

拉盖尔-高斯光束在界面反射和折射的 质心偏移特性研究*

欧军[†] 江月松 黎芳 刘丽

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

(2010年11月5日收到; 2010年12月22日收到修改稿)

在圆柱坐标系中研究了傍轴线偏振拉盖尔-高斯光束在两种各向同性介质界面反射和折射后光强质心的偏移. 基于菲涅耳近似和泰勒级数展开, 分别得到了部分反射和全反射两种情形下, 质心的横向偏移和纵向偏移与光束拓扑荷的解析关系式. 研究表明, 部分反射时, 反射和折射光束的横向偏移的大小与光束的拓扑荷成正比, 方向由拓扑荷的符号决定; 而纵向偏移仅仅大小与光束的拓扑荷有关. 全反射时, 反射光束质心偏移不受拓扑荷影响. 通过数值模拟验证了解析结果的正确性, 并得到了解析公式的适用条件. 拉盖尔-高斯光束的质心偏移特性可应用于测量光束的径向节点数和拓扑荷, 对利用拉盖尔-高斯光束进行信息编码和传输具有重要意义.

关键词: 拉盖尔-高斯光束, 横向偏移, 纵向偏移, 拓扑荷

PACS: 42.25.-p, 41.20.Jb, 42.25.Gy, 42.50.Tx

1. 引言

光束在两种各向同性电介质界面的反射和折射是光学中的基本研究内容, 在几何光学范畴内通常用斯涅耳定律和菲涅耳公式来处理. 但是现实中使用的光束都具有有限的宽度, 实际反射和折射光束的位置将会偏离几何光学中的理想光轴, 发生线偏移^[1, 2]和角偏移^[3-5], 例如著名的 Goos-Hänchen (GH) 位移^[6]和 Imbert-Fedorov (IF) 位移^[7, 8]. 这些偏移都与入射光的偏振(光子的自旋)有关, 特别地, 线性 IF 位移的方向由入射光束的自旋角动量的方向决定^[9, 10]. 除了与偏振有关的自旋角动量, 一些光束还具有与相位结构相关的轨道角动量^[11, 12], 通常把这种具有确定轨道角动量的光束称为涡旋光束, 其电场表达式包含相位因子 $\exp(-il\phi)$. 当涡旋核^[13]与光束中心重合并且振幅包络为高斯函数时, 即为拉盖尔-高斯光束(Laguerre-Gaussian, LG). LG 光束每光子具有数值为 hl 的轨道角动量, l 称为轨道角动量数或拓扑荷.

近十几年来, 光束的轨道角动量作为一种新的自由度, 在光学微操纵、量子信息科学等领域得到

了广泛的应用^[14-16]. 与轨道角动量有关的偏移将会影响透镜或其他镜面对 LG 光束的控制, 因此受到越来越多学者的关注. 此前, Fedoseyev 理论上预测 LG 光束发生部分反射后, 强度质心会横向偏移, 同时光束能量在入射面两侧重新分布^[17], 但是没有得出全反射时的结果. Okuda 和 Sasada 从实验上观察到了 LG 光束在全反射临界角附近发生反射和折射后光束强度的这种形变^[18, 19], 但是并未对其偏移量进行解析计算. 后来, Fedoseyev 进一步用二维矢量来描述 LG 光束在有损介质情形下反射光束的偏移^[20], 但忽略了角偏移, 而实际上在这种情况下线偏移和角偏移同时存在^[21].

本文对以上工作做了适当的补充和完善, 围绕傍轴线偏振 LG 光束在两种各向同性介质界面的反射和折射, 针对轨道角动量引起的光强质心偏移进行了系统地研究. 与前面文献采用的笛卡尔坐标系不同, 我们在圆柱坐标系下求解线偏振 LG 光束反射和折射电场矢量, 计算直接简洁, 且物理意义更加清晰明了. 在电场矢量的基础上, 采用菲涅耳近似以及泰勒级数展开, 从部分反射和全反射两种情形讨论, 解析计算得到光强质心同时存在的横向偏移和纵向偏移. 作为对解析公式的验证, 进行了与

* 国家重点基础研究发展计划(批准号:2011CB707001)资助的课题.

[†] E-mail: jun.oushine@gmail.com

菲涅尔近似无关的数值计算,得到了质心偏移的数值模拟结果. 对解析表达式的适用条件也做出了说明.

2. 入射和反射光场

考虑 LG 光束在各向同性介质 1 和介质 2 界面的反射和折射,两种介质的折射率分别为 n_1 和 n_2 . 选取如图 1 所示的坐标系,分别用笛卡尔坐标 (x_a, y_a, z_a) 表示入射、反射及折射光束的局部笛卡尔坐标, $a = i, r, t$. 光束束腰位于界面上的 O 点 ($x = 0, y = 0, z = 0$), 三个坐标系的原点都与 O 点重合. 为了计算方便,兼顾下面所使用的 LG 模式包络波函数的特点,和传统研究各种偏移的笛卡尔坐标系不同,我们将各个局部坐标系中的笛卡尔坐标变换到圆柱坐标: $\rho_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}, \phi_a = \arctan(y_a/x_a), z_a = z_a$.

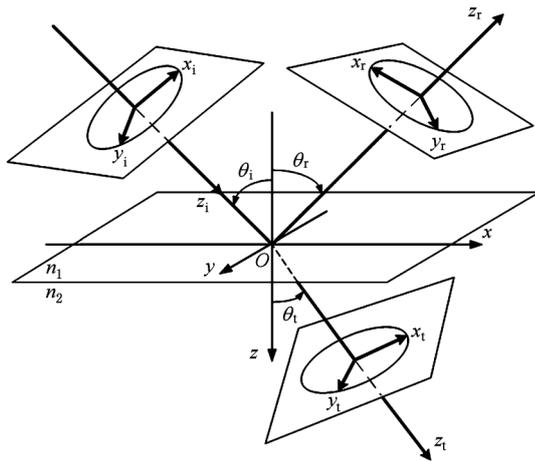


图 1 入射光在介质 n_1 和 n_2 分界面发生反射和折射的坐标系

值得说明的是,如同实际工作激光的 TEM 模式,这里用到的光束的电场和磁场也都存在轴向分量. 本文关于偏移的计算都是在与轴向垂直的横截面内进行的,横截面光强主要由径向分量决定,而轴向分量的影响则小很多^[22],因此,忽略轴向分量对界面反射和折射及其传播光束的质心偏移没有影响. 当然,这仅仅是针对光强以及我们所要研究的质心偏移来说的,实际上对于光束的角动量仍然要考虑轴向分量的作用. 因此,在傍轴近似下,傍轴入射线偏振 LG 光束电场矢量可以

