

# $k$ 光子 Jaynes-Cummings 模型与运动原子相互作用中的熵交换及纠缠\*

王继成 廖庆洪 王月媛 王跃科 刘树田†

(哈尔滨工业大学物理系, 哈尔滨 150001)

(2010年10月10日收到; 2011年2月26日收到修改稿)

文章研究了  $k$  光子 Jaynes-Cummings 模型与运动原子相互作用中的熵相互关系及纠缠特性. 发现原子与光场之间具有熵交换特性. 讨论了原子运动、光子数  $k$  和场模结构等因素对原子与光场熵相互关系的影响. 此外, 讨论了原子与场系统熵交换与纠缠之间的关系.

**关键词:** 熵交换, 纠缠, Jaynes-Cummings 模型, 原子运动

**PACS:** 42.50.-p, 03.67.-a, 03.67.Mn

## 1. 引言

量子纠缠和非局域关系是量子力学中非常重要的概念, 在量子信息各个领域都有着广泛的应用. 量子光学和量子信息处理中的很多问题, 如量子信息理论<sup>[1]</sup>、量子计算<sup>[2]</sup>、量子密码术<sup>[3]</sup>、量子纠错<sup>[4]</sup>等都需要借助量子纠缠来实现. 由于去相干作用影响, 人们通常很难得到和维持纯态的纠缠. 因此, 目前对混合态纠缠给与更多的关注<sup>[5-7]</sup>. 近10年来, 量子熵用来度量两体系统纠缠程度. Phoenix等<sup>[8,9]</sup>、Gea-Banacloche<sup>[10,11]</sup>、方卯发等<sup>[12-17]</sup>研究了 Jaynes-Cummings (JC) 模型在各种条件下原子与光场耦合系统的纠缠及熵特性. 若初始时刻原子和光场均处于纯态, von Neumann 熵随时间演化反映光场与原子关联程度, 熵值的大小反映光场与原子的纠缠程度<sup>[18,19]</sup>. 实际中, 原子往往具有多个能级, 将 JC 模型推广到三能级或其他模型是十分必要的<sup>[20-22]</sup>. 然而, 上述这些研究均未考虑原子运动的影响. 已有的研究 JC 模型等结构原子运动文献<sup>[23-26]</sup>表明, 原子运动将会导致 von Neumann 熵做周期性的演化, 通过控制原子的运动速度、光场的初始态等参数, 可以对周期性纠缠进行操控. 另一方面, Boukobza 等<sup>[27]</sup>发现 JC 模型中存在原子与场熵之

间的相互关系及熵交换现象. 随后, 人们陆续研究了其他模型及场模结构<sup>[28-31]</sup>, 发现了熵相互关系及熵交换现象. 本文以运动  $k$  光子 JC 模型为对象, 研究其原子熵、光场熵及运动原子与场相互作用的纠缠的演化, 发现原子熵与场熵之间存在相互关联关系. 当原子处于基态时, 原子与场熵之间出现熵交换特性. 并讨论原子初始状态、光子数  $k$ 、原子运动及场模结构等条件对原子与光场熵相互关系的影响.

## 2. 运动 $k$ 光子 JC 模型及理论

JC 模型<sup>[32]</sup>是描述二能级原子与量子光场相互作用的最简单模型, 它在旋转波近似下可以精确求解. 随着实验技术的发展, 人们对多光子 JC 模型给予了越来越多的关注<sup>[33,34]</sup>.

本文考虑运动的二能级原子与光场通过  $k$  光子过程发生相互作用, 即运动  $k$  光子 JC 模型系统. 在旋转波近似下, 系统的哈密顿量可以表述为

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

$$H_0 = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z, \quad (2)$$

$$H_1 = \hbar g f(z) (\sigma_+ a^k + a^{\dagger k} \sigma_-), \quad (3)$$

其中,  $\omega$  是原子的跃迁频率,  $\nu$  是光场的频率,  $a^\dagger$  和  $a$  分别是光场的产生算符和湮灭算符,  $g$  为光场和

\* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB301801) 和国家自然科学基金 (批准号: 10974039) 资助的课题

