一种由光滑孤子解构造尖峰孤子解的方法*

刘 煜[1)†] 刘伟庆[2)]

1)(河南电力试验研究院,郑州 450052)

2)(河南科技大学数学与统计学院,洛阳 471003)

(2011 年 2 月 21 日收到;2011 年 7 月 5 日收到修改稿)

提出了一种由钟状光滑孤子(或孤波)解构造尖峰孤子解的方法,即根据已知的钟状孤子(或孤波)解的形式直接拟定尖峰孤子解的形式,然后确定拟解中的待定参数,得到具体的解式. 通过 5 个非线性方程(组)对该方法进行了验证, 表明方法是可行的. 钟状光滑孤子(或孤波)解与尖峰孤子解这两种性质完全不同的解可以同时存在,尖峰孤子解的表达式包含了钟状光滑孤子(或孤波)解,后者可以作为前者的特例.

关键词: 非线性波方程, 钟状光滑孤子(或孤波)解, 尖峰孤子解

PACS: 02. 30. Jr, 05. 45. Yv

1. 引 言

尖峰孤子解 $u(x,t) = ce^{-|x-ct|}$ 是 Camassa 和 Holm[1] 在研究一个新的浅水波方程——Camassa-Holm(CH)方程时发现的非线性波动方程的一种新型解. 该解的特点是孤立波曲线在波峰处有一个尖点,尖点的一阶导数不连续,波峰不光滑,这与我们以往认识的孤立波是光滑连续的情形完全不同. 尖峰孤子解的这种特点引起了许多研究者的关注,迄今已在 CH 方程[1—4]、Degasperis-Procesi 方程[5,6]、广义 CH 方程[7—10] 等方程中得到了该型解. 最近,文献[11]提出了一种求非线性波方程尖峰孤子解的简便方法,并利用该方法求得了 5 个非线性波方程的多种形式的尖峰孤子解.

根据文献[11]的方法,首先要构造具有尖峰孤子解特点的解式

$$u = f(|\xi|, c_1, c_2, \cdots, c_n), \tag{1}$$

式中 $\xi = x - vt, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为待定常数. 该解式在 $\xi = 0$ 时应满足

$$u'|_{\xi=0} = \pm f'(0, c_1, c_2, \cdots, c_n) \neq 0. \tag{2}$$

然后,分别求出 $\xi \geqslant 0$ 和 $\xi \leqslant 0$ 两种条件下的各阶偏导数,将其代入待求的非线性波方程

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \cdots) = 0, \tag{3}$$

通过解系数方程组确定待定常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 若 $\xi \geqslant 0$ 和 $\xi \leqslant 0$ 两种条件下得出的待定常数完全相同,则方程(3)存在形如(1)式的尖峰孤子解.

构造具有尖峰孤子解特点的解式是求取尖峰孤子解的第一步,这需要一定的经验,目前尚无统一和普适的方法. 本文设想,对于某一具体的非线性波方程,利用其已知的解来构造尖峰孤子解. 按照这一思路,我们研究了多个非线性波方程或方程组,找到了一种由钟状光滑孤子(或孤波)解构造尖峰孤子解的方法,即根据已知的钟状孤子(或孤波)解的形式直接拟定尖峰孤子解的形式,然后确定拟解中的待定参数,最后得到具体的解式. 本文通过 5 个非线性方程(组)对该方法做了验证,结果表明该方法是可行的. 同时,本文还发现,钟状光滑孤子(或孤波)解与尖峰孤子解这两种性质完全不同的解可以同时存在,尖峰孤子解的表达式包含了钟状光滑孤子(或孤波)解,后者可以视为前者的特例.

2. 由钟状孤子(或孤波)解构造尖峰孤子解

2. 1. Korteweg-de Vries (KdV)方程

KdV 方程是非线性波理论中的一个基本模型,一

* 河南电力试验研究院科研基金资助的课题.