写成^[23]

$$E_{p,l}^{i,j}(\rho_i, \phi_i, z_i) = i\omega \hat{e}_{ij} u_{p,l}(\rho_i, \phi_i, z_i) \exp(ik_1 z_i), \quad (1)$$

$$u_{p,l}(\rho, \phi, z) = \Psi_{p,l}(\rho, z) \exp(-il\phi), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{p,l}(\rho, z) = & C_{p,l}^{LG} \left[\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right]^{l|l|} L_p^{l|l|} \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik_a \rho^2}{2R(z)} \right. \\ & \left. - i(2p + |l| + 1)\psi(z) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

其中, \hat{e}_{ij} 为偏振方向的单位矢量, $j = p$ 或 s , 分别表示入射光束电场矢量的偏振方向平行 (p) 或垂直 (s) 于入射面 (x, z) . $u_{p,l}(\rho_i, \phi_i, z_i)$ 是 LG 模式的振幅包络函数. 振幅归一化常数 $C_{p,l}^{LG} = (2/\pi)^{l/2} \sqrt{p!/(p+|l|)!}$, 光斑半径 $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_{R_a})^2}$, w_0 为束腰半径, 瑞利距离 $z_{R_a} = k_a w_0^2/2$, k_a 为两种介质中的波数, 波前曲率半径 $R(z) = z[1 + (z_{R_a}/z)^2]$, $L_p^{l|l|}$ 为广义拉盖尔多项式, p 为径向节点数, l 为拓扑荷, Gouy 相位 $\psi(z) = \arctan(z/z_{R_a})$.

下面采用角谱分析法推导反射光束在傍轴近似下的电场矢量. 在 $z_i = 0$ 平面,入射光束的角谱可由二维傅里叶变换得到^[24]. 由于 LG 光束的振幅包络函数用圆柱坐标表示,为了简化计算,除了之前的空域 (x_a, y_a, z_a) 平面,我们也把波数域 (k_{ax}, k_{ay}, k_{az}) 平面的坐标变换成圆柱坐标: $k_{a\perp} = \sqrt{k_{ax}^2 + k_{ay}^2}, \varphi_a = \arctan(k_{ay}/k_{ax}), k_{az} = k_{az}$. 入射光束振幅包络函数的角谱为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{p,l}(k_{i\perp}, \varphi_i) = & \int_0^\infty d\rho_i \rho_i \int_0^{2\pi} d\varphi_i u_{p,l}(\rho_i, \phi_i, z_i = 0) \\ & \times \exp[-i\rho_i k_{i\perp} \cos(\phi_i - \varphi_i)]. \quad (4) \end{aligned}$$

这就是振幅包络函数的二维傅里叶变换在圆柱坐标系下的表达式,虽然在笛卡尔坐标系下通过将 LG 模式展开为埃尔米特高斯 (Hermite-Gaussian, HG) 模式的方法也可以计算^[19],但随着 p 和 l 的增大,展开系数的计算将变得繁琐. 采用圆柱坐标系的优势在于,通过直接计算(4)式可以得出

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{p,l}(k_{i\perp}, \varphi_i) = & \pi w_0^2 (-1)^{p+l} i^l \Psi_{p,l} \left(\frac{w_0^2 k_{i\perp}}{2}, 0 \right) \\ & \times \exp(-il\varphi_i). \quad (5) \end{aligned}$$

在上面的计算过程中,利用了与 Jacobi 多项式相关的展开式

$$e^{ir_1 r_2 \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(r_1 r_2) e^{in\theta}, \quad (6)$$

以及积分公式^[25]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-\beta x^2} L_n^{\nu}(\alpha x^2) J_{\nu}(xy) dx = 2^{-\nu-1} \beta^{-\nu-n-1} (\beta - \alpha)^n \gamma^{\nu} e^{-\gamma^2/4\beta} L_n^{\nu}(\alpha \gamma^2/4\beta(\alpha - \beta)) \quad (\text{Re}\beta > 0, \text{Re}\nu > 0). \quad (7)$$

从(1)式和(5)式可直接得到入射光束电场矢量的角谱 $\tilde{E}_{p,l}^{i,j}(k_{i\perp}, \varphi_i)$. 反射光束电场矢量的角谱与电场边界条件^[9] 和菲涅尔反射系数 $\tilde{r}_j(\gamma)$ 有关, $\tilde{E}_{p,l}^{r,j}(k_{r\perp}, \varphi_r) = \tilde{r}_j(\gamma) \tilde{E}_{p,l}^{i,j}(k_{i\perp}, \varphi_i)$. 由斯涅耳定律可知 $k_{i\perp} = k_{r\perp}, \varphi_i = -\varphi_r$, 结合边界条件即可得出用反射光束波数 γ 表示的反射角谱. 根据角谱的传播理论, 反射光束电场矢量的角谱乘以相位传播因子 $\exp(ik_{rz}z_r)$, 并做圆柱坐标系下的逆二维傅里叶变换计算反射光束的电场矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p,l}^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk_{r\perp} k_{r\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_r \\ &\times \tilde{E}_{p,l}^{r,j}(k_{r\perp}, \varphi_r) \times \exp[ik_{rz}z_r \\ &+ i\rho_r k_{r\perp} \cos(\phi_r - \varphi_r)]. \quad (8) \end{aligned}$$

其中, $k_{rz} = \sqrt{k_1^2 - k_{r\perp}^2}$, 为了能够对(8)式的积分进行解析计算, 需要对其中的两个量作近似处理: $\tilde{r}_j(\gamma)$ 和 k_{rz} . 对满足傍轴条件入射的光束, 采用菲涅耳近似将 k_{rz} 所含的根式展开到一阶. 入射光束的中心角谱分量位于入射面内 $(k_{i\perp}, \varphi_i, k_{iz}) = (k_1 \sin\theta_i, 0, k_1 \cos\theta_i)$, 其他分量分布于傍轴参数 $\alpha_0 = (k_1 w_0)^{-1}$ 限制的范围内. 对于傍轴高斯光束, $\alpha_0 \ll 1$, 因此可将反射系数 $\tilde{r}_j(\gamma)$ 围绕中心入射角谱 $\gamma_0 = k_1 \sin\theta_i$ 作泰勒级数展开, 只保留零阶和一阶项 (结合质心偏移的解析计算公式与不依赖这一近似得到的数值模拟结果的对比, 我们将在第5部分的讨论中对所作近似的适用情况作出说明)

$$\tilde{r}_j(\gamma) = \tilde{r}_j(\gamma_0) - k_{rz} \left. \frac{\partial \tilde{r}_j}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0 = k_1 \sin\theta_i}. \quad (9)$$

本文的主要目的是得出 LG 光束反射和折射后光强质心相对于理想光轴的偏移, 这就意味着光场不再关于光轴对称分布. 为了比较实际偏离的光场与理想情况的不同, 对应于(9)式反射系数的分解, 我们将反射光束的电场矢量写成两部分, 即

$$\mathbf{E}_{p,l}^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) = \mathbf{E}_0^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) + \mathbf{e}_c^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r). \quad (10)$$

其中, $\mathbf{E}_0^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)$ 是理想情况下光束按照几何光学反射得到的结果, $\mathbf{e}_c^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)$ 对应于实际情况中的修正项.

