机电系统 Mei 对称性导致的另一种守恒量*

刘晓巍 李元成†

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,青岛 266555)

(2011 年 1 月 4 日收到;2011 年 3 月 3 日收到修改稿)

研究机电系统 Mei 对称性导致的另一种守恒量. 在群的无限小变换下,给出机电系统的 Mei 对称性的定义和判据,得到机电系统 Mei 对称性导致的另一种守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: 机电系统, Mei 对称性, 守恒量

PACS: 11.30.-j, 45.20.Jj

1. 引 言

1918 年,Noether 揭示了对称性与守恒量间的潜在关系[1]. 但是,直到 20 世纪 70 年代,分析力学界才开始认识到 Noether 理论的科学价值,对称性与守恒量的研究从此蓬勃发展[2—6]. 2000 年,Mei 提出了力学系统的动力学函数经历无限小变换后仍满足原方程的一种对称性[7],人们普遍称之为 Mei 对称性. 2000—2007 年间,Mei 对称性的研究成果集中反映在梅凤翔的专著[8]和国内众多学者的研究成果[9]中. 2008 年以来,还有很多学者继续对 Mei 对称性进行研究[10—15].

1873 年,麦克斯韦通过 Lagrange 方法研究了机电系统,并且得到了 Lagrange-Maxwell 方程. 傅景礼等首次将 Lie 对称方法应用于机电系统[16]. 李元成、夏丽莉等研究了机电系统的统一对称性[17—19]. 本文研究机电系统 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量.

2. 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程

假设机电系统由 m 个回路组成,每个回路由线导体和电路组成. 各个电路之间是电无关的,但回路中的电磁过程不是独立的. 用 $i_k(k=1,\cdots,m)$ 表示第 k 个回路中的电流, u_k 为加在第 k 个回路中的电动势. 设 e_k 为电容器中的电荷,它与电流的关系为 $\dot{e}_k=i_k$, R_k 和 C_k 分别为第 k 个回路中的电阻和电容,系统受理想双面完整约束. 将 $e_k(k=1,\cdots,m)$, $q_s(s=1,\cdots,n)$ 取为广义坐标,系统的 Lagrange-Maxwell 函数为

$$L=T(q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)+W_{\mathrm{m}}(q_s,\dot{e}_k)-W_{\mathrm{e}}(q_s,e_k),\tag{1}$$

引入电的和机械的耗散函数之和

$$\psi=\psi_{\mathrm{e}}(i_k)+\psi_{\mathrm{m}}(q_s,\dot{q}_s),$$

则机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{e}_k}-\frac{\partial L}{\partial e_k}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}=u_k\quad(k=1,\cdots,m),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}=Q_s\quad(s=1,\cdots,n).\tag{2}$$

其中 $W_{\mathrm{m}}, W_{\mathrm{e}}, \psi_{\mathrm{e}}$ 分别为磁场能量,电场能量和电耗散函数,即

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_ki_r,$$

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{e_k^2}{C_k},$$

$$\psi_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}R_ki_k^2.\tag{3}$$

T, V 分别为系统的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{sl}\dot{q}_s\dot{q}_l,V=V(q_s),\tag{4}$$

其中系数 $a_{sl}=a_{sl}(q_s)$ 仅依赖于广义坐标. 方程(2)组成对广义坐标 q_s, e_k 的 $n+m$ 个二阶常微分方程组.

将空间坐标和广义电量用统一的广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m)$ 来表示,其中 $q_s(s=1,$

* 中国石油大学(华东)研究生创新基金(批准号:CXZC11-24)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn

©2011 中国物理学会 Chinese Physical Society

$\cdots,n$) 表示空间坐标分量, $q_s(s=n+1,\cdots,n+m)$ 表示电学分量. 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程(2)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}=Q_s,$$

$$(s=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m), \tag{5}$$

其中 $Q_s(s=1,\cdots,n)$ 为非势广义力, $Q_s(s=n+1,\cdots,n+m)$ 为广义电动势.

引入 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{6}$$

则方程(5)可表示为

$$E_s(L)=Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s},$$

$$(s=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m). \tag{7}$$

假设系统非奇异,即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0. \tag{8}$$

可求得所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{9}$$

引入无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{10}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小生成元.

假设在经历无限小变换(10)后, 系统的 Lagrange 函数 L, Q_s 和 ψ 变为 L^*, Q_s^* 和 ψ^*, 将 L^*, Q_s^* 和 ψ^* 在 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 处作 Taylor 级数展开后可得

$$\begin{aligned}
L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\
&= L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2),\\
Q_s^* &= Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\
&= Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2),\\
\psi^* &= \psi\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\
&= \psi(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(\psi)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{11}$$

定义 如果用经过无限小变换(10)变换后的函数 L^*, Q_s^* 和 ψ^* 代替变换前的函数 L, Q_s 和 ψ, 方程(7)的形式保持不变,即

$$E_s(L^*)=Q_s^*-\frac{\partial \psi^*}{\partial \dot{q}_s}. \tag{12}$$

则这种对称性称为机电系统的 Mei 对称性.

