 系统 (1) 在参数平面  $(r, \alpha)$  上的分岔图

#### 4. 平均首次穿越时间

噪声诱导的逃逸问题是随机动力学领域中人们关注的焦点之一<sup>[5,19-21]</sup>, 平均首次穿越时间是描述非线性随机系统逃逸问题的基本量之一, 是系统从一个稳态出发穿越势垒进入另一势阱所用时间的平均值, 用来描述非线性系统的瞬态性质. 令  $U(x) = 0$ , 可得系统 (1) 的两个稳定点和一个不稳定点分别为

$$\begin{aligned} x_{s1} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_{s2} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \\ x_{un} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

根据平均首次穿越时间的定义, 通过数值方法可得两个方向的平均首次穿越时间, 在计算中取时间步长  $\Delta t = 0.001$ , 计算  $N = 10000$  次样本数据取平均.

图 6 (a) 和 (b) 分别给出了系统两个方向的平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  随着噪声强度  $D$  的变化情况, 其中噪声稳定性指标  $\alpha = 1.5$ . 由图可知, 在稳定性指标  $\alpha$  固定的情况下, 随着噪声强度的增加,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  均逐渐减小, 说明噪声强度的增加有利于系统实现两个状态间的跃迁. 此外还可以看出,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  随着非对称参数  $r$  的增大而增大,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  却随着  $r$  的增大而减小, 这与文献 [19] 的结论是一致的.

取定非对称参数  $r = 0.2$ , 图 7 描述了  $\alpha = 1.2$ ,

1.5, 1.8 时系统两个方向的平均首次穿越时间随噪声强度  $D$  的变化情况, 我们可以再次看到, 平均首次穿越时间会随着  $D$  的增大而减小, 而且相同噪声强度和特征指数下的  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  要比  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  大. 此外, 随着  $D$  的增大, 图 7(a) 中 3 条曲线的间距越来越小而图 7(b) 中 3 条曲线的间距越来越大. 图 8 显示了在  $r = 0.2, D = 0.15$  时, 系统的平均首次穿越时间随稳定性指标  $\alpha$  的变化曲线. 可以发现,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  随着稳定性指标  $\alpha$  的增大而增大,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  却随着  $\alpha$  的增大而减小, 二者的变化程度也是显然不同的.

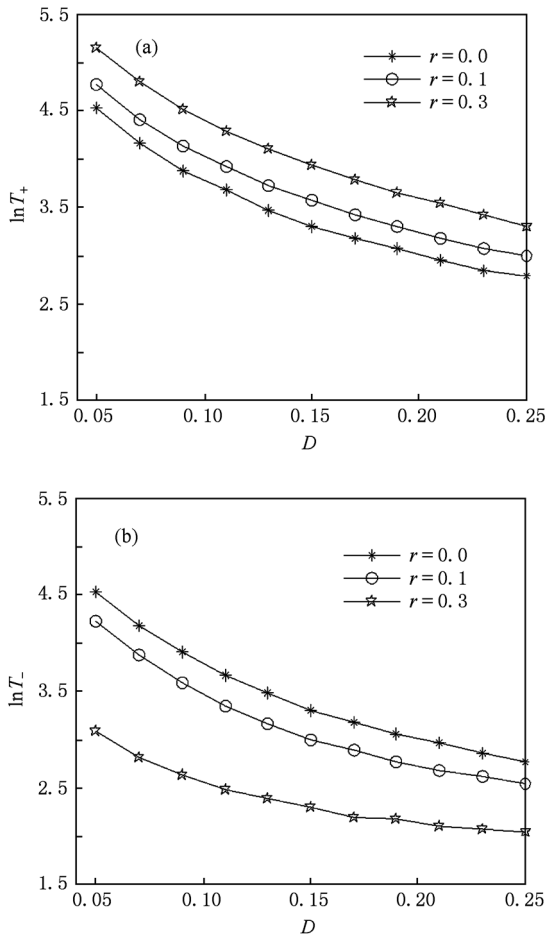


图 6  $\alpha = 1.5$  时, 平均首次穿越时间作为噪声强度  $D$  的函数随系统非对称参数  $r$  变化的曲线 (a)  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ ; (b)  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$