† 通讯联系人. E-mail: stliu@hit.edu.cn

原子的耦合常数,  $\sigma_z$  是原子的泡利算符,  $\sigma_+$  和  $\sigma_-$  是原子的跃迁算符.  $f(z)$  为场模原子运动形式函数. 假设在原子寿命时间内不发生碰撞, 取原子与光场发生作用的时间和位置为计时起点, 场模的原子运动可以写为<sup>[35]</sup>

$$f(z) \rightarrow f(vt), \quad (4)$$

式中  $v$  为原子运动速度. 为了讨论方便, 定义 TE<sub>mmp</sub> 模为

$$f(vt) = \sin(p\pi vt/L), \quad (5)$$

式中  $p$  为场模的半波长数,  $L$  为腔长.

设  $t=0$  时刻, 原子初态为基态  $|g\rangle$  和激发态  $|e\rangle$  的任意叠加的混合态

$$\rho_f(0) = P_e |e\rangle\langle e| + (1 - P_e) |g\rangle\langle g|, \quad (6)$$

式中  $0 \leq P_e \leq 1$ .  $P_e = 0$  表示原子初始为基态,  $P_e = 1$  表示原子初始为激发态,  $P_e = 0.5$  表示原子初始为最大混合态. 辐射场的初态为单模热态

$$\rho_f(0) = \sum_0^\infty P_n |n\rangle\langle n|, \quad (7)$$

$$P_n = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\bar{n}}{n+1} \right)^n,$$

式中  $\bar{n} = [\exp(h\omega/k_B T) - 1]^{-1}$  为热平衡下光场初始的平均光子数,  $\omega$  为光模的频率.

初始时刻原子-光场耦合系统的密度矩阵为

$$\rho_{af}(0) = \rho_a(0) \otimes \rho_f(0)$$

$$= P_a \sum_0^\infty P_n |n, e\rangle\langle n, e| + (1 - P_a) \sum_0^\infty P_n |n, g\rangle\langle n, g|. \quad (8)$$

在相互作用绘景中, 任意  $t$  时刻原子-光场耦合系统的密度矩阵为

$$\rho_{af}(t) = e^{-iH_f t} \rho_{af}(0) e^{iH_f t}. \quad (9)$$

将(3), (8)式代入(9)式, 可以得到密度矩阵随时间演化的解

$$\rho_{af}(t) = \sum P_n \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

密度矩阵的元素为

$$\rho_{11} = P_e \cos^2(\Omega_n \theta(t)) |n\rangle\langle n| + (1 - P_e) \sin^2(\Omega_{n-1} \theta(t)) |n-1\rangle\langle n-1|,$$

$$\rho_{22} = P_e \sin^2(\Omega_n \theta(t)) |n+1\rangle\langle n+1| + (1 - P_e) \cos^2(\Omega_{n-1} \theta(t)) |n\rangle\langle n|, \quad (11)$$

$$\rho_{12} = i(P_e \sin(\Omega_n \theta(t)) \cos(\Omega_n \theta(t)) |n\rangle\langle n+1| - (1 - P_e) \sin(\Omega_{n-1} \theta(t)) \times \cos(\Omega_{n-1} \theta(t)) |n-1\rangle\langle n|) = \rho_{21}^*,$$

式中

$$\Omega_n = g \sqrt{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad (12)$$

$$\theta(t) = \int_0^t f(vt') dt' = \frac{L}{p\pi v} \left[ 1 - \cos\left(\frac{pv\pi t}{L}\right) \right]. \quad (13)$$

若选择原子的运动速度为  $v = gL/\pi$ , 则有

$$\theta(t) = \frac{1}{pg} [1 - \cos(pgt)]. \quad (14)$$

### 3. 数值计算与理论分析

利用上述结论可以计算原子与光场的熵. 量子系统的熵由 von Neumann 熵表示, 由原子(场)约化密度矩阵, 得到量子系统的原子(场)熵为

$$S_{a(f)} = -\text{Tr}(\rho_{a(f)} \ln \rho_{a(f)}). \quad (15)$$

上式原子(光场)约化密度矩阵可由对总量子系统的场(原子)求迹得到, 表示为

$$\rho_{a(f)} = -\text{Tr}_{f(a)}(\rho_{af}). \quad (16)$$

将(10), (11), (16)式代入(15)式, 可以得到原子和场熵表达式

$$S_a(t) = -(\lambda_a^1(t) \ln \lambda_a^1(t) + \lambda_a^2(t) \ln \lambda_a^2(t)),$$

$$S_f(t) = -\lambda_f(t) \ln \lambda_f(t). \quad (17)$$

式中

$$\lambda_a^1(t) = \sum P_e P_n \cos^2(\Omega_n \theta(t)) + \sum (1 - P_e) P_{n+1} \sin^2(\Omega_n \theta(t)),$$

$$\lambda_a^2(t) = \sum P_e P_{n-1} \sin^2(\Omega_{n-1} \theta(t)) + \sum (1 - P_e) P_n \sin^2(\Omega_{n-1} \theta(t)),$$

$$\lambda_f(t) = \sum P_e P_n \cos^2(\Omega_{n-1} \theta(t)) + \sum (1 - P_e) P_{n+1} \sin^2(\Omega_n \theta(t)) + \sum P_e P_{n-1} \sin^2(\Omega_{n-1} \theta(t)) + \sum (1 - P_e) P_n \sin^2(\Omega_{n-1} \theta(t)). \quad (18)$$

现在考虑运动  $k$  光子 JC 模型的纠缠计算. 一般两体混合态形成纠缠度的计算相当困难, 至今没有普遍有效的方法<sup>[36]</sup>. 为了计算两量子比特混合态的形成纠缠, Wootters 等<sup>[37, 38]</sup>提出了 concurrence 纠缠度的概念. 对于一个  $2 \times 2$  的系统, concurrence 为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (19)$$

式中  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ ,  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为矩阵  $R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}$  的平方根,  $\tilde{\rho}$  为“自旋翻转”矩阵, 定义为

$$\tilde{\rho} \equiv \sigma_2 \otimes \sigma_2 \rho^* \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (20)$$

式中  $\sigma_2$  为 Pauli 矩阵,  $\rho^*$  为  $\rho$  的复共轭.

对于由密度矩阵  $\rho_{af}(t)$  表示的原子与光场耦合系统,通过对每个量子态  $|n\rangle_f$  投影,可以把(10)式表示的  $2 \times 2$  系统的密度矩阵  $\rho_{af}(t)$  扩展到  $|n-1\rangle_f$  和  $|n+1\rangle_f$  子空间得到一个  $4 \times 4$  矩阵,表示为<sup>[39]</sup>

$$\rho_{af}^n(t) = \begin{pmatrix} C_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_n & D_n & 0 \\ 0 & D_n^* & S_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} C_n &= P_e P_n \cos^2(\Omega_n \theta(t)) \\ &\quad + (1 - P_e) P_{n+1} \sin^2(\Omega_n \theta(t)), \\ S_n &= P_e P_n \sin^2(\Omega_n \theta(t)) \\ &\quad + (1 - P_e) P_{n+1} \cos^2(\Omega_n \theta(t)), \\ D_n &= iP_e P_n \sin(\Omega_n \theta(t)) \cos(\Omega_n \theta(t)) \\ &\quad - i(1 - P_e) P_{n+1} \sin(\Omega_n \theta(t)) \\ &\quad \times \cos(\Omega_n \theta(t)). \end{aligned} \quad (22)$$

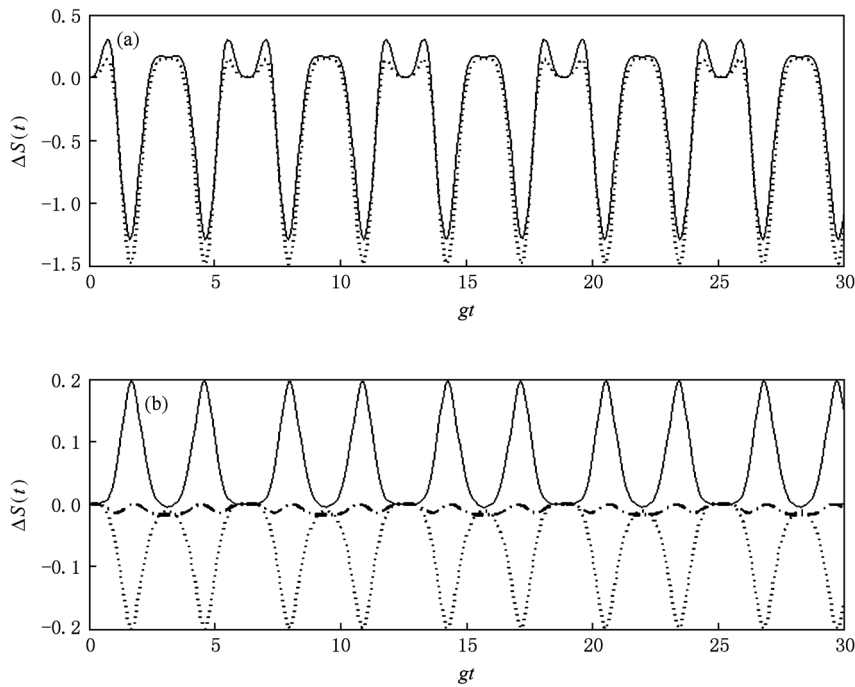


图1 场初始为弱激发热光场,光子数  $k=2$ ,平均光子数  $\bar{n}=0.1$ ,原子运动  $p=1$  时  $k$  光子 JC 模型中  $\Delta S = S(t) - S(0)$  熵交换 (a)原子初始为激发态;(b)原子初始为基态 (图中实线为原子熵,虚线为场熵,点-实线为原子与场的熵交换)

这样,(21)式表示的密度矩阵  $\rho_{af}^n(t)$  的 concurrence 纠缠度可以表示为<sup>[40]</sup>

$$C^n(\rho) = 2\max[0, |D_n| - \sqrt{C_{n-1}S_{n+1}}]. \quad (23)$$

由上式,考虑矩阵(21)式所有的量子态  $|n\rangle_f$ ,可以得到  $\rho_{af}(t)$  的最小 concurrence 纠缠度.

(17)式确定的熵通过数值计算与图像法,可得原子熵  $\Delta S_a(t) = S_a(t) - S_a(0)$  和光场熵  $\Delta S_f(t) = S_f(t) - S_f(0)$  随时间演化,进而得到原子与场熵之和  $\Delta S(t) = \Delta S_a(t) + \Delta S_f(t)$  随时间的演化.图1讨论了光子数  $k=2$  时  $k$  光子 JC 模型中原子熵、场熵及  $\Delta S(t)$  的时间演化.从图1(a)中可以看出,当原

子初始处于激发态,原子熵和场熵演化具有规则的周期性,原子熵和场熵同时增大或减小,随时间做相同规律的演化,但熵值大小不完全相同.当原子初始处于基态,原子熵和场熵做周期相同的演化,增大或减小的趋势相反,原子和场熵呈现明显的反对称,原子和场熵之和  $\Delta S(t)$  值几乎为零,即原子和场之间发生熵交换(如图1(b)).

图2和图3显示  $k$  取 3,4 时  $k$  光子 JC 模型中原子熵、场熵及  $\Delta S(t)$  随时间的演化.随着  $k$  的增大,当原子处于激发态时,原子熵和场熵的起伏越来越剧烈,原子和场熵值缓慢减小,两者的熵值差

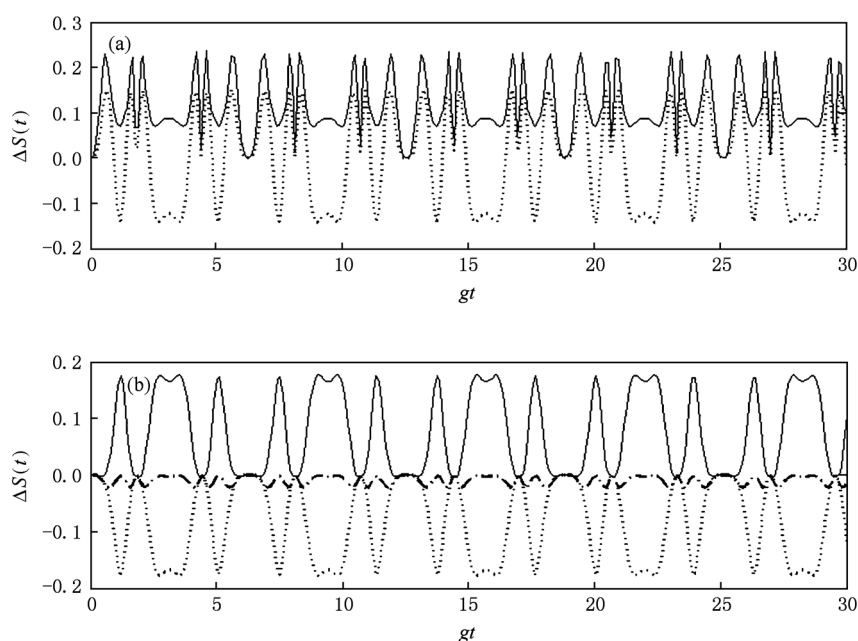


图2 场初始为弱激发热光场,光子数  $k=3$ ,平均光子数  $\bar{n}=0.1$ ,原子运动  $p=1$  时  $k$  光子 JC 模型中熵  $\Delta S=S(t)-S(0)$  随时间演化 (a)原子初始为激发态;(b)原子初始为基态 (图中实线为原子熵,虚线为场熵,点-实线为原子与场的熵交换)

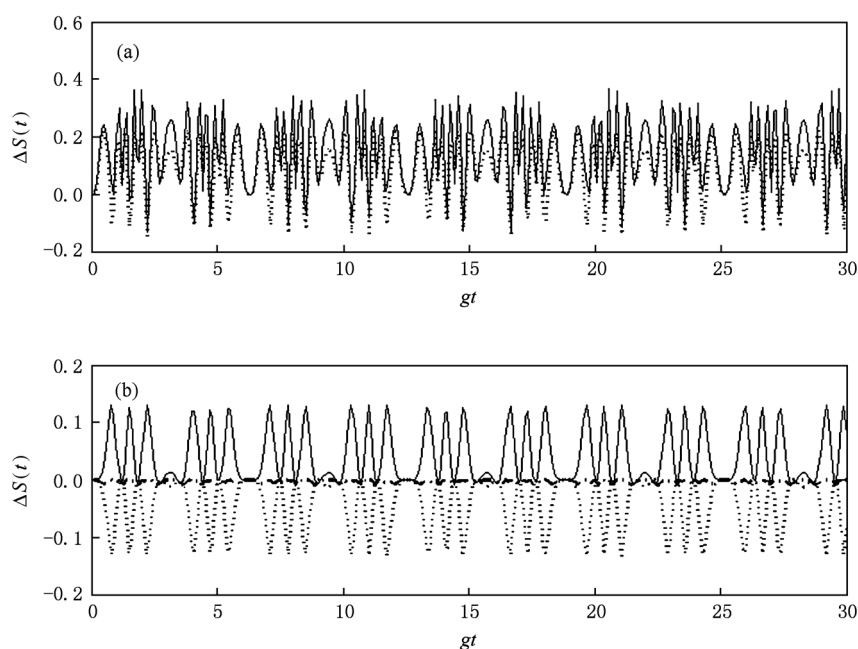


图3 场初始为弱激发热光场,光子数  $k=4$ ,平均光子数  $\bar{n}=0.1$ ,原子运动  $p=1$  时  $k$  光子 JC 模型中熵  $\Delta S=S(t)-S(0)$  随时间演化 (a)原子初始为激发态;(b)原子初始为基态 (图中实线为原子熵,虚线为场熵,点-实线为原子与场的熵交换)

逐渐变大,原子熵和场熵随时间  $t$  仍做变化趋势相同、周期不变的周期演化(如图 2(a)和图 3(a)).

当原子处于基态时,随着  $k$  的增大,原子熵和场熵的起伏越来越剧烈,原子和场熵值缓慢减小,原子熵和场熵仍做周期相同的反对称演化,原子和场熵仍存在熵交换特性(如图 2(b)和图 3(b)).可以看出,  $k$  增大不会破坏原子和场的熵交换特性.而当平均光子数  $\bar{n} \geq 1$  时,原子-场耦合系统快速崩塌为纯态不再复原,此时原子和场之间不再出现

熵交换现象.

图 4 所示为  $k$  一定( $k=4$ )时原子熵、场熵及  $\Delta S(t)$  随原子运动参数  $p$  增大的时间演化.从图 4 中可以看出,随着  $p$  增大,原子熵和场熵的起伏逐渐变缓,原子和场熵值逐渐减小,原子熵和场熵仍做周期相同的反对称演化,原子和场仍存在熵交换特性,但熵交换的效果逐渐变差.

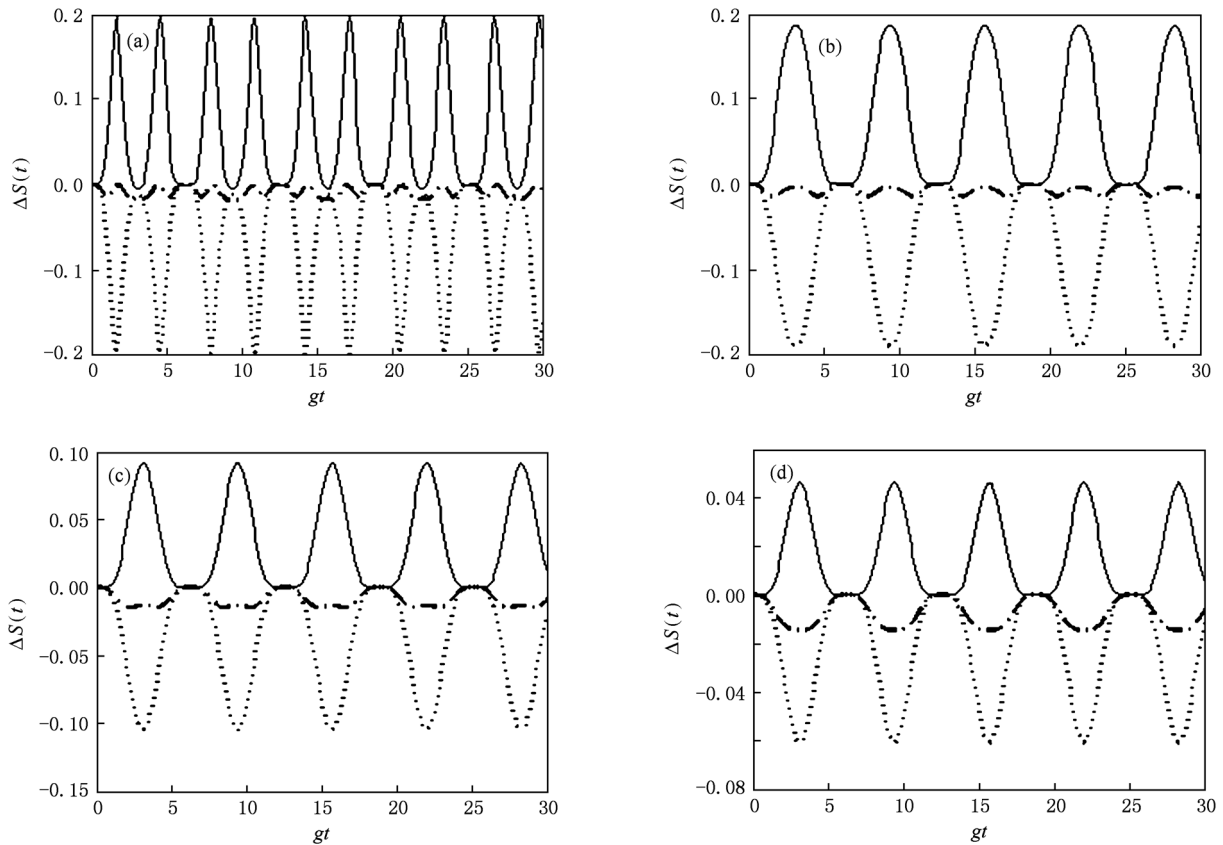


图 4 原子初始为基态,场初始为弱激发热光场,光子数  $k=4$ ,平均光子数  $\bar{n}=0.1$  时  $k$  光子 JC 模型熵  $\Delta S=S(t)-S(0)$  随时间演化 (a) $p=1$ ; (b) $p=2$ ; (c) $p=3$ ; (d) $p=4$  (图中实线为原子熵,虚线为场熵,点-实线为原子与场的熵交换)

图 5 所示为  $k$  光子 JC 模型系统的 concurrence 纠缠度的时间演化.从图 5(a)和(b)可以看出,无论原子处于基态或激发态,concurrence 纠缠度都做与原子熵、场熵相同周期的演化.原子处于激发态时的最大纠缠度为 0.3209,对应图 1(a),此时原子和场熵具有相同的演化趋势,原子与场熵和  $\Delta S(t)$  出现极大值.当原子处于基态时的最大纠缠度仅为 0.02662,趋近于零,对应图 1(b),此时原子和场熵

具有反对称关系,原子与场熵和  $\Delta S(t)$  值趋近于零,原子与场系统出现熵交换特性,系统的 concurrence 纠缠度与原子与场系统熵演化之间相互关联,concurrence 纠缠值逐渐增大时,原子与场熵之间变换逐渐趋近相同,做相同的变化;而当 concurrence 纠缠值逐渐趋近于零时,原子与场熵之间呈现反对称关系,即出现熵交换特性.

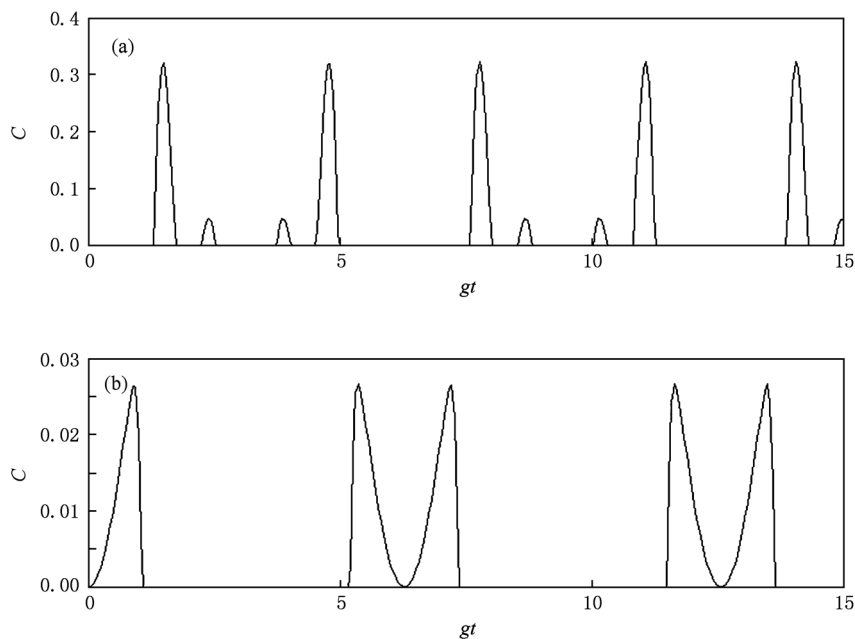


图5 场初始为弱激发热光场,光子数  $k=2$ ,平均光子数  $\bar{n}=0.1$ ,原子运动  $p=1$  时  $k$  光子 JC 模型中 concurrence 纠缠度 (a)原子初始为激发态;(b)原子初始为基态(图中实线为原子熵,虚线为场熵,点-实线为原子与场的熵交换)

## 4. 结 论

本文运用运动  $k$  光子 JC 模型原子与光场系统的密度矩阵,全量子熵及 concurrence 纠缠度理论,研究了  $k$  光子 JC 模型与运动原子相互作用中熵相互关系及纠缠演化规律.结果表明,当原子处于基态时,原子与场熵之间具有反对称关系,即出现熵交换特性.当原子处于激发态时,原子与场熵具有

相同的变化趋势,原子与场熵随时间演化具有良好的周期性.改变光子数  $k$ 、原子运动参数  $p$  及场模结构等初始条件不会改变熵的演化周期,仅影响原子与场熵起伏及原子与场熵交换的程度.原子熵与场熵值随光子数  $k$  和原子运动参数  $p$  的增大而逐渐减小,原子与场系统熵交换的程度随光子数  $k$  和原子运动参数  $p$  的增大而逐渐变差.此外,通过研究系统的 concurrence 纠缠度,发现纠缠与原子与场系统熵之间存在相互关系.

- [1] Keyl M 2002 *Phys. Rep.* **369** 431
- [2] Galindo A, Martin D M A 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 347
- [3] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [4] Peres A, Terno D R 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 93
- [5] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [6] Vedral V, Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619
- [7] Bennett C H, Divicenzo D P, Smolin J A, Wootters W K 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
- [8] Phoenix S J D, Knight P L 1988 *Ann. Phys.* **186** 381
- [9] Phoenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
- [10] Gea-Banaclache J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 3385
- [11] Gea-Banaclache J 1991 *Phys. Rev. A* **44** 5913
- [12] Fang M F, Zhou P 1996 *Physica A* **234** 571
- [13] Fang M F, Liu X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 0435 (in Chinese) [方卯发,刘翔 2000 物理学报 **49** 0435]
- [14] Liu X, Fang M F 2002 *Chin. Phys.* **11** 0926
- [15] Li C X, Fang M F 2003 *Chin. Phys.* **12** 0294
- [16] Zeng K, Fang M F 2005 *Chin. Phys.* **14** 2009
- [17] Ouyang X C, Fang M F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030309
- [18] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, Schumacher B 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2046
- [19] Popescu S, Rohrlich D 1997 *Phys. Rev. A* **56** R3319
- [20] Bužek V, Hladký B 1993 *J. Mod. Opt.* **40** 1309
- [21] Bashkurov E K, Rusakova M S 2008 *Opt. Commun.* **281** 4380
- [22] Mahmoud A A, Abd Al-Kader G M, Obada A S F 2001 *Chaos, Sol. & Frac.* **12** 2455
- [23] Fang M F 1994 *Physica A* **204** 193

- [24] Abdalla M S, Obada A S F, Abdel-Khalek S 2008 *Chaos, Sol. & Frac.* **36** 405
- [26] Liu X J, Zhou Y J, Fang M F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1674
- [27] Boukobza E, Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 063821
- [28] Yan X Q, Shao B, Zou J 2008 *Chaos, Soli. & Frac.* **37** 835
- [29] Xiang Y, Xiong S J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 014306
- [30] Hou X W, Chen J H, Wan M F, Ma Z Q 2009 *J. Phys. A* **42** 075301
- [31] Zhang J, Shao B, Zou J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1463
- [32] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [33] Font J L, Fernandez-Soler J J, Vilaseca R, Gauthier D J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063810
- [34] Kuang L M, Chen X, Ge M L 1995 *Phys. Rev. A* **52** 1857
- [35] Sargent Jr M, Scully M O, Lamb W E Jr 1974 *Laser Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley)
- [36] Virmani S, Plenio M B 2000 *Phys. Lett. A* **268** 31
- [37] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [38] Hill S, Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022
- [39] Bose S, Fuentes-Guridi I, Knight P L, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 050401
- [40] Yu T, Eberly J H 2007 *Quant. Inf. Comput.* **7** 459

## Entropy exchange and entanglement of a moving atom with $k$ -photon Jaynes-Cummings model\*

Wang Ji-Cheng Liao Qing-Hong Wang Yue-Yuan Wang Yue-Ke Liu Shu-Tian<sup>†</sup>

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 10 October 2010; revised manuscript received 26 February 2011)

### Abstract

The entropy correlation and the entanglement of a moving atom interacting with  $k$ -photon Jaynes-Cummings model are investigated. Entropy exchange between atomic and field subsystems, which is a form of anti-correlated behavior, is explored. Analytical results show that atomic motion, transition number  $k$  of field and field-mode structure can influence the entropy exchange between atom and light field. Moreover, the relationship between entropy correlations and entanglement is also discussed.

**Keywords:** entropy exchange, entanglement, Jaynes-Cummings model, atomic motion

**PACS:** 42.50.-p, 03.67.-a, 03.67.Mn

\* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB301801) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974039).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: stliu@hit.edu.cn