将(11)式代入(12)式,忽略 ε^2 以上的高阶小项,并利用方程(7),可得

$$E_s[X^{(1)}(L)]=X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right). \tag{13}$$

于是有:

判据 对机电系统,如果变换(10)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(13),则相应的不变性为系统的 Mei 对称性.

称方程(13)为机电系统的 Mei 对称性的判据方程. 其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.$$

3. 机电系统的 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量

命题 如果方程(5)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程:

$$q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}+\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]q_s+\dot{G}=0, \tag{14}$$

则系统的 Mei 对称性导致的守恒量为

$$I=\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}q_s+X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)q_s+G=\mathrm{const}. \tag{15}$$

证明 将 I 对 t 求导数

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}+\dot{q}_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\\
&\quad+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]q_s\\
&\quad+X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s+\dot{G}\\
&= q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}+\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\\
&\quad-\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}+\dot{q}_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}\\
&\quad+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]q_s\\
&\quad+X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s+\dot{G}\\
&= q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}+\dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\\
&\quad-\left\{E_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}_s}\right)\right\}\dot{q}_s
\end{aligned}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)\right]q_s+\dot{G}. \qquad (16)$$

将 Mei 对称性的判据方程(13)和(14)式代入(16)式,得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0. \qquad (17)$$

证毕.

显然,方程(14)和(15)是机电系统 Mei 对称性的另一种新的结构方程和守恒量.

4. 算　　例

机电系统 Lagrange 函数可表示为 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{1}{2}e^2-qe$, 耗散函数为 $\psi=q^2\dot{q}+e^2\dot{e}$, 非势广义力 $Q_1=q^2$, $Q_2=e^2$. 将空间坐标和广义电量用统一的广义坐标 q_s 来表示,则 Lagrange 函数可表示为 $L=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-q_1q_2$, 耗散函数为 $\psi=q_1^2\dot{q}_1+q_2^2\dot{q}_2$,非势广义力 $Q_1=q_1^2$, $Q_2=q_2^2$.

系统的运动方程为

$$\ddot{q}_1=-q_2,\ddot{q}_2=-q_1. \qquad (18)$$

选择无限小生成元

$$\xi_0=0,\xi_1=q_2,\xi_2=q_1. \qquad (19)$$

通过计算有

$$\begin{aligned}&X^{(1)}(L)=2\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1^2-q_2^2,\\&X^{(1)}[X^{(1)}(L)]=2\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2^2-4q_1q_2,\\&E_s[X^{(1)}(L)]=0.\end{aligned} \qquad (20)$$

下面,研究机电系统 Mei 对称性直接导致的守恒量. 将(20)式代入(14)式,可得

$$G=q_1^2+q_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2. \qquad (21)$$

由(15)式得系统 Mei 对称性导致的守恒量

$$I=-q_1^2-q_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2. \qquad (22)$$

5. 结　　论

本文给出了机电系统 Mei 对称性导致另一种守恒量. 值得注意的是,它的形式和已找到的机电系统的结构方程和守恒量文献[19]不同,并可以找到与第一种形式不同的守恒量. 因此,本文的结果发展和完善了约束力学系统 Mei 对称性与 Mei 守恒量理论,可以推广到存在非势力的一般完整系统和非完整力学系统等领域.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **KI**, Ⅱ 235

[2] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[3] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[4] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[5] Chen X W, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[6] Zhang Y, Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[7] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[9] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[10] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1560

[11] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[12] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1312

[13] Cai J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1731

[14] Yang X F, Jia L Q, Cui J C, Luo S K 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030305

[15] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304

[16] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1998 *J. Elect. Power* **13** 233 (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1998 电力学报 **13** 233]

[17] Li Y C, Xia L L, Wang X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6732 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、王小明 2009 物理学报 **58** 6732]

[18] Li Y C, Xia L L, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* **18** 4643

[19] Li Y C, Xia L L, Zhao W, Hou Q B, Wang J, Jing H X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5037 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、赵伟、后其宝、王　静、荆宏星 2007 物理学报 **56** 5037]

Another kind of conserved quantity induced by Mei symmetry of mechanico-electrical system*

Liu Xiao-Wei Li Yuan-Cheng†

(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum* (*East China*) *Qingdao* 266555, *China*)

(Received 4 January 2011; revised manuscript received 3 March 2011)

Abstract

Another kind of conserved quantity deduced from Mei symmetry of mechanico-electrical system is studied. Under the infinitesimal transformation of groups, another kind of conserved quantity of Mei symmetry of mechanico-electrical system is obtained from the definition and the criterion of Mei symmetry of mechanico-electrical system. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: mechanico-electrical systems, Mei symmetry, conserved quantity

PACS: 11.30.-j, 45.20.Jj

* Project supported by the Innovative Programs for Graduate of China University of Petroleum (East China), China (Grant No. CXZC11-24).

† E-mail: liyuanch@upc.edu.cn