† E-mail: ly_hndl@ yahoo. com. cn

直被作为研究孤子现象的经典方程. 其一般形式为[12]

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{4}$$

取 $\alpha = -6, \beta = 1$ 时,方程(4)有大家熟知的钟状孤子解[12]

$$\begin{aligned} u &= \frac{-v}{2}\mathrm{sech}^2((\sqrt{v}/2)\xi) \\ &= \frac{-v}{2}\frac{1}{\cosh^2((\sqrt{v}/2)\xi)}, \end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\xi = x - vt$. 根据(5)式,可以拟设方程(4)的尖峰孤子解的基本形式为

$$u = \frac{c_1}{(\cosh c_2|\xi| + c_3 \sinh c_2|\xi|)^2}, \tag{6}$$

式中双曲余弦函数为偶函数,故 $\cosh c_2|\xi|$ 也可以写作 $\cosh c_2\xi$. 对(6)式求一阶导数,当 $c_3 \neq 0$ 时,有

$$u'|_{\xi=0} = \pm 2c_1c_2c_3 \neq 0. \tag{7}$$

(7)式在 $\xi=0$ 时满足(2)式,因此(6)式可以作为尖峰孤子解的拟解. 按照文献[11]的方法确定(6)式中的待定常数,得

$$c_1 = 3v(1-c_3^2)/\alpha,$$

$$c_2 = \pm\sqrt{v/\beta}/2,$$

$$c_3 \neq \pm 1.$$

因此,KdV 方程(4)有尖峰孤子解

$$u = \frac{3v(1-c_3^2)/\alpha}{(\cosh((\sqrt{v/\beta}/2)|\xi|) + c_3\sinh((\sqrt{v/\beta}/2)|\xi|))^2}. \tag{8}$$

由(8)式可知, 当 c_3 取 ± 1 和 0 之外的常数时,可得尖峰孤子解;当取 $c_3 = 0, \alpha = -6, \beta = 1$ 时,(8)式退化为(5)式. 这表明(8)式包含了(5)式,即尖峰孤子解的表达式包含了钟状光滑孤子解,后者是前者的特例.

2.2. 修正的 Korteweg-de Vries (mKdV)方程

mKdV 方程的一般形式为[12]

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{9}$$

方程(9)有钟状孤波解[12]

$$\begin{aligned} u &= \pm\sqrt{6v/\alpha}\,\mathrm{sech}(\sqrt{v/\beta}\xi) \\ &= \pm\frac{\sqrt{6v/\alpha}}{\cosh(\sqrt{v/\beta}\xi)}. \end{aligned} \tag{10}$$

参考(10)式,假定方程(9)有如下形式的尖峰孤子解:

$$u = \frac{c_1}{\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|}. \tag{11}$$

对(11)式求一阶导数,当 $c_3 \neq 0$ 时,有

$$u'|_{\xi=0} = \pm c_1c_2c_3 \neq 0. \tag{12}$$

(12)式在 $\xi=0$ 时也满足(2)式,因此(11)式也可以作为尖峰孤子解的拟解. 按照文献[11]的方法确定(11)式中的待定常数

$$c_1 = \sqrt{6v(1-c_3^2)/\alpha},$$

$$c_2 = \pm\sqrt{v/\beta},$$

$$c_3 \neq \pm 1.$$

因此,mKdV 方程(9)有尖峰孤子解

$$u = \pm\frac{\sqrt{6v(1-c_3^2)/\alpha}}{\cosh(\sqrt{v/\beta}|\xi|) + c_3\sinh(\sqrt{v/\beta}|\xi|)}. \tag{13}$$

容易看出,当 c_3 取 ± 1 和 0 之外的常数时,可得尖峰孤子解;当取 $c_3 = 0$ 时,(13)式退化为(10)式,成为钟状光滑孤波解.

2.3. 组合 KdV-mKdV 方程

组合 KdV-mKdV 方程为

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{14}$$

该方程可以作为一维非线性晶格传播波的模型,也可以作为流体力学中的模型方程[13].

