

远场模型方程的同伦近似对称约化*

焦小玉†

(南京财经大学应用数学学院, 南京 210046)

(上海交通大学物理系, 上海 200240)

(2011年1月28日收到; 2011年8月17日收到修改稿)

以同伦近似对称法为理论依据研究了远场模型方程, 通过归纳各阶相似约化解和各阶相似约化方程的通式构造相应的同伦级数解. 各阶相似约化方程均为线性变系数常微分方程, 并且可以从零阶开始依次求解. 同伦模型中的辅助参数影响同伦级数解的收敛性.

关键词: 同伦近似对称法, 远场模型方程, 同伦级数解

PACS: 02. 20. Hj, 02. 30. Jr

1. 引言

产生于自然科学和工程技术众多领域中的非线性方程通常难以构造精确解. 李群理论^[1-3]考虑微分方程在李群变换下的不变性, 使微分方程的维数降低以构造群不变解, 这对微分方程的研究有重要意义. 尽管非线性方程精确解的研究不断取得进步, 但是很多精确解不能真正反映问题的本质, 近似解的研究仍不可替代. 摄动方法^[4-6]用来构造扰动微分方程的近似解析解, 这些近似解往往更有实用价值.

近似对称法由摄动理论和李群理论相结合产生. 若将对称群的生成元写成摄动形式, 再考虑扰动微分方程在摄动形式对称群下的近似不变性, 则有 Baikov 等^[7]提出的近似对称法; 若利用因变量的摄动形式将扰动微分方程分解为一系列方程, 再研究这一系列方程的精确对称, 则有 Fushchich 等^[8]提出的近似对称法. 文献[9, 10]比较了两种近似对称方法, 得出第二种方法优于第一种方法的结论. 第二种近似对称法的进一步推广方法^[11-15]可以构造扰动微分方程的级数约化解.

摄动理论还可以与同伦思想相结合, 这就是同伦分析法^[16-21]. 其本质是化一个非线性问题为无穷多线性子问题, 对于摄动理论所不能解决的无扰

动问题, 该方法也是适用的. 而且, 由摄动方法、人工小参数法^[22]、 δ 展开法^[23]和 Adomian 分解法^[24]等非摄动方法求出的级数解能够由该方法重新求出.

受同伦分析法启发, 文献[25]将近似对称和同伦思想相结合提出了同伦近似对称法. 该方法与同伦分析法的本质区别在于同伦分析法将一个非线性问题转换为无穷多线性子问题, 而同伦近似对称法将一个非线性问题转换为无穷多非线性子问题. 该方法与近似对称法相比, 也具有同伦分析法相对于摄动方法的优势, 即应用范围更广, 所得结果也更加全面.

2. 同伦近似对称法的基本原理

同伦近似对称法的关键是构造合适的同伦模型. 对于非线性偏微分方程

$$A(u) = A(x, t, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (1)$$

可以引入一个同伦模型

$$H(u, q) = 0. \quad (2)$$

该同伦模型具有如下性质:

$$\begin{aligned} H(u, 0) &= H_0(u), \\ H(u, 1) &= A(u), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 A 是非线性算子, $u = u(x, t)$ 是未知函数, $\{x, t\}$ 是自变量, $q \in [0, 1]$ 是嵌入同伦参数,

* 国家自然科学基金(批准号: 10735030, 10905038, 11071109)资助的课题.

† E-mail: jiaoxxy@yahoo.com.cn

$H_0(u) = 0$ 是容易求解的微分方程.

假设同伦模型(2)有级数解

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i, \quad (4)$$

则(2)式可以分解为一系列方程. 对于 $O(q^0)$, 有

$$H_0(u_0) = 0; \quad (5a)$$

对于 $O(q^1)$, 有

$$H'_0(u_0)u_1 + F_1(u_0) = 0; \quad (5b)$$

对于 $O(q^2)$, 有

$$H'_0(u_0)u_2 + F_2(u_0, u_1) = 0; \quad (5c)$$

对于 $O(q^i)$, 有

$$H'_0(u_0)u_i + F_i(u_0, u_1, \dots, u_{i-1}) = 0. \quad (5d)$$

这里算子 $H'_0(u_0)$ 作用于任意函数 $f(x, t)$ 的表达式如下:

$$H'_0(u_0)f = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H_0(u_0 + \varepsilon f) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6)$$