与(4)式的积分类似, 利用(6)式和(7)式可计算得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) &\approx \hat{e}_y (-1)^p i \omega \exp(ik_1 z_r) \\ &\times \tilde{r}_j(k_1 \sin\theta_i) \Psi_{p,l}(\rho_r, z_r) \\ &\times \exp(i\phi_r), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_c^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) &\approx \hat{e}_y (-1)^{p+1} \omega \exp(ik_1 z_r) \\ &\times \tilde{r}_j(k_1 \sin\theta_i) Q_{r,j} \\ &\times \left(\cos\phi_r \frac{\partial}{\partial \rho_r} - \frac{\sin\phi_r}{\rho_r} \frac{\partial}{\partial \phi_r} \right) \\ &\times \Psi_{p,l}(\rho_r, z_r) \exp(i\phi_r). \quad (12) \end{aligned}$$

因子 $Q_{r,j} = (\partial \ln \tilde{r}_j / \partial \gamma) |_{\gamma_0 = k_1 \sin\theta_i}$ 由反射系数直接计算. 从(11)式可以看出, 理想情况下反射光束仍然是标准的 LG 光束, 且与入射光束的强度之比等于反射率, 遵循几何光学反射定律. 在本文所考虑的参数范围内, 尽管修正项 $|\mathbf{e}_c^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)|$ 与 $|\mathbf{E}_0^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)|$ 相比很小, 但正是它的存在决定了光束质心偏移的特性.

将(11)式和(12)式代入(10)式, 最终得到反射光束的电场矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p,l}^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r) &= \hat{e}_y i \omega (-1)^p \exp(ik_1 z_r) \exp(i\phi_r) \tilde{r}_j(k_1 \sin\theta_i) \\ &\times \left\{ \left[1 + l Q_{r,j} \frac{\sin\phi_r}{\rho_r} - Q_{r,j} \frac{k_1 \rho_r \cos\phi_r}{R(z_r)} \right] \Psi_{p,l}(\rho_r, z_r) + i Q_{r,j} \cos\phi_r \right. \\ &\times \left. \left[\left(\frac{l}{\rho_r} + \frac{2\rho_r}{w^2(z_r)} \right) \Psi_{p,l}(\rho_r, z_r) - \frac{2\sqrt{2}}{w(z_r)} \sqrt{p+|l|+1} \Psi_{p,l+1}(\rho_r, z_r) \exp(i\psi(z_r)) \right] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

从该表达式来看, 振幅包络 $\Psi_{p,l}(\rho_r, z_r)$ 和 $\Psi_{p,l+1}(\rho_r, z_r)$ 之间的耦合是引起反射光束质心偏移

的一种因素,这点与笛卡尔坐标系得到的结果^[19]类似. 不过与后者不同,圆柱坐标下振幅包络的系数中明显包含方位角坐标 ϕ_r , 根据坐标变换: $x_r = \rho_r \cos\phi_r, y_r = \rho_r \sin\phi_r$, 可以从公式上解释反射光束质心的纵向偏移(x 方向)和横向偏移(y 方向)的来源. 除此之外,在(13)式中我们将修正项 $e^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)$ 按振幅包络的实虚部拆成两部分,其中实部与 $E_0^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)$ 结合放在第一个方括号内,这一部分是光束在部分反射时质心偏移的直接原因. 第二个方括号里的虚部则对应全反射时的偏移. 相对于笛卡尔坐标系下笼统的表达式,其物理意义更加清晰明了,同时也便于后面对偏移量进行解析计算.

3. 反射光束的质心偏移

在与光束中心传播方向垂直的平面内,考虑二维径向矢量 $\mathbf{r}_a = x_a \hat{\mathbf{e}}_{ax} + y_a \hat{\mathbf{e}}_{ay}$, 那么光束的质心可以用矢量 $\mathbf{R}_a = \langle x_a \rangle \hat{\mathbf{e}}_{ax} + \langle y_a \rangle \hat{\mathbf{e}}_{ay}$ 来确定^[4]

$$\mathbf{R}_a = \frac{\iint \mathbf{r}_a I(\rho_a, \phi_a, z_a) \rho_a d\rho_a d\phi_a}{\iint I(\rho_a, \phi_a, z_a) \rho_a d\rho_a d\phi_a}. \quad (14)$$

电磁场的能量分布与波印廷矢量有关: $I(\rho_a, \phi_a, z_a) \propto \mathbf{S}_a \cdot \hat{\mathbf{e}}_{az}$, 其中 $\mathbf{S}_a = \text{Re}[\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a^*]/2$, 磁场矢量可以由麦克斯韦方程组得出: $\mathbf{H}_a = -i\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_a$. 通

过简单的计算可得到反射光束的强度分布 $I(\rho_r, \phi_r, z_r) \propto |E_{\rho_r,l}^{r,j}(\rho_r, \phi_r, z_r)|^2$.

考虑到除了与坐标 (ρ_r, ϕ_r, z_r) 相关的量,反射光束的电场矢量(13)还包含取决于入射角的因子 $Q_{r,j}$. 通常情况下, $Q_{r,j}$ 是复数,可以写成 $Q_{r,j} = Q_{r,j}^R + iQ_{r,j}^I$ 的形式,其实部依赖于反射系数的振幅对入射角的导数,而虚部则由相位的导数决定. 当入射角小于全反射临界角(部分反射)时或者大于临界角(全反射)时,反射系数 $\tilde{r}_j(\gamma)$ 的振幅和相位的行为特征不一样,因此在这两个区域光束的质心偏移也不同.

用波数表示的非涅耳反射系数^[26]

$$\tilde{r}_j(\gamma) = \frac{m_j \sqrt{k_1^2 - \gamma^2} - \sqrt{k_2^2 - \gamma^2}}{m_j \sqrt{k_1^2 - \gamma^2} + \sqrt{k_2^2 - \gamma^2}}. \quad (15)$$

其中, $m_p = \varepsilon, \varepsilon = (n_2/n_1)^2$ 是介质2相对于介质1的介电常数, $m_s = 1$. 波数 $\gamma = k_1 \sin\theta$, θ 为不同角谱分量的入射角,中心入射角谱分量 $\gamma_0 = k_1 \sin\theta_i$.

3.1. 部分反射

对于部分反射的情形 ($\theta_i < \arcsin\sqrt{\varepsilon}$), 反射系数是实数,那么其相位只能取0或 $\pm\pi$, 因此 $Q_{r,j}^I = 0$. 经过计算得出 $Q_{r,j}^R = 2 \tan\theta_i / [k_1 \alpha_j \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta_i}]$, 对于p偏振, $\alpha_p = \varepsilon^{-1} \sin^2\theta_i - \cos^2\theta_i$; 对于s偏振, $\alpha_s = 1$. 此时反射光强分布

$$I^R(\rho_r, \phi_r, z_r) \propto \omega^2 [\tilde{r}_j(k_1 \sin\theta_i)]^2 \left\{ \left[1 + l Q_{r,j}^R \frac{\sin\phi_r}{\rho_r} - Q_{r,j}^R \frac{k_1 \rho_r \cos\phi_r}{R(z_r)} \right]^2 [\Phi_{p,l}(\rho_r, z_r)]^2 + (Q_{r,j}^R \cos\phi_r)^2 \left[\left(\frac{|l|}{\rho_r} + \frac{2\rho_r}{w^2(z_r)} \right) \Phi_{p,l}(\rho_r, z_r) - \frac{2\sqrt{2}}{w(z_r)} \sqrt{p+|l|+1} \Phi_{p,l+1}(\rho_r, z_r) \right]^2 \right\}. \quad (16)$$

其中,圆对称函数

$$\Phi_{p,l}(\rho_r, z_r) = C_{p,l}^{LG} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_r}{w(z_r)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2\rho_r^2}{w^2(z_r)} \right) \exp\left(-\frac{\rho_r^2}{w^2(z_r)} \right),$$

把(16)式代入(14)式经过一系列计算得到 $z_r = \text{const}$ 平面内的反射光强质心的偏移量

$$\langle x_r \rangle^R = -\frac{z_r}{z_{R1}} \frac{Q_{r,j}^R (2p+|l|+1)}{1 + \left(\frac{Q_{r,j}^R}{w_0} \right)^2 (2p+|l|+1)}, \quad (17)$$

$$\langle y_r \rangle^R = \frac{Q_{r,j}^R}{1 + \left(\frac{Q_{r,j}^R}{w_0} \right)^2 (2p+|l|+1)} l. \quad (18)$$

在积分过程中,我们利用了广义拉盖尔多项式

的递推关系以及正交性质^[25]. 从(17)式可以看出,光强质心在 x 方向(纵向)的偏移随着拓扑荷的增加而增大,且始终位于 x 轴负方向,与拓扑荷的方向无关. 而在 y 方向(横向)不但偏移量随着拓扑荷变大,而且偏移的方向也由拓扑荷的符号决定(见式(18)).

为了验证这一结果,在电场矢量(8)式的基础上对光场的分布以及偏移位置进行数值模拟. 由于(8)式中被积函数是关于波数(及其分量)的表达式,通过在波数域进行数值积分得到空间域的电场矢量,取模求平方获得光强分布图. 结合光强质心计算公式(14),在仿真软件中进行数值叠加即可得

出质心位置,结果如图 2 所示. 入射线偏振 LG 光束的波长为 $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$,束腰 $w_0 = 0.1 \text{ mm}$,介质 1 是材质为 BK7 的玻璃 ($n_1 = 1.51$),介质 2 为空气 (n_2

$= 1$),入射角比全反射临界角小 0.1° . 观察面距离束腰的位置 $z_r = 6 \text{ cm}$,图 2(a)和(b)分别对应拓扑荷 $l = 2$ 和 $l = -2$.

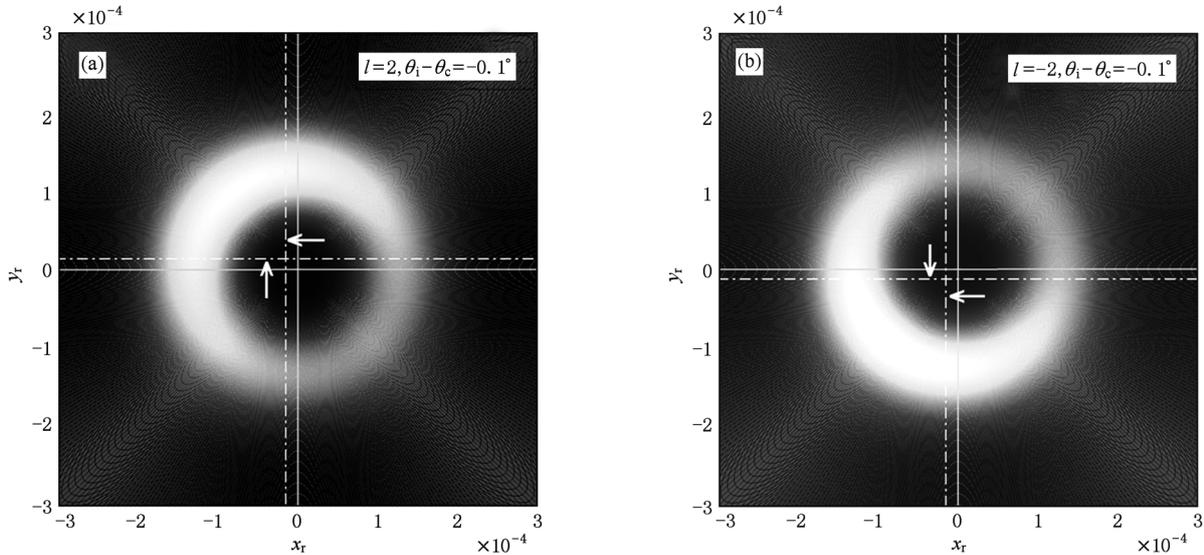


图 2 部分反射下的反射涡旋光束强度分布及质心偏移 (a) $l = 2$; (b) $l = -2$

从图 2 中可以直观看出,反射光束的强度不再关于光轴对称分布,光强质心(虚线交点)相对于光束中心(实线交点)在横向和纵向都存在偏移,偏移的方向如箭头所指. 对应于拓扑荷由 $l = 2$ 到 $l = -2$ 的变化,纵向偏移始终保持为负值,横向偏移则由正变为负. 因此从数值模拟的角度得出,在给定的与传播方向垂直的平面内,横向偏移随拓扑荷符号的变化而反向. 这与偏移解析表达式的结果一致.

在由(8)式决定的部分反射光强分布的基础上,我们通过对光强数值积分得到拓扑荷 $l = 0, 1, 3, 5$ 涡旋光束经过反射后光强质心偏移量(实线),并与根据(17),(18)式得到的解析结果(标记符)比较,如图 3 所示,上半平面表示横向偏移 $\langle y_r \rangle^R$,下半平面表示纵向偏移 $\langle x_r \rangle^R$.