先求解方程(14),得到钟状孤波解

$$\begin{aligned} u = &\pm\sqrt{\frac{24\beta v + 6\alpha^2}{4\beta^2}} \\ &\times \mathrm{sech}\left(\sqrt{\frac{4\beta v + \alpha^2}{4\beta\gamma}}\xi\right) - \frac{\alpha}{2\beta}, \end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\xi = x - vt$, v 可取任意非零常数. 当取 $v = \frac{-\alpha^2}{6\beta}, \gamma = 1$ 时,(15)式简化为文献[13]的行波解 $u^+(\xi)$ 和 $u^-(\xi)$;当取 $v = \frac{-\alpha^2}{6\beta}$,(15)式简化为文献[14]的解 $u_{14}(\xi)$. 因此,(15)式更具一般性.

参考(15)式,假定方程(14)的尖峰孤子解的形式为

$$u = \frac{c_1}{\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|} + c_4. \tag{16}$$

按照文献[11]的方法确定(16)式中的待定常数

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{24\beta v + 6\alpha^2}{4\beta^2}(1 - c_3^2)},$$

$$c_2 = \pm\sqrt{\frac{4\beta v + \alpha^2}{4\beta\gamma}},$$

$$c_3 \neq \pm 1,$$

$$c_4 = \frac{-\alpha}{2\beta}.$$

因此,方程(14)有尖峰孤子解

$$u = \pm\sqrt{\frac{24\beta v + 6\alpha^2}{4\beta^2}(1 - c_3^2)} \times \frac{1}{\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|} - \frac{\alpha}{2\beta}, \quad (17)$$

式中

$$c_2 = \pm\sqrt{\frac{4\beta v + \alpha^2}{4\beta\gamma}}.$$

(17)式包含了(15)式,当 $c_3 = 0$ 时,(17)式即退化为(15)式,成为钟状光滑孤波解.

2.4. Klein-Gordon 方程

Klein-Gordon 方程的一般形式为[12]

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \alpha u - \beta u^3 = 0. \quad (18)$$

该方程包含了以下著名的非线性偏微分方程: ϕ^4 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0;$$

类正弦- Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u - (1/6)u^3 = 0,$$

Landau-Ginzburg-Higgs 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - p^2 u + q^2 u^3 = 0,$$

其中 p, q 为常数. 方程(18)有钟状孤波解[12]

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{v^2 - c_0^2}}\xi\right)}. \quad (19)$$

参考(19)式,假定方程(18)有如下形式的尖峰孤子解:

$$u = \frac{c_1}{\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|}. \quad (20)$$

按照文献[11]的方法可以确定(20)式中的待定常数

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}(1 - c_3^2)},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{-\alpha}{v^2 - c_0^2}},$$

$$c_3 \neq \pm 1.$$

因此, Klein- Gordon 方程(18)的尖峰孤子解为

$$u = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}(1 - c_3^2)} \times \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{v^2 - c_0^2}}|\xi|\right) + c_3\sinh\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{v^2 - c_0^2}}|\xi|\right)}. \quad (21)$$

由于 Klein-Gordon 方程(18) 包含了 ϕ^4 方程、类正弦-Gordon 方程和 Landau-Ginzburg-Higgs 方程, 因此本文方法和结果也适合于这些方程.

(21)式包含了(19)式,当取 $c_3 = 0$ 时,(21)式退化为(19)式,成为钟状光滑孤波解.

2.5. 广义 Boussinesq 方程组

广义 Boussinesq 方程组为[15]

$$\begin{aligned} &h_t + hh_x + gu_x + \frac{1}{3}au_{xxx} = 0, \\ &u_t + hu_x + uh_x = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $h(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 分别表示水深和波速.

文献[15]利用动力学分叉理论研究了方程组(22),认为其应当存在尖峰孤子解,但未具体求出.

作行波变换

$$h(x,t) = \varphi(\xi),$$
$$u(x,t) = \psi(\xi),$$
$$\xi = x - vt,$$

求解方程组(22),可得钟状孤波解

$$\varphi(\xi) = \pm\frac{\sqrt{g}}{\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}\xi\right)\right)^{2/3}} + v \quad (23)$$

和行波解

$$\psi(\xi) = \cosh^{2/3}\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}\xi\right). \quad (24)$$

参考(23)和(24)式,假定方程组(22)有如下形式的尖峰孤子解:

$$\varphi(\xi) = \frac{c_1}{(\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|)^{2/3}} + v, \quad (25)$$

$$\psi(\xi) = (\cosh c_2|\xi| + c_3\sinh c_2|\xi|)^{2/3}. \quad (26)$$

按照文献[11]的方法确定(25), (26)式中的待定常数,得

$$c_1 = \pm\sqrt{g(1 - c_3^2)},$$

$$c_2 = \pm\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}},$$

$c_3 \neq \pm 1$.