### 5. 结 论

文中研究了非高斯 Lévy 噪声驱动的非对称双稳系统的相转移和平均首次穿越时间, 讨论了系统

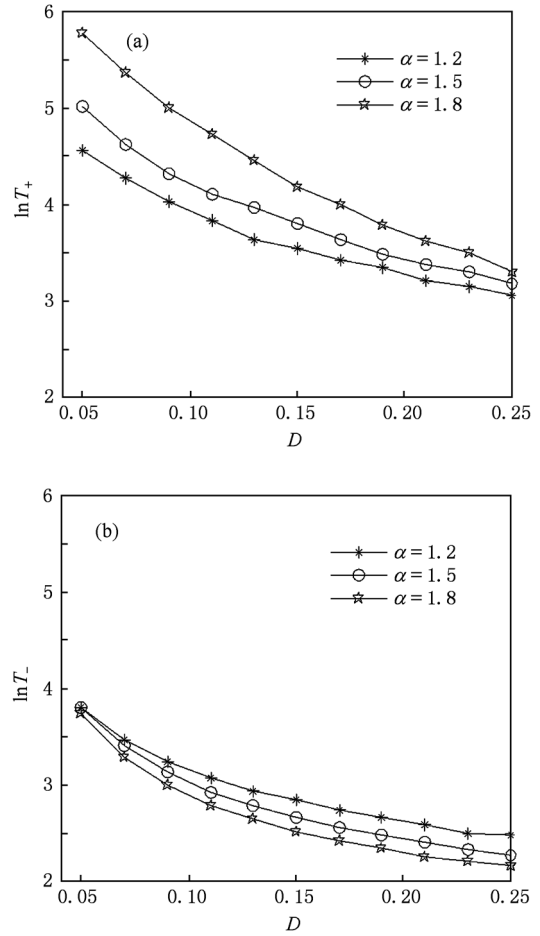


图 7  $r = 0.2$  时, 平均首次穿越时间作为噪声强度  $D$  的函数随稳定性指标  $\alpha$  变化的曲线 (a)  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ ; (b)  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$

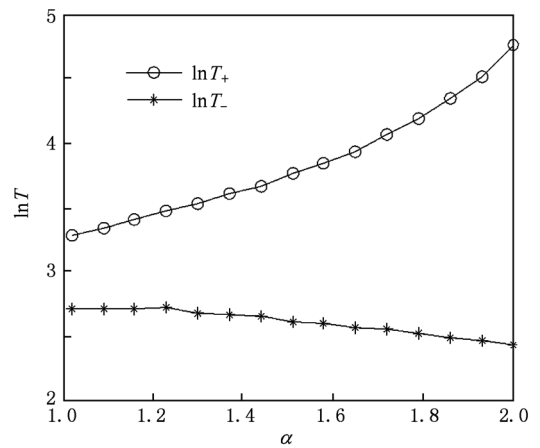


图 8  $r = 0.2, D = 0.15$  时, 平均首次穿越时间作为稳定性指标  $\alpha$  的函数曲线

的非对称参数  $r$ , Lévy 噪声的噪声强度  $D$  和稳定性指标  $\alpha$  的作用机理. 通过 Grünwald-Letnikov 有限差

分方法得到了系统的稳态概率密度函数,并利用 Monte Carlo 方法进行了验证,表明了该数值方法的有效性.根据稳态概率密度  $P_{st}(x)$  的变化,讨论了系统的相转移行为,给出了系统在参数平面  $(r, \alpha)$  上的分岔图.发现了噪声稳定性指标  $\alpha$  的减小能够使得概率密度峰值增大,并且可以使  $P_{st}(x)$  从原来为单峰结构转化为双峰结构.因此,系统的非对称参数  $r$  和噪声的稳定性指标  $\alpha$  的改变都能够诱导系统出现相转移现象.