从图中可以看出,质心偏移量随着入射角从 $\theta_c - 0.25^\circ$ 逐渐变化到 θ_c 而增大,在非常接近 θ_c 时,偏移量变得很明显(约为几十个波长),这是由于反射系数急剧增加引起的. 无论是纵向还是横向的偏移量都随着 l 的增加而增大. 对于 p 偏振,当 $l = 1, \theta_i - \theta_c = -0.1^\circ$ 时,数值计算纵向和横向偏移量分别为 $10.5 \mu\text{m}$ 和 $6.6 \mu\text{m}$,对应的解析计算结果为 $10.3 \mu\text{m}$ 和 $6.5 \mu\text{m}$,两者符合得较好. 另外,我

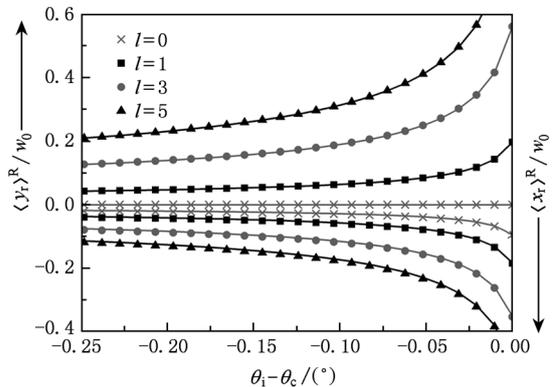


图 3 反射涡旋光束质心偏移量的数值计算(实线)与解析计算(标记符)结果对比,光束的拓扑荷依次取 $0, 1, 3, 5$

们注意到当 $l = 0$ 时,只存在纵向偏移,这与非涡旋光束在部分反射时的偏移理论相符合^[21].

对于 s 偏振,我们也对光束的光场分布和质心偏移进行了数值模拟,质心偏移的大小和方向都与解析表达式结果一致. 与 p 偏振相比,前者的偏移量较小,这是由于 p 偏振下的反射系数在临界角附近变化更加剧烈. 事实上,当入射角在 $(\theta_c - 0.25^\circ, \theta_c)$ 内变化时, $\alpha_s / \alpha_p \approx 2.3$,也就是说,此时 p 偏振下的质心偏移量约为 s 偏振的 2.3 倍. 后文的其他情形都类似,仅仅对 p 偏振进行数值模拟从而验证

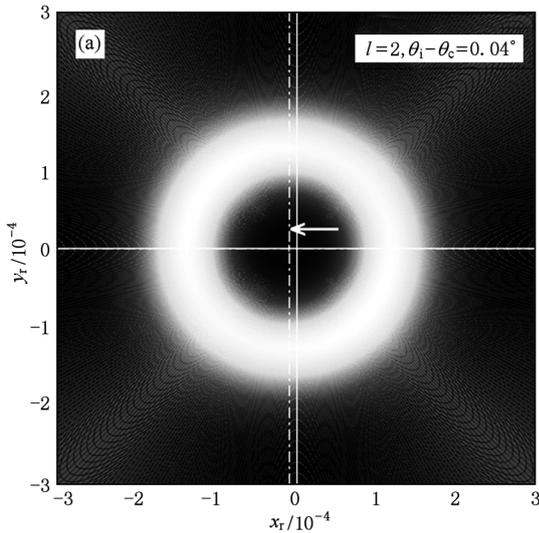
解析表达式的正确性,其结论对 s 偏振同样适用.

3.2. 全反射

对于全反射的情形 ($\theta_i > \arcsin \sqrt{\varepsilon}$), 反射系数简化为纯相位项 $\tilde{r}_j(\gamma) = \exp(i\delta_j)$, 此时 $Q_{r,j}^R = 0$. 经过计算得出 $Q_{r,j}^I = 2 \tan \theta_i / [k_i \beta_j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \varepsilon}]$, 对于 p 偏振, $\beta_p = -\alpha_p$; 对于 s 偏振, $\beta_s = \alpha_s = 1$. 类似于(16)式, 我们先计算全反射时光强分布 $I^l(\rho_r, \phi_r, z_r)$, 然后分别从解析和数值(基于(8)式)两方面计算光强质心的偏移. 把 $I^l(\rho_r, \phi_r, z_r)$ 代入(14)式得出光强的质心偏移

$$\langle x_r \rangle^I = \frac{Q_{r,j}^I}{1 + \left(\frac{Q_{r,j}^I}{w_0}\right)^2 (2p + |l| + 1)}, \quad (19)$$

$$\langle y_r \rangle^I = 0. \quad (20)$$



反射光场的分布以及质心偏移位置数值模拟如图 4(a) 所示, 入射角比全反射临界角大 0.04° , 所选择的横截面距离束腰 $z_r = 6 \text{ cm}$, 光束的拓扑荷 $l = 2$. 事实上, $l = -2$ 的反射光场与 $l = 2$ 的分布相同, 这里不再重复绘制. 结合质心偏移量的解析计算结果图 4(b), 我们发现全反射情形下反射光束质心仅仅发生纵向偏移, 在临界角附近的偏移量为波长的几倍到十几倍. 从入射角由 $\theta_c + 0.075^\circ$ 变化到 $\theta_c + 0.125^\circ$ 的局部放大图可以看出, 对于不同的拓扑荷 $l = 1, 5, 10$, 偏移量的变化在一个波长以内.

只要光束束腰半径足够大^[1], 且入射角不非常接近临界角 ($\theta_i - \theta_c > \alpha_0 = 0.038^\circ$), (19) 式可化简为 $\langle x_r \rangle^I = Q_{r,j}^I$. 这与全反射时 GH 位移的经典表达式一致^[26], 也就是说, 在全反射情形下满足上述条件的线偏振傍轴涡旋光束的反射光强质心偏移不受拓扑荷影响.

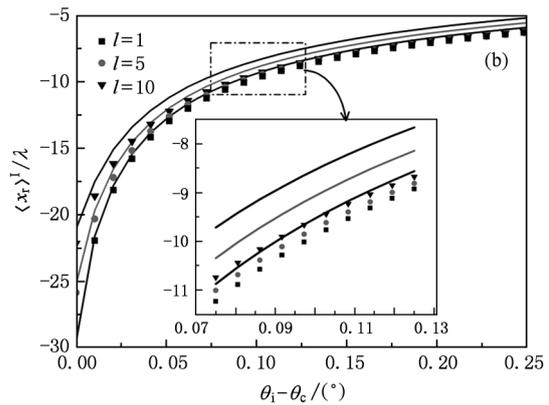


图 4 (a) 全反射下的反射涡旋光束强度分布及质心偏移; (b) 质心偏移量的数值计算(实线)与解析计算(标记符)结果对比, 拓扑荷依次取 1, 5, 10

4. 折射光场及其光强质心偏移

与反射光束电场矢量的计算公式(8)相似, 傍轴近似下折射光束电场矢量表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p,l}^{i,j}(\rho_t, \phi_t, z_t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk_{t\perp} k_{t\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_t \\ & \times \tilde{\mathbf{E}}_{p,l}^{i,j}(k_{t\perp}, \varphi_t) \times \exp[ik_{tz}z_t \\ & + i\rho_t k_{t\perp} \cos(\phi_t - \varphi_t)]. \quad (21) \end{aligned}$$

其中, $k_{tz} = \sqrt{k_2^2 - k_{t\perp}^2}$. 折射光束电场矢量的角谱与电场边界条件和菲涅耳折射系数 $\tilde{t}_j(\gamma)$ 有关, $\tilde{\mathbf{E}}_{p,l}^{i,j}(k_{t\perp}, \varphi_t) = \tilde{t}_j(\gamma) \tilde{\mathbf{E}}_{p,l}^{i,j}(k_{i\perp}, \varphi_i)$, 入射光束电场矢量的角谱 $\tilde{\mathbf{E}}_{p,l}^{i,j}(k_{i\perp}, \varphi_i)$ 已在第二部分得到. 由斯涅耳定律可知 $k_{tx} = k_{ix}/\eta, k_{ty} = k_{iy}, \eta = \cos\theta_i/\cos\theta_t$, 因此可将入射波数用反射波数来表示. 菲涅耳折射系数 $\tilde{t}_j(\gamma)$ 与反射系数存在关系 $\tilde{r}_j^2(\gamma) + \eta\sqrt{\varepsilon}\tilde{t}_j^2(\gamma) = 1$. 类似反射光场的推导, 将折射系数

$\tilde{t}_j(\gamma)$ 围绕中心入射角谱 $\gamma_0 = k_2 \sin \theta_l = k_1 \sin \theta_i$ 作泰勒级数展开, 保留零阶和一阶项: $\tilde{t}_j(\gamma) = \tilde{t}_j(\gamma_0)$

$[1 + \eta k_{1x} Q_{1,j}], Q_{1,j} = (\partial \ln \tilde{t}_j / \partial \gamma) |_{\gamma_0 = k_1 \sin \theta_i}$. 以上各关系式代入(21)式, 最终得到折射光束的电场矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p,l}^{i,j}(\rho_l, \phi_l, z_l) \propto & \hat{\mathbf{e}}_{ij} 2^{-1|l|} w_0^{|l|+2} \tilde{t}_j(k_1 \sin \theta_i) \sum_{k=0}^{|l|} b_k^{|l|} \frac{s_l^k}{i^{|l|-k}} \left(\frac{Z_{l_1}}{1+Z_{l_1}} \right)^{\frac{|l|-k}{2}} \exp\left(\frac{X_l^2}{1+Z_{l_1}} \right) \\ & \times \left[\left(1 + \frac{2Q_l X_l}{Z_{l_1}} \right) H_{|l|-k} \left(\frac{X_l}{\sqrt{Z_{l_1} - Z_{l_1}^2}} \right) - \frac{Q_l}{\sqrt{Z_{l_1} - Z_{l_1}^2}} H_{|l|-k+1} \left(\frac{X_l}{\sqrt{Z_{l_1} - Z_{l_1}^2}} \right) \right] \\ & \times \left(\frac{Z_{l_2}}{1+Z_{l_2}} \right)^{\frac{k}{2}} H_k \left(\frac{Y_l}{\sqrt{Z_{l_2} - Z_{l_2}^2}} \right) \exp\left(\frac{Y_l^2}{1+Z_{l_2}} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $X_l = ix_l / \eta w_0, Y_l = iy_l / w_0, Q_l = Q_{l,j} / w_0, Z_{l_1} = iz_l / z_{R_x}, Z_{l_2} = iz_l / z_{R_y}$. 值得注意的是, 折射光束传播时在横向和纵向的瑞利距离并不相同, $z_{R_x} = \eta^2 z_{R_2}, z_{R_y} = z_{R_2}$. $b_k^{|l|}$ 为二项式展开系数, $s_l =$

$\text{sgn}(l), H_n(t)$ 为埃尔米特多项式. 从形式上看, 折射光束的电场矢量(22)类似于从 HG 模式到 LG 模式的转换, 其坐标对应地从笛卡尔坐标变换为圆柱坐标.

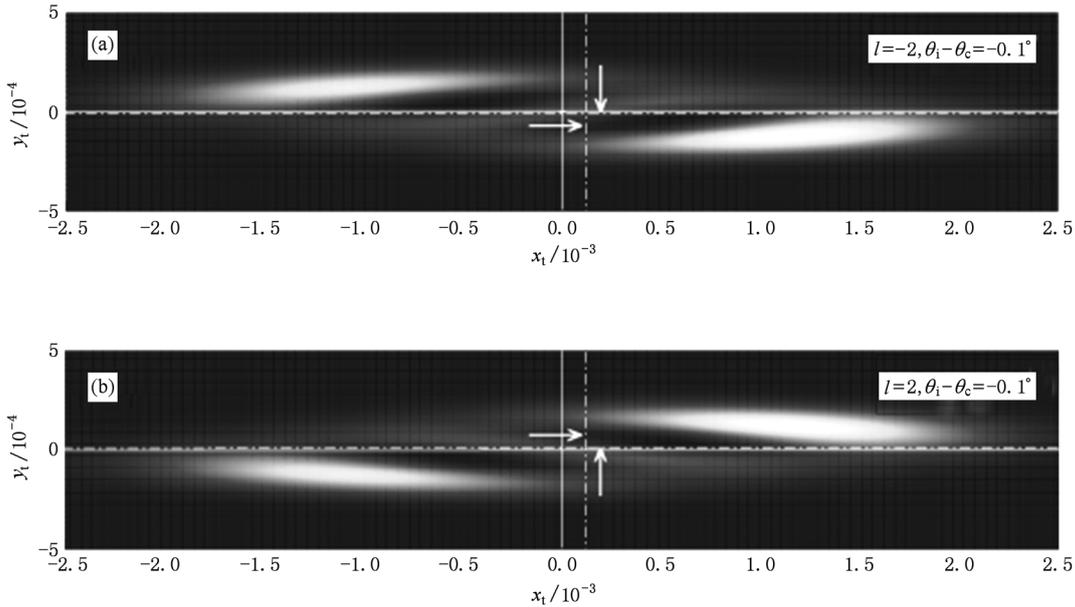


图5 部分反射下折射涡旋光束强度分布及质心偏移 (a) $l=2$; (b) $l=-2$

同样根据麦克斯韦方程组和波印廷矢量计算公式可知, 折射光束的强度分布 $I(\rho_l, \phi_l, z_l) \propto |E_{p,l}^{i,j}(\rho_l, \phi_l, z_l)|^2$, 根据(21)式得到的光场分布以及质心偏移位置数值模拟如图5所示, 入射角比全反射临界角小 0.1° , 所选择的横截面距离束腰 $z_l = 6$ cm, 图5(a)和(b)分别对应拓扑荷 $l = 2$ 和 $l = -2$. 从图5可以看出, LG 模式折射光束的强度分布与对角 HG 模式很相似, 只不过在纵向相比于横向有明显的扩展, 这是由于光束传播时横向和纵向瑞利距离不同引起的, $z_{R_x} < z_{R_y}$. 对应于拓扑荷的符号由正

变负, 纵向偏移方向保持不变, 而横向偏移则反向.

发生全反射时, 折射光表现为一定区域的隐失波(穿透深度约为一个波长量级, 远远小于观察截面到束腰的距离 $z_l = 6$ cm), 因此只研究部分反射时折射光强质心的偏移. 此时, 折射系数 \tilde{t}_j 和 $Q_{l,j}^R$ 都为实数, 计算可得 $Q_{l,j}^R = (1 - \varepsilon) \tan \theta_i / k_1 \cos \theta_i [\chi_j \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_i} + (\varepsilon - \sin^2 \theta_i)]$, 对于 p 偏振, $\chi_p = \varepsilon$; 对于 s 偏振, $\chi_s = 1$. 将 $I(\rho_l, \phi_l, z_l)$ 代入(14)式, 得到折射光束的质心偏移

$$\langle x_t \rangle^R = \frac{z_t}{\eta z_{R_2}} \frac{Q_{t,j}^R (2p + |l| + 1)}{1 + \left(\frac{Q_{t,j}^R}{w_0}\right)^2 (2p + |l| + 1)}, \quad (23)$$

$$\langle y_t \rangle^R = - \frac{Q_{t,j}^R}{1 + \left(\frac{Q_{t,j}^R}{w_0}\right)^2 (2p + |l| + 1)} l. \quad (24)$$

折射光束质心偏移量的数值计算与解析结果对比如图 6 所示, 拓扑荷 $l = 0, 1, 3, 5$. 同前面反射光束的情形类似, 质心偏移量随着入射角从 $\theta_c - 0.25^\circ$ 逐渐变化到 θ_c 而增大, 无论是纵向还是横向的偏移量都随着 l 的增加而增大; 当 $l = 0$ 时, 只存在纵向偏移. 当入射角不非常接近临界角时, 数值计算与解析计算结果符合的较好; 但是当入射角 θ_i 接近于临界角 θ_c , 数值计算和解析结果出现明显偏差, 这是由解析推导过程中采用的近似引起的. 由于反射系数在临界角附近随入射角迅速变化, 只保留展开级数的零阶和一阶项而忽略高阶项, 解析结果出现偏差.

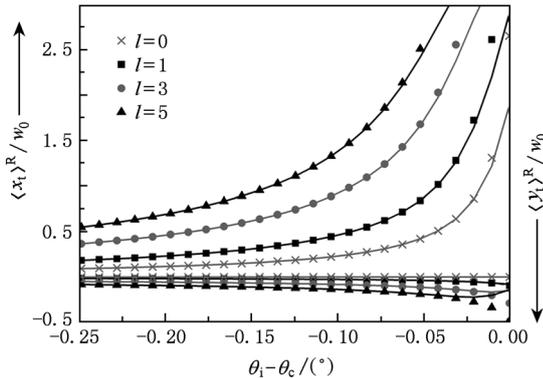


图 6 折射涡旋光束质心偏移量的数值计算(实线)与解析计算(标记符)结果对比, 光束的拓扑荷依次取 0, 1, 3, 5

5. 讨 论

从前面的数值结果与解析结果的比较可以看出, (17)–(20)式, (23)式, (24)式都是基于这样的前提才成立: 光束束腰半径足够大, 且入射角不非常接近临界角. 事实上, 本文是对傍轴光束进行的研究, 傍轴参数 $\alpha_0 = (k_1 w_0)^{-1} \ll 1$, 也就是光束的束腰半径远远大于波长. 当入射角 θ_i 接近于临界角 θ_c , 但仍小于 θ_c (部分反射) 或大于 θ_c (全反射) 时, 偏移量变得越来越大. 而当 $\theta_i \rightarrow \theta_c$ 时, 以上各偏移表达式的结果不再适用. 因为在 $\gamma_0 = k_1 \sin \theta_i$ 附

近作泰勒级数展开时就无形中假定光波的空间频谱集中于中心入射角谱附近, 对光场复振幅进行傅里叶变换时, 其中一部分光的频谱将会越过临界角, 不再是仅仅发生部分反射或者全反射, 计算解析公式(17)–(20)式, (23)式, (24)式中的重要因子 $Q_{r(t),j}^R$ 的前提条件已经被破坏. 观察 $Q_{r(t),j}^R$ 的表达式, 可以写成 $Q^{(t)}/k_1$ 的形式, 只要入射角不非常接近临界角, 则 $Q^{(t)}$ 不趋向于无穷大. 这样, 光束质心的偏移计算公式(17), (18)式, (23)式, (24)式可简化为

$$\langle x_r \rangle^R = - \frac{z_r}{z_{R_1}} Q_{r,j}^R (2p + |l| + 1), \quad \langle y_r \rangle^R = l Q_{r,j}^R, \quad (25)$$

$$\langle x_t \rangle^R = \frac{z_t}{\eta z_{R_2}} Q_{t,j}^R (2p + |l| + 1), \quad \langle y_t \rangle^R = - l Q_{t,j}^R. \quad (26)$$

不难发现, 无论反射还是折射光束的纵向偏移都与纵向坐标 z_a 成正比, $a = r, t$, 它们可以看作是光束质心相对于光轴的微小角偏移, 对应的发散角由 $\langle x_a \rangle^R = z_a \delta_a^l$ 给出, 即

$$\delta_r^l = - \frac{Q_{r,j}^R}{z_{R_1}} (2p + |l| + 1),$$

$$\delta_t^l = \frac{Q_{t,j}^R}{\eta z_{R_2}} (2p + |l| + 1). \quad (27)$$

而横向偏移则是与 z_a 无关的线偏移, 为了便于描述, 在后面的讨论中用 Δ_a^l 来表示反射或折射涡旋光束的横向偏移.

在部分反射区域, 非涡旋光束经过反射和折射后会在纵向产生 GH 角偏移, 其偏移量通常可以表示为^[3, 4]

$$\delta_r^0 = - \frac{k_1}{z_{R_1}} Q_{r,j}^R,$$

$$\delta_t^0 = \frac{k_1}{\eta z_{R_2}} Q_{t,j}^R. \quad (28)$$

经过比较, 我们发现对于 LG 光束入射的情形, 反射和折射光束质心的线偏移 Δ_a^l 和角偏移 δ_a^l 可以通过(28)式表示:

$$\Delta_a^l = - l \xi_a \frac{z_{R_1}}{k_1} \delta_a^0, \quad (29)$$

$$\delta_a^l = (2p + |l| + 1) \frac{\delta_a^0}{k_1}. \quad (30)$$

其中, $\xi_r = 1, \xi_t = n_2 \eta / n_1$. (29)式, (30)式将 LG 光束的质心偏移与非涡旋光束的 GH 角偏移联系起

来,前者与后者具有良好的线性关系,线性因子与光束的拓扑荷有关.从这个结果可以更加清晰地看出轨道角动量对 LG 光束质心偏移的上述影响.值得注意的是,这和 Bliokh^[27]得到的结果在形式上是一致的,不过我们的结果包含了光束的径向节点数的影响,这将为利用反射和折射测量 LG 光束 p 和 l 指数提供一种可能的方法.

6. 结 论

本文以傍轴线偏振 LG 光束在两种各向同性介质界面的反射和折射为轴线,针对光束的轨道角动量对质心偏移的影响进行了研究.首先,在圆柱坐标系下求解线偏振 LG 光束反射和折射电场矢量,计算直接简洁,得到的反射光束电场矢量(13)式从两部分描述部分反射和全反射时质心偏移的直接成因,相对于笛卡尔坐标系下笼统的表达式,其物理意义更加清晰明了.其次,在电场矢量的基础上进一步得到质心偏移的解析表达式,同时对未作菲涅耳近似处理的电场矢量((8)式和(21)式)进行数值积分得到质心偏移的数值模拟结果.经过比较发现,当入射光束腰半径足够大,且入射角不非常

接近临界角时,解析公式与数值结果相符合.研究表明:

1. 部分反射时,偏移公式可归结为(25)式和(26)式,横向偏移的大小与光束的拓扑荷成正比,方向由拓扑荷的符号决定;而纵向偏移仅仅大小与光束的拓扑荷有关;无论是纵向还是横向的偏移量都随着入射角接近临界角而增大.

2. 全反射时,横向偏移与 GH 线位移的经典表达式一致,此时反射光强质心偏移不受拓扑荷影响.

在本文所考虑的傍轴条件下,LG 模构成傍轴波动方程解的一组正交完备基,任何光场分布都可以按这组基底展开.因此,本文以 LG 光束为代表进行的研究可以推广到其他涡旋光束.此外,本文建立了 LG 光束经过反射和折射的质心偏移与非涡旋光束 GH 角偏移的线性关系,考虑到目前已实现对 GH 角偏移的测量,因此可通过测量 LG 光束的质心偏移来确定光束的径向节点数和拓扑荷,拓扑荷的测定对利用涡旋光束进行信息编码和传输具有重要意义^[28, 29].本文得到的随传播明显变化的质心偏移在量子信息技术中的光子态操纵等方面也具有潜在的应用价值.

- [1] Horowitz B R, Tamir T 1971 *J. Opt. Soc. Am.* **61** 586
- [2] Chan C C, Tamir T 1987 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 655
- [3] Bliokh K Y, Bliokh Y P 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066609
- [4] Aiello A, Woerdman J P 2008 *Opt. Lett.* **33** 1437
- [5] Merano M, Aiello A, van Exter M P, Woerdman J P 2009 *Nat. Photonics* **3** 337
- [6] Goos F, Hänchen H 1947 *Ann. Phys.* **1** 333
- [7] Fedorov F I 1955 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **105** 465
- [8] Imbert C 1972 *Phys. Rev. D* **5** 787
- [9] Bliokh K Y, Bliokh Y P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 073903
- [10] Hosten O, Kwiat P 2008 *Science* **319** 787
- [11] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [12] Allen L, Padgett M J, Babiker M, Wolf E 1999 "The Orbital Angular Momentum of Light" in *Prog. Optics* **39** 291
- [13] Maleev I D, Swartzlander J G A 2003 *J. Opt. Soc. Am. B* **20** 1169
- [14] He H, Friese M E J, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 826
- [15] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A 2001 *Nature* **412** 313
- [16] Wu J Z, Li Y J 2007 *Chin. Phys.* **16** 1334
- [17] Fedoseyev V G 2001 *Opt. Commun.* **193** 9
- [18] Okuda H, Sasada H 2006 *Opt. Express* **14** 8393
- [19] Okuda H, Sasada H 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 881
- [20] Fedoseyev V G 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2527
- [21] Aiello A, Merano M, Woerdman J P 2009 *Phys. Rev. A: At. Mol. Opt. Phys.* **80** 061801
- [22] Aiello A, Woerdman H 2007 *ArXiv* **0710** 1643v2
- [23] Allen L, Lembessis V E, Babiker M 1996 *Phys. Rev. A* **53** R2937
- [24] Goodman J W 1996 *Introduction to Fourier optics* 2nd (New York: McGraw-Hill)
- [25] Jeffrey A, Zwillinger D 2000 *Table of Integrals, Series, and Products* 6th (New York: Academic Press)
- [26] Antar Y M, Boerner W M 1974 *Can. J. Phys.* **52** 962
- [27] Bliokh K Y, Shadrivov I V, Kivshar Y S 2009 *Opt. Lett.* **34** 389
- [28] Li F, Jiang Y S, Tang H, Wang H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6202 (in Chinese) [黎芳、江月松、唐华、王海洋 2009 物理学报 **58** 6202]
- [29] Li F, Tang H, Jiang Y S, Ou J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014204 (in Chinese) [黎芳、唐华、江月松、欧军 2011 物理学报 **60** 014204]

Shifts of beam centroid of Laguerre-Gaussian beams reflected and refracted at a dielectric interface^{*}

Ou Jun[†] Jiang Yue-Song Li Fang Liu Li

(School of Electronic and Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China)

(Received 5 November 2010; revised manuscript received 22 December 2010)

Abstract

We study shifts of the beam centroid of linearly polarized paraxial Laguerre-Gaussian beams reflected and refracted at an interface of isotropic dielectric in the cylindrical coordinate system. According to the Fresnel approximation and the Taylor series expansion, we derive analytical expressions for transverse and longitudinal shifts and their general relationship with topological charge in the cases of partial and total reflection, respectively. It is shown that in the partial reflection regime, transverse shifts of both reflected and refracted beams are in proportion to the topological charge of beams and their directions are determined by the sign of the topological charge, while only the value of longitudinal shift is related to the topological charge. In the regime of total reflection, the shift of reflected beam centroid is independent of topological charge. To verify our analytical results, we perform numerical simulations of the shifts of reflected and refracted beams directly and indicate the applicable condition of the analytical expressions. The shifts of the beam centroid can be applied to the measurement of the topological charge and radial node number of Laguerre-Gaussian beams, which is of significance for information encoding and communication.

Keywords: Laguerre-Gaussian beams, transverse shifts, longitudinal shifts, topological charge

PACS: 42.25.-p, 41.20.Jb, 42.25.Gy, 42.50.Tx

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB707001).

[†] E-mail: jun.oushine@gmail.com