并且, $F_i \equiv F_i(u_0, u_1, \dots, u_{i-1})$ 满足

$$F_i = \left. \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial q^i} H\left(\sum_{k \neq i} u_k q^k, q\right) \right|_{q=0} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

若利用对称方法求出了方程组(5)的相似约化解, 就可以得到原非线性方程(1)的同伦级数解

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \quad (7)$$

为运算简便, 同伦模型(2)通常取

$$(1 - q)H_0(u) + q\lambda A(u) = 0, \quad (8)$$

其中 $\lambda \neq 0$ 是辅助参数. 容易看出, 当 q 逐渐由 0 变到 1 时, (8) 式随之由 $H_0(u) = 0$ 逐渐变化到(1)式. 若取 H_0 为线性算子, 则(8) 式恰好是文献[16—21]中采用的同伦模型.

3. 远场模型方程的同伦近似对称约化

文献[26,27]中提出了远场模型方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - \gamma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) = 0, \quad (9)$$

以模拟可压缩弹性细杆中的小振幅(轴径向)形变波, 其中 $u(x, t)$ 表示相对于平衡位置的径向伸缩, 参数 γ 取值的范围是从 -29.5 到 3.41. 当 $\gamma = 1$ 时, 方程(9)即为描述浅水波的 Camassa-Holm 方程^[28], 当 $\gamma = 0$ 时, 方程(9)退化为 Benjamin-Bona-Mahony 方程(BBM 方程)^[29]——通道中的表面波模型.

方程(9)的同伦模型可以取如下形式:

$$\begin{aligned} & [1 + q(\lambda - 1)](u_t - u_{xxt} + 3uu_x) \\ & - q\lambda\gamma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

这是在同伦模型(8)式中取

$$H_0(u) = u_t - u_{xxt} + 3uu_x \quad (11)$$

而得到的. 容易看到, 当 $q = 0$ 时, 同伦模型(10)式恰好为 BBM 方程.

将假设的级数解(4)式代入同伦模型(10)式, 则关于 q 不同幂次的系数产生一系列方程(各阶近似方程)

$$\begin{aligned} & u_{k,t} - u_{k,xxt} + 3 \sum_{i=0}^k u_{k-i} u_{i,x} - \lambda\gamma \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1 - \lambda)^{k-1-i} \right. \\ & \left. \times \sum_{j=0}^i (2u_{i-j,x} u_{j,xx} + u_{i-j} u_{j,xxx}) \right] = 0 \\ & (k = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $u_{-1} = 0$. 在本文中, 所有下标为负值的量皆为零.

为研究(12)式的对称约化, 首先写出其线性化形式

$$\begin{aligned} & \sigma_{k,t} - \sigma_{k,xxt} + 3 \sum_{i=0}^k (\sigma_{k-i} u_{i,x} + u_{k-i} \sigma_{i,x}) \\ & - \lambda\gamma \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1 - \lambda)^{k-1-i} \sum_{j=0}^i (2\sigma_{i-j,x} u_{j,xx} \right. \\ & \left. + 2u_{i-j,x} \sigma_{j,xx} + \sigma_{i-j} u_{j,xxx} + u_{i-j} \sigma_{j,xxx}) \right] = 0 \\ & (k = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

这说明(12)式在变换 $u_k \rightarrow u_k + \varepsilon \sigma_k (k = 0, 1, \dots)$ 下是形式不变的, 其中 ε 是无穷小参数.

线性化方程(13)中的 σ_k 通常取为对称变换

$$\sigma_k = Xu_{k,x} + Tu_{k,t} - U_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (14)$$

其中 X, T 和 U_k 是关于 x, t 和 $u_k (k = 0, 1, \dots)$ 的函数, 其具体形式则通过(12)—(14)式中的有限个方程来确定.

若限定(12)—(14)式中 k 的最大值为 2, 则 X, T, U_0, U_1 和 U_2 的自变量也随之局限于 x, t, u_0, u_1 和 u_2 . 将(14)式代入(13)式, 然后利用(12)式消去 $u_{0,xxx}, u_{1,xxx}$ 和 $u_{2,xxx}$, 再令 u_0, u_1 和 u_2 的各阶导数的系数为零, 则可以得到 501 个决定方程.