此外,本文同时考虑了  $r, D$  和  $\alpha$  对系统两个方

向的平均首次穿越时间的影响.研究表明:在  $\alpha$  固定时,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  都会随噪声强度  $D$  的增大而减小,但非对称参数  $r$  对  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  的影响是完全相反的;若固定  $D$ ,随着  $\alpha$  的减小,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$  呈递增趋势而  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$  则呈现递减趋势,两者的变化程度也是不同的.

感谢美国伊利诺伊理工学院的段金桥教授和李小凡教授的有益讨论和帮助.

- [1] Ushakov O, Wünsche H, Henneberger F, Khovanov I, Schimansky L, Zaks M A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 123903
- [2] Mankin R, Laas T, Sauga A, Ainsaar A, Reiter E 2006 *Phys. Rev. E* **74** 021101
- [3] Gan C B 2006 *Nonlinear Dynamics* **45** 305
- [4] Li J H, Huang Z Q 1997 *Phys. Rev. E* **53** 3315
- [5] Yang J H, Liu X B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3727 (in Chinese) [杨建华、刘先斌 2010 物理学报 **59** 3727]
- [6] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波、曹力、吴大进、王俊 2004 物理学报 **53** 2127]
- [7] Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056215
- [8] Wan P, Zhan Y J, Li X C, Wang Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040502 (in Chinese) [万频、詹宜巨、李学聪、王永华 2011 物理学报 **60** 040502]
- [9] Zhang X Y, Xu Wei, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060514 (in Chinese) [张晓燕、徐伟、周丙常 2011 物理学报 **60** 060514]
- [10] Applebaum D 2009 *Lévy Processes and Stochastic Calculus* (Cambridge: Cambridge University Press) 2nd Edition
- [11] Janicki A, Weron A 1994 *Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -stable Stochastic Processes* (New York: Marcel Dekker, INC)
- [12] Dybiec B, Gudowaka-Nowak E, Sokolov I M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041122
- [13] Chechkin A V, Gonchar V Y, Klafter J, Metzler R 2006 *Adv. Chem. Phys.* **133** 439
- [14] Dubkov A A, Spagnolo B, Uchaikin V V 2008 *Int. J. Bifurcation Chaos* **18** 2649
- [15] Majumdar S N, Ziff R M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 050601
- [16] Romanelli A, Siri R, Micenmacher V 2007 *Phys. Rev. E* **76** 037202
- [17] Dybiec B, Gudowska E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021109
- [18] Ponomarev A V, Denisov S, Hanggi P 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043615
- [19] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞、徐伟、马少娟、李伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [20] Zhang X Y, Xu W 2007 *Chin. Phys.* **16** 928
- [21] Wang B, Wu X Q, Shao J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1391 (in Chinese) [王兵、吴秀清、邵继红 2009 物理学报 **58** 1391]
- [22] Leccardi M 2005 *ENOC' 05 (Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference), Mini Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications* (Eindhoven, the Netherland)
- [23] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equations*, Academic, San Diego
- [24] Zeng L Z, Bao R H, Xu B H 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 7175

# Phase transitions and the mean first passage time of an asymmetric bistable system with non-Gaussian Lévy noise<sup>\*</sup>

Gu Ren-Cai Xu Yong<sup>†</sup> Zhang Hui-Qing Sun Zhong-Kui

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 28 May 2011; revised manuscript received 29 June 2011)

## Abstract

This paper aims to investigate an asymmetric bistable system driven by non-Gaussian Lévy noise. The stationary probability density functions are obtained by the Grünwald-Letnikov scheme, and the effects of noise intensity and stability index on the stationary probability density are examined. Phase transitions can be observed through a qualitative change of the stationary probability distribution, which indicates that the phase transitions are induced by the asymmetric parameter and the stability index of Lévy noise. Additionally, the mean first passage time is considered, and different mechanisms for the effects of asymmetric parameter, noise intensity and stability index on first passage time are also obtained.

**Keywords:** non-Gaussian Lévy noise, asymmetric bistable system, phase transitions, mean first passage time

**PACS:** 05.40.-a, 05.40.Fb, 05.45.-a

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972181, 10902085, 11102157), the Fundamental Research Foundation of Northwestern Polytechnical University of China, and the Aoxiang Star plan of Northwestern Polytechnical University, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn