物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 60, No. 11 (2011) 111101

变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量*

杨新芳[1)] 孙现亭[2)] 王肖肖[1)] 张美玲[1)] 贾利群[1)†]

1)(江南大学理学院,无锡 214122)

2)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山 467002)

(2010 年 12 月 6 日收到;2011 年 1 月 17 日收到修改稿)

研究变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 建立变质量 Chetaev 型非完整系统的 Appell 方程和系统的运动微分方程; 给出函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 全导数的表示式,并在群的无限小变换下,给出变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据;得到用 Appell 函数表示的 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量的表达式,并举例说明结果的应用.

关键词: 变质量, 非完整系统, Appell 方程, Mei 守恒量

PACS: 11.30.-j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

1. 引 言

1899 年,法国著名数学家 Appell 得到了 Appell 方程[1]. 1918 年,德国科学家 Noether 揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系[2]. 但 Noether 理论的价值直到 20 世纪 70 年代才被人们真正认识. 从此,力学系统的对称性与守恒量的研究成为分析力学领域的一个重要研究方向,并逐渐取得了丰硕成果[3—16]. Appell 方程是分析力学理论中三大力学体系之一[17],在分析力学理论中具有重要地位. 近年来,Appell 体系的对称性与守恒量的研究也有一些进展[18—25].

由于空间技术和其他工业技术的进步,变质量系统动力学理论的研究日益受到重视[26]. 近年来,变质量力学系统对称性与守恒量的研究也取得了一些进展[27—30]. 本文研究变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量,给出用 Appell 函数表示的变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量的表达式,并举例说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

假设力学系统由 N 个质点组成. 在时刻 t, 第 i 个质点的质量和位矢分别为 m_i 和 r_i, 在时刻 $t+\mathrm{d}t$, 由质点分离(或并入)的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束方程

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

的限制,并设约束间彼此相容且独立. 约束方程(1)加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,\cdots,g).\tag{2}$$

系统的 Appell 函数为

$$S=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2,\tag{3}$$

系统的 Appell 方程可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}&=Q_s+P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\\&=Q_s+P_s+\Gamma_s\quad(s=1,\cdots,n).\end{aligned}\tag{4}$$

其中, λ_β 为与第 β 个约束所对应的约束乘子, $Q_s=$

* 中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: JUSRP31102)和国家自然科学基金(批准号:61178032)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jlq0000@163.com

$Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义力, Γ_s 和 P_s 分别为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的约束力和广义反推力. 方程(4)中

$$\Gamma_s = \Gamma_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{5}$$

$$P_s = \dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right). \tag{6}$$

(6)式中, $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 为第 i 个质点的速度, $\boldsymbol{u}_i$ 为从第 i 个质点分离的微粒相对第 i 个质点的速度. 在运动微分方程积分之前, 可由方程(1)和(4)求出约束乘子 $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 令

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = Q_s + \Gamma_s \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{7}$$

Λ_s 称为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义合力. 于是, (4)式变为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = \Lambda_s + P_s \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{8}$$

方程(8)称为变质量 Chetaev 型非完整系统的 Appell 方程. 如果系统的初始条件满足方程(1), 那么方程(8)的解就给出变质量 Chetaev 型非完整系统((1),(4))的运动. 利用方程(8), 可求出所有广义加速度——系统的运动微分方程

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{9}$$

3. 变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据

引入时间和广义坐标的无限小变换的展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{10}$$

其中, ε 为无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小变换生成元. 引进无限小变换生成元向量

$$\tilde{X}^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{11}$$

以及它的一次扩展和二次扩展

$$\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X}^{(0)} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

$$\tilde{X}^{(2)} = \tilde{X}^{(1)} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) - \ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{13}$$

其中, 在方程(12)和方程(13)中函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 的全导数

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \dot{\alpha}_s\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{14}$$

由(10)式可得

$$\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0\right] + O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

假设在经历无限小变换(10)后, 系统的动力学函数 S,Λ_s,P_s 和 f_β 分别变为 S^*,Λ_s^*,P_s^* 和 f_β^*, 注意到方程(8), 将 S^*,Λ_s^*,P_s^* 和 f_β^* 在 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$ 处作 Taylor 级数展开, 其中函数沿系统运动轨道曲线对时间 t 的全导数由(15)式表示. 有

$$S^* = S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(2)}(S) + O(\varepsilon^2), \tag{16}$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s^*\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{17}$$

$$P_s^* = P_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = P_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(P_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{18}$$

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = f_\beta\left(t,\boldsymbol{q},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}\right) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(f_\beta) + O(\varepsilon^2) \quad (\beta = 1,\cdots,g). \tag{19}$$

定义 1 如果用经无限小变换(10)变换后的动力学函数 S^*,P_s^* 和 Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 S,P_s 和 Λ_s, 方程(8)的形式保持不变, 即

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_s} = \Lambda_s^* + P_s^* \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{20}$$

则这种对称性称为变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的 Mei 对称性.