为求解决定方程, 首先提取关于 T 和 X 的形式最简单的方程

$$T_x = T_{u_0} = T_{u_1} = T_{u_2} = X_{u_0} = X_{u_1} = X_{u_2} = 0.$$

由此解出 $T = T(t), X = X(x, t)$. 利用该条件化简所有决定方程, 再选取关于 U_0, U_1, U_2 的形式最简单的方程

$$\begin{aligned} U_{0,u_2} = U_{0,xu_1} = U_{0,tu_1} = U_{0,u_0u_0} \\ = U_{0,u_0u_1} = U_{0,u_1u_1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{1,xu_0} &= U_{1,xu_2} = U_{1,u_0u_0} = U_{1,u_0u_1} \\
 &= U_{1,u_0u_2} = U_{1,u_1u_1} = U_{1,u_1u_2} = U_{1,u_2u_2} = 0, \\
 U_{2,xu_0} &= U_{2,xu_1} = U_{2,u_0u_0} = U_{2,u_0u_1} \\
 &= U_{2,u_0u_2} = U_{2,u_1u_1} = U_{2,u_1u_2} = U_{2,u_2u_2} = 0.
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
 U_0 &= F_1(x,t)u_0 + Cu_1 + F_2(x,t), \\
 U_1 &= F_3(t)u_0 + F_4(x,t)u_1 + F_5(t)u_2 + F_6(x,t), \\
 U_2 &= F_7(t)u_0 + F_8(t)u_1 + F_9(x,t)u_2 + F_{10}(x,t),
 \end{aligned}$$

其中 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ 为所示变量的任意函数, C 为任意常数. 决定方程经过上述表达式化简后, 形式最简单的方程为

$$C = F_2 = F_5 = X_t = F_{1,x} = F_{4,x} = F_{5,t} = 0.$$

决定方程经过上述关系式进一步化简后, 继续提取最简方程

$$\begin{aligned}
 F_6 &= X_x = F_{1,t} = F_{3,t} = F_{4,t} = F_{8,t} \\
 &= F_{9,t} = F_{9,x} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

此时, 决定方程化为

$$\begin{aligned}
 F_3 &= F_7 = F_{10} = 0, \\
 F_1 + T_t &= 0, \\
 F_{7,t} + 3F_{10,x} &= 0, \\
 F_9 - T_t - 2F_4 &= 0, \\
 F_{10,xtt} - F_{10,t} &= 0, \\
 2F_1 - F_4 + T_t &= 0, \\
 F_1 + F_4 - F_9 + T_t &= 0, \\
 (\lambda - 1)(F_9 - 2F_1 - T_t) + 2F_3 - F_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

求解由 (15) 和 (16) 式确定的方程组, 可以得到决定方程的解

$$\begin{aligned}
 X &= C_3, \\
 T &= C_1t + C_2, \\
 U_0 &= -C_1u_0, \\
 U_1 &= -C_1u_1, \\
 U_2 &= -C_1u_2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

同样, 将 (12)–(14) 式中 k 的最大值限定为 3, 进行类似运算可得

$$\begin{aligned}
 X &= C_3, \\
 T &= C_1t + C_2, \\
 U_0 &= -C_1u_0, \\
 U_1 &= -C_1u_1, \\
 U_2 &= -C_1u_2, \\
 U_3 &= -C_1u_3,
 \end{aligned} \tag{18}$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

逐渐扩大 k 的取值范围并重复类似求解过程, 我们发现所有决定方程的解具有通式形式

$$\begin{aligned}
 X &= C_3, \\
 T &= C_1t + C_2,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$U_k = -C_1u_k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

各阶近似方程 (12) 的相似解的确定取决于 $\sigma_k = 0$ 时的对称变换 (14) 式, 即求解特征方程

$$\frac{dx}{X} = \frac{dt}{T},$$

$$\frac{du_k}{U_k} = \frac{dt}{T} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

下面我们就 C_1 是否取零进行讨论.

3.1. $C_1 \neq 0$ 的同伦近似对称约化

不失一般性, 可以将任意常数 C_2 和 C_3 分别改写为 C_1C_2 和 C_1C_3 , 则 (19) 式化为

$$\begin{aligned}
 X &= C_1C_3, \\
 T &= C_1(t + C_2),
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$U_k = -C_1u_k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

再利用特征方程 (20) 可以确定不变量

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{X} = \frac{dt}{T} &\Rightarrow I(x, t) = \xi \\
 &= x - C_3 \ln(t + C_2),
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du_k}{U_k} = \frac{dt}{T} &\Rightarrow I_k(x, t, u_k) = P_k \\
 &= u_k(t + C_2) \quad (k = 0, 1, \dots).
 \end{aligned} \tag{23}$$

视 P_k 为 ξ 的函数, 则有相似解

$$u_k = \frac{P_k(\xi)}{t + C_2} \quad (k = 0, 1, \dots), \tag{24}$$

其中相似变量 ξ 如 (22) 式所示.

根据相似解的通式 (24) 以及 (4) 式可以写出同伦模型 (10) 式的级数解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\xi)q^k}{t + C_2}. \tag{25}$$

进一步取 $q = 1$, 则产生远场模型方程的同伦级数解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(\xi)}{t + C_2}. \tag{26}$$

各阶相似约化方程取决于 (12) 式中的有限个方程和 (24) 式中的有限个相似解, 由此可以确定相似约化方程的通式

$$C_3P_{k,\xi\xi\xi} + P_{k,\xi\xi} - C_3P_{k,\xi} + 3 \sum_{i=0}^k P_{k-i}P_{i,\xi} - P_k$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1-\lambda)^{(k-1-i)} \right. \\
 & \times \left. \sum_{j=0}^i (2P_{i-j,\xi} P_{j,\xi\xi} + P_{i-j} P_{j,\xi\xi\xi}) \right] = 0 \\
 & (k=0,1,\dots). \tag{27}
 \end{aligned}$$

该通式中的各项进行重新调整后可以写成

$$\begin{aligned}
 & C_3 P_{k,\xi\xi\xi} + P_{k,\xi\xi} - C_3 P_{k,\xi} \\
 & + 3[(1-\delta_{k,0})P_k P_{0,\xi} + P_{k,\xi} P_0] \\
 & - P_k = f_k(\xi) \quad (k=0,1,\dots). \tag{28}
 \end{aligned}$$

这里 $f_k(\xi)$ 是关于 $\{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\}$ 的函数,

$$\begin{aligned}
 f_k(\xi) = & -3 \sum_{i=1}^{k-1} P_{k-i} P_{i,\xi} + \gamma\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1-\lambda)^{(k-1-i)} \right. \\
 & \times \left. \sum_{j=0}^i (2P_{i-j,\xi} P_{j,\xi\xi} + P_{i-j} P_{j,\xi\xi\xi}) \right]. \tag{29}
 \end{aligned}$$

并且, $\delta_{k,0}$ 满足条件 $\delta_{0,0} = 1, \delta_{k,0} = 0 (k \neq 0)$. 若 P_0, P_1, \dots, P_{k-1} 已知, 则(28)式实际上是一个关于 P_k 的三阶线性变系数常微分方程. 理论上, (28)式可以从零阶开始逐步求解.

3.2. $C_1 = 0$ 的同伦近似对称约化(行波形式)

由特征方程(20)可以求出相似解

$$u_k = P_k(\xi) \quad (k=0,1,\dots), \tag{30}$$

其中

$$\xi = x - \frac{C_3}{C_2} t.$$

我们将此相似变量改写为一个等价的行波形式 $\xi = x - ct$ (c 是一个任意速度常数).

利用(4)和(7)式可以得到同伦模型(10)式的级数解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} q^k P_k(\xi), \tag{31}$$

以及远场模型方程的同伦级数解

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi). \tag{32}$$

各阶相似解(30)式可以将各阶近似方程(12)约化为

$$\begin{aligned}
 & cP_{k,\xi\xi\xi} - 3 \sum_{i=0}^k P_{k-i} P_{i,\xi} - cP_{k,\xi} \\
 & + \gamma\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1-\lambda)^{(k-1-i)} \right. \\
 & \times \left. \sum_{j=0}^i (2P_{i-j,\xi} P_{j,\xi\xi} + P_{i-j} P_{j,\xi\xi\xi}) \right] = 0 \\
 & (k=0,1,\dots). \tag{33}
 \end{aligned}$$

此方程等价于

$$\begin{aligned}
 & cP_{k,\xi\xi\xi} - 3[(1-\delta_{k,0})P_k P_{0,\xi} + P_{k,\xi} P_0] \\
 & - cP_{k,\xi} = g_k(\xi) \quad (k=0,1,\dots), \tag{34}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_k(\xi) = & 3 \sum_{i=1}^{k-1} P_{k-i} P_{i,\xi} - \gamma\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \left[(1-\lambda)^{(k-1-i)} \right. \\
 & \times \left. \sum_{j=0}^i (2P_{i-j,\xi} P_{j,\xi\xi} + P_{i-j} P_{j,\xi\xi\xi}) \right]. \tag{35}
 \end{aligned}$$

容易看出, (34)式实际上是一个三阶线性变系数常微分方程.

取 $k=0$, 此时零阶相似约化方程存在双曲正切函数解(a 为任意常数)

$$P_0 = c \left(\tanh^2 \left[\frac{1}{2}(\xi + a) \right] - 1 \right). \tag{36}$$

设其余各阶相似约化方程的双曲正切函数解为

$$\begin{aligned}
 P_k = & \sum_{i=0}^{n_k} d_{k,i} \tanh^i \left[\frac{1}{2}(\xi + a) \right] \\
 & (k=0,1,\dots), \tag{37}
 \end{aligned}$$

其中所有 $d_{k,i}$ 都是待定常数. 仅考虑 k 阶相似约化方程(33)中的 $P_{k,\xi\xi\xi}$ 和 $P_{k-1} P_{0,\xi\xi\xi}$ 两项, 通过平衡这两项之中 $\tanh \left[\frac{1}{2}(\xi + a) \right]$ 的最高幂次, 可以得到

$$n_k + 3 = n_{k-1} + n_0 + 1,$$

又由于(36)式中的 $n_0 = 2$, 所以

$$n_k = 2(k+1).$$

利用零阶相似约化解(36)式, 从 k 阶相似约化方程(33)中可以依次解出 P_1, P_2, \dots, P_k , 依次取 $k = 1, 2, 3, \dots$, 将已知的相似约化解 P_0, P_1, \dots, P_{k-1} 以及未知的相似约化解(37)式代入方程(33)中的 k 阶相似约化方程, 匹配关于 $\tanh \left[\frac{1}{2}(\xi + a) \right]$ 的不同幂次的系数, 可以得到关于 $d_{k,0}, d_{k,1}, \dots, d_{k,2(k+1)}$ 的代数方程组, 该方程组的解用来确定 k 阶相似约化解(37)式.

当 k 依次取 1, 2, 3 时, 可以解出(37)式中的系数 $d_{k,i}$ (a_1, a_2, a_3 为任意常数). 当 $k=1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_{1,0} &= 0, \\
 d_{1,1} &= a_1, \\
 d_{1,2} &= c\gamma\lambda, \\
 d_{1,3} &= -a_1, \\
 d_{1,4} &= -c\gamma\lambda.
 \end{aligned}$$

当 $k=2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_{2,0} &= \frac{a_1^2}{4c}, \\
 d_{2,1} &= a_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2,2} &= c\gamma^2\lambda^2 - c\gamma\lambda(\lambda - 1) - \frac{a_1^2}{c}, \\
 d_{2,3} &= -a_2 - 2a_1\gamma\lambda, \\
 d_{2,4} &= -\frac{7}{3}c\gamma^2\lambda^2 + c\gamma\lambda(\lambda - 1) + \frac{3a_1^2}{4c}, \\
 d_{2,5} &= 2a_1\gamma\lambda, \\
 d_{2,6} &= \frac{4}{3}c\gamma^2\lambda^2.
 \end{aligned}$$

当 $k=3$ 时,有

$$\begin{aligned}
 d_{3,0} &= -\frac{a_1^2\gamma\lambda}{4c} + \frac{a_1a_2}{2c}, \\
 d_{3,1} &= a_3, \\
 d_{3,2} &= c\gamma^3\lambda^3 - 2c\gamma^2\lambda^2(\lambda - 1) \\
 &\quad + c\gamma\lambda(\lambda - 1)^2 - \frac{2a_1a_2}{c} - \frac{a_1^2\gamma\lambda}{2c}, \\
 d_{3,3} &= -\frac{8}{3}a_1\gamma^2\lambda^2 + 2\gamma\lambda(\lambda - 1)a_1 \\
 &\quad - 2a_2\gamma\lambda + \frac{a_1^3}{2c^2} - a_3, \\
 d_{3,4} &= -4c\gamma^3\lambda^3 + \frac{14}{3}c\gamma^2\lambda^2(\lambda - 1) \\
 &\quad - c\gamma\lambda(\lambda - 1)^2 + \frac{3a_1a_2}{2c} + \frac{13a_1^2\gamma\lambda}{4c}, \\
 d_{3,5} &= \frac{20}{3}a_1\gamma^2\lambda^2 - 2\gamma\lambda(\lambda - 1)a_1 + 2a_2\gamma\lambda - \frac{a_1^3}{2c^2}, \\
 d_{3,6} &= \frac{76}{15}c\gamma^3\lambda^3 - \frac{8}{3}c\gamma^2\lambda^2(\lambda - 1) - \frac{5a_1^2\gamma\lambda}{2c}, \\
 d_{3,7} &= -4a_1\gamma^2\lambda^2, \\
 d_{3,8} &= -\frac{31}{15}c\gamma^3\lambda^3.
 \end{aligned}$$

根据同伦级数解(32)式的 m 阶截断解

$$\tilde{u}_m = \sum_{k=0}^m P_k(\xi) \quad (38)$$

以及相应的残留误差

$$\Delta(\tilde{u}_m) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} [A(\tilde{u}_m)]^2 dx \right]^{1/2} \quad (39)$$

的表达式可以求出级数解(32)式的前三阶截断解和相应的残留误差.

当(37)式中的常数及变量取 $\gamma = 0.1, c = -1, a = a_1 = a_2 = a_3 = t = 0$ 时,一阶至三阶截断解(38)的残留误差 $\Delta(\tilde{u}_m)$ 随辅助参数 λ 的变化关系如图 1 所示. 从图 1 可以看出,所有曲线单调递减的左半部分于 $\lambda = 0$ 相交,任一曲线单调递增的右半部分向上与所有较低阶截断解对应的曲线相交. 对

于 m 阶截断解,曲线最低点对应辅助参数 λ 的最佳值 λ_m , 此时残留误差最小. 从图 1 中各条曲线变化趋势还可以看出: λ_m 取值介于 1.0 与 1.1 之间, 并且当截断解的阶数 m 增大时, λ_m 趋近于 1.0. 若辅助参数 λ 取值于 1.0 附近, 则各阶截断解更加接近真实解, 这说明相应的同伦级数解收敛速度较快. 反之, 辅助参数 λ 取值距离 1.0 越远, 收敛性越差, 甚至发散.

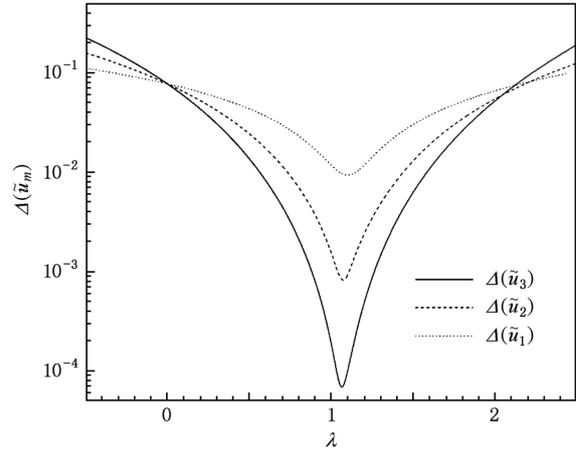


图 1 当 $\gamma = 0.1, c = -1, a = a_1 = a_2 = a_3 = t = 0$ 时,一阶至三阶截断解(38)式的残留误差 $\Delta(\tilde{u}_m)$ 随辅助参数 λ 的变化关系

4. 结 论

为了研究远场模型方程的同伦近似对称约化, 我们利用级数解假设将其同伦模型分解为一系列近似方程, 这些近似方程虽然无穷多, 却可以从有限个近似方程的对称约化推测无穷多近似方程的对称约化, 于是有各阶相似约化方程的通式以及各阶相似约化解的通式, 从而确定远场模型方程的同伦级数解.

各阶相似约化方程看似形式复杂而难以求解, 但是, 若零阶到 $k - 1$ 阶相似约化方程的具体解已知, k 阶相似约化方程只是关于 $P_k(\xi)$ 的线性变系数常微分方程. 所以, 理论上各阶相似约化方程可以从零阶开始由低阶到高阶依次求解.

对于行波形式的同伦近似对称约化, 我们构造了双曲正切函数形式的截断级数解, 并且作图讨论一阶至三阶截断级数解的残留误差. 同伦模型中的辅助参数 λ 取值影响残留误差, 那么, 保持截断级

数解的阶数不变, 仅仅通过适当选取辅助参数 λ 就可以改善截断级数解对真实解的接近程度. 在各阶截断解得到改进的同时, 同伦级数解收敛更快, 所以辅助参数 λ 取值对同伦级数解的收敛性也有影响.

近似对称法与同伦近似对称法都可以用来构造非线性方程的级数解, 但是近似对称法由于没有

辅助参数而不能对级数解收敛性进行改进; 另外, 近似对称法仅适用于含微扰项的非线性问题, 而同伦近似对称法在同伦模型中引入的同伦参数 q 起到了小参数的作用, 使得同伦近似对称法适用于不含小参数的非线性问题. 鉴于此, 相比于近似对称法, 同伦近似对称法处理非线性问题通常更加有效.

- [1] Olver P J 1993 *Applications of Lie Group to Differential Equations* (2nd ed) (New York: Springer)
- [2] Bluman G W, Cole J D 1974 *Similarity Methods for Differential Equations* (Berlin: Springer)
- [3] Bluman G W, Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (Berlin: Springer)
- [4] Cole J D 1968 *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (Waltham: Blaisdell)
- [5] Van Dyke M 1975 *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* (Stanford: Parabolic Press)
- [6] Nayfeh A H 2000 *Perturbation Methods* (New York: John Wiley & Sons)
- [7] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H 1988 *Mat. Sb.* **136** 435
- [8] Fushchich W I, Shtelen W M 1989 *J. Phys. A* **22** L887
- [9] Pakdemirli M, Yurusoy M, Dolapci I T 2004 *Acta Appl. Math.* **80** 243
- [10] Wiltshire R 2006 *J. Comput. Appl. Math.* **197** 287
- [11] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y 2008 *J. Math. Phys.* **49** 093505
- [12] Jia M, Wang J Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 020201
- [13] Yao R X, Jiao X Y, Lou S Y 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 785
- [14] Jiao X Y, Yao R X, Zhang S L, Lou S Y 2009 *Z. Naturforsch. A* **64** 676
- [15] Zhao Y, Zhang S L, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 100201
- [16] Liao S J 1992 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University) (in Chinese) [廖世俊 1992 博士学位论文 (上海: 上海交通大学)]
- [17] Liao S J 1999 *Int. J. Non-Linear Mech.* **34** 759
- [18] Liao S J 2002 *J. Fluid Mech.* **453** 411
- [19] Liao S J 2003 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Boca Raton: Chapman & Hall CRC Press)
- [20] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499
- [21] Liao S J 2008 *Adv. Mech.* **38** 1 (in Chinese) [廖世俊 2008 力学进展 **38** 1]
- [22] Lyapunov A M 1992 *General Problem of the Stability of Motion* (London: Taylor and Francis) p29
- [23] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G 1990 *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures* (Moscow: Mashinostroyenie) p52 (in Russian)
- [24] Adomian G 1994 *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* (Boston, London: Kluwer Academic Publishers)
- [25] Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y 2009 *Sci. China G* **39** 964 (in Chinese) [焦小玉、高原、楼森岳 2009 中国科学 G **39** 964]
- [26] Dai H H 1998 *Acta Mech.* **127** 293
- [27] Dai H H, Huo Y 2000 *Proc. R. Soc. Lond. A* **456** 331
- [28] Camassa R, Holm D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [29] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J 1972 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **272** 47

The approximate homotopy symmetry reduction for far-field model equation *

Jiao Xiao-Yu[†]

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210046, China)

(Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

(Received 28 January 2011; revised manuscript received 17 August 2011)

Abstract

The far-field model equation is investigated by the approximate homotopy symmetry method. Homotopy series solutions are constructed through summarizing the relevant general formulas for similarity reduction solutions and similarity reduction equations of different orders. Similarity reduction equations of different orders are linear variable coefficients ordinary differential equations, and can be solved one by one from zero-order similarity reduction equations. The auxiliary parameter in the homotopy model affects convergence of homotopy series solutions.

Keywords: approximate homotopy symmetry method, far-field model equation, homotopy series solution

PACS: 02. 20. Hj, 02. 30. Jr

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10735030, 10905038, 11071109).

[†] E-mail: jiaoxyxy@yahoo.com.cn