定义 2 如果用经无限小变换(10)变换后的动力学函数 S^*,P_s^* 和 Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 S,P_s 和 Λ_s, 方程(1)和(8)的形式都保持不变, 即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g), \tag{21}$$

和方程(20)同时成立, 则这种对称性称为变质量

Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的弱 Mei 对称性.

容易证明,系统的约束方程(1)加在虚位移 δq_s 上的条件方程(2)可改写为如下形式:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;\ s = 1,\cdots,n). \tag{22}$$

方程(22)称为附加限制方程.

定义 3　如果用经无限小变换(10)变换后的动力学函数 S^*,P_s^* 和 Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 S,P_s 和 Λ_s,方程(1)和(8)的形式都保持不变,并要求无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 满足附加限制方程(22),则这种对称性称为变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的强 Mei 对称性.

将(16),(17),(18)式代入(20)式,忽略 ε^2 以上的高阶小项,并利用方程(8)可得

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s + P_s) = 0, \tag{23}$$

方程(23)称为变质量 Chetaev 型 Appell 方程 Mei 对称性的判据方程. 由(20)式可知,变质量 Chetaev 型非完整约束方程(1)在变换(10)下的不变性,可归结为如下约束限制方程

$$\tilde{X}^{(1)}[f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})] = 0. \tag{24}$$

于是,有

判据 1　对于变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(23)成立,则方程(8)在无限小变换(10)下的不变性,称为变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的 Mei 对称性.

判据 2　对于变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使判据方程(23)和约束限制方程(24)成立,则方程(8)在无限小变换(10)下的不变性,称为变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的弱 Mei 对称性.

判据 3　对于变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 使附加限制方程(22),判据方程(23)和约束限制方程(24)成立,则方程(8)在无限小变换(10)下的不变性,称为变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的强 Mei 对称性.

4. 变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量

命题　如果变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\begin{aligned}&\tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] \\ &+ (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s[\tilde{X}^{(2)}(S)] \\ &+ \xi_0[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s + P_s)]\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

则变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程(8)的 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}} &= \xi_0\tilde{X}^{(2)}(S) + \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}} \\ &= \mathrm{const}.\end{aligned} \tag{26}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}I_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} =& \left[\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t}\right]\xi_0 + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} \\ &+ \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \alpha_s\xi_0 - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} \\ =& \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - \xi_s\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \dot{q}_s\xi_0\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \xi_0\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} \\ &+ \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$= \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] - (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial q_s} + \xi_0 \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_s}\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t},$$

注意到结构方程(25)和判据方程(23),则有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}I_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] + (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\tilde{E}_s[\tilde{X}^{(2)}(S)] + \xi_0\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(2)}(S)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}$$
$$= \xi_0\frac{\bar{\mathrm{d}}\alpha_s}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_s} - \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s + P_s)\right] = 0.$$

5. 算　例

变质量 Chetaev 型非完整约束系统的 Appell 函数为

$$S = \frac{1}{2}m(t)(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2) + m(t)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{m}(t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{m}(t)q_2, \tag{27}$$

其中

$$m(t) = m_0 t, \tag{28}$$

m_0 为常数,非势广义力为

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = -2m(t)\dot{q}_1. \tag{29}$$

所受非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_1 - t\dot{q}_2 = 0. \tag{30}$$

并入微粒的相对速度为

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -(\dot{q}_1\boldsymbol{i} + \dot{q}_2\boldsymbol{j}). \tag{31}$$

试研究变质量 Chetaev 型非完整系统的 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

由方程(6)可知

$$P_1 = 0,\quad P_2 = 0. \tag{32}$$

由(8)式和(30)式得

$$m(t)\ddot{q}_1 = \lambda,$$
$$m(t)\ddot{q}_2 + m(t) = -2m(t)\dot{q}_1 - \lambda t. \tag{33}$$

(33)式有解为

$$\ddot{q}_1 = \frac{\lambda}{m(t)},\quad \ddot{q}_2 = -1 - 2\dot{q}_1 - \frac{\lambda}{m_0}. \tag{34}$$

由(30)式得

$$\ddot{q}_1 - \dot{q}_2 - t\ddot{q}_2 = 0. \tag{35}$$

将(34)式代入(35)式得

$$\lambda = \frac{m_0 t}{1 + t^2}(\dot{q}_2 - t - 2t\dot{q}_1), \tag{36}$$

将(36)式代入(34)式得

$$\ddot{q}_1 = \alpha_1 = \frac{1}{1 + t^2}(\dot{q}_2 - t - 2t\dot{q}_1),$$
$$\ddot{q}_2 = \alpha_2 = -\frac{1}{1 + t^2}(2\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 + 1). \tag{37}$$

取生成元

$$\xi_0 = \xi_1 = 0,\quad \xi_2 = t\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + q_1 + t. \tag{38}$$

由(37)式计算可得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{39}$$

则可得

$$\tilde{X}^{(2)}(S) = m_0\xi_2,\quad \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_1} = 0,$$
$$\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_1 + P_1) = 0,\quad \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \ddot{q}_2} = 0,$$
$$\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_2 + P_2) = 0,\quad \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(2)}(S)] = 0,$$
$$\tilde{E}_1[\tilde{X}^{(2)}(S)] = 0,\quad \tilde{E}_2[\tilde{X}^{(2)}(S)] = 0,$$
$$\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_1} = m_0 t,\quad \frac{\partial \tilde{X}^{(2)}(S)}{\partial \dot{q}_2} = m_0. \tag{40}$$

利用(40)式容易验证判据方程(23)和约束限制方程(24)成立,而附加限制方程(22)不成立. 由判据 2 可知,(38)式表述的无限小变换生成元是变质量 Chetaev 型非完整系统的 Appell 方程的弱 Mei 对称性的无限小变换生成元. 由结构方程(25)可得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0. \tag{41}$$

利用(26)式可得本题中变质量 Chetaev 型非完整系统的 Appell 方程的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量为

$$I_{\mathrm{M}} = m_0(t\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + q_1 + t) = \mathrm{const}. \tag{42}$$

6. 结　论

本文采用沿系统运动轨道曲线求函数对时间

全导数的方法,给出了变质量 Chetaev 型非完整系统 Appeell 方程的 Mei 对称性的定义和判据,得到了变质量 Chetaev 型非完整系统 Appeell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量的表达式. 当广义反推力 $P_s = 0$ 时,本文结果可回到 Chetaev 型非完整系统 Appeell 方程 Mei 对称性的情况. 因此,本文结论更具普遍性. 本文的研究结果还可用于除非 Chetaev 型非完整系统 Appeell 方程 Mei 对称性外的其他 Appeell 方程 Mei 对称性的问题.

[1] Appell P 1899 *C. R. cad. Sc. Paris* **129** 317

[2] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **Kl**, **II** 235

[3] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[4] Mei F X 2001 *J. Beijing Institute of Tech.* **21** 535 (in Chinese) [梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[5] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[6] Luo S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5580 (in Chinese) [罗绍凯 2007 物理学报 **56** 5580]

[7] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2007 *Chin. Phys.* **16** 3176

[8] Ge W K, Mei F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 699 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2009 物理学报 **58** 699]

[9] Zhang Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4365

[10] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[11] Cai J L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1523

[12] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[13] Fang J H 2010 *Chin. Phys.* B **19** 040301

[14] Luo S K, Guo Y X 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 25

[15] Jia L Q, Zhang Y Y, Yang X F, Cui J C, Xie Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2939 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、杨新芳、崔金超、解银丽 2010 物理学报 **59** 2939]

[16] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Yang X F 2010 *Chin. Phys.* B **19** 110301

[17] Mei F X 1985 *Foundations of mechanics of nonholonomic systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) 214 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础(北京:北京工业学院出版社)214]

[18] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 117

[19] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[20] Jia L Q, Zhang Y Y, Cui J C, Luo S K 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 572

[21] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、王小明、刘晓巍 2010 **59** 3639]

[22] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Cui J C, Yang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7552 (in Chinese) [贾利群、解银丽、张耀宇、崔金超、杨新芳 2010 物理学报 **59** 7552]

[23] Xie Y L, Jia L Q 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 120201

[24] Xie Y L, Jia L Q, Luo S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010203

[25] Jia L Q, Xie Y L, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040201 (in Chinese) [贾利群、解银丽、罗绍凯 2011 物理学报 **60** 040201]

[26] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) 168 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)168]

[27] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[28] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟　军 2002 物理学报 **51** 1]

[29] Mei F X 2003 *Trans. Beijing Inst. Technol.* **23** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 1]

[30] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269

Mei symmetry and Mei conserved quantity of Appell equations for nonholonomic systems of Chetaev's type with variable mass*

Yang Xin-Fang[1)] Sun Xian-Ting[2)] Wang Xiao-Xiao[1)] Zhang Mei-Ling[1)] Jia Li-Qun[1)†]

1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

(Received 6 December 2010; revised manuscript received 17 January 2011)

Abstract

Mei symmetry and Mei conserved quantity of Appell equation for a nonholonomic system of Chetaev's type with variable mass are studied. The Appell equation and differential equation of motion of the system are set up. The expression of the total derivative of the function along the trajectory of the system with respect to t, the definition and criterion of Mei symmetry of Appell equation for a nonholonomic system of Chetaev's type with variable mass under the infinitesimal transformation of group are given. The structural equation of Mei symmetry and the expression of Mei conserved quantity expressed by Appell equation are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: variable mass, nonholonomic systems, Appell equation, Mei conserved quantity

PACS: 11.30.-j, 45.20.Jj, 02.20.Sv

* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. JUSRP31102) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61178032).

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com