因此,广义 Boussinesq 方程组(22)的尖峰孤子解为

$$\varphi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{g(1-c_3^2)}}{\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}|\xi|\right) + c_3\sinh\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}|\xi|\right)\right)^{2/3}} + v, \tag{27}$$

$$\psi(\xi) = \left(\cosh\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}|\xi|\right) + c_3\sinh\left(\sqrt{\frac{-27g}{4av^2}}|\xi|\right)\right)^{2/3}. \tag{28}$$

(27)和(28)式分别包含了(23)和(24)式,当取 $c_3 = 0$ 时,(27),(28)式即退化为(23),(24)式.

上述对 KdV 方程、mKdV 方程、组合 KdV-mKdV 方程、Klein-Gordon 方程和广义 Boussinesq 方程组共 5 个方程(组)的求解结果表明,尖峰孤子解的表达式可以同时描述钟状光滑和尖峰两种孤立波. 当表达式中的 c_3 取 ± 1 和 0 之外的常数时,可得尖峰孤子解;当取 $c_3 = 0$ 时,解的表达式即退化为钟状光滑孤子(或孤波)解. 尖峰孤子解的表达式包含了钟状孤子(或孤波)解,后者可以作为前者的特例. 数值模拟表明,c_3 的取值会影响孤立波波峰的尖锐程度,c_3 的值越小,波峰越圆滑;当 $c_3 \to 0$ 时,波形即趋于钟状光滑的孤立波.

3. 结 论

根据已知的钟状孤子(或孤波)解的形式直接拟定尖峰孤子解的形式后求解的方法是可行的. 还有不少非线性方程,如 Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程[16]、修正的 BBM 方程[16]、广义 KdV 方程[17]和(2+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程[18]等,也都可以采用本文方法求解. 本文作为文献[11]的补充和推广,为在更多的非线性方程中求得尖峰孤子解提供了一条较为便捷的途径.

[1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661

[2] Liu Z R, Qian T F 2002 *Appl. Math. Model.* **26** 473

[3] Qiao Z J, Zhang G P 2006 *Europhys. Lett.* **73** 657

[4] Liu Z R 2004 *J. Yunnan Nationalities Univ.* (Nat. Sci. Ed.) **13** 3 (in Chinese) [刘正荣 2004 云南民族大学学报(自然科学版) **13** 3]

[5] Yu L Q, Tian L X 2006 *Math. Prac. Theor.* **36** 261 (in Chinese) [余丽琴、田立新 2006 数学的实践与认识 **36** 261]

[6] Yu L Q, Tian L X 2005 *Pure Appl. Math.* **21** 310 (in Chinese) [余丽琴、田立新 2005 纯粹数学与应用数学 **21** 310]

[7] Guo B L, Liu Z R 2003 *Sci. China* A **33** 325 (in Chinese) [郭柏灵、刘正荣 2003 中国科学 A **33** 325]

[8] Xie S L 2001 *J. Yunnan Univ.* (Nat. Sci. Ed.) **23** 5 (in Chinese) [谢绍龙 2001 云南大学学报(自然科学版) **23** 5]

[9] Song X Y, Tian L X 2003 *J. Jiangsu Univ.* (Nat. Sci. Ed.) **24** 35 (in Chinese) [宋秀迎、田立新 2003 江苏大学学报(自然科学版) **24** 35]

[10] Liu Z R, Yang X Y 2007 *J. Yunnan Nationalities Univ.* (Nat. Sci. Ed.) **16** 89 (in Chinese) [刘正荣、杨喜艳 2007 云南民族大学学报(自然科学版) **16** 89]

[11] Liu Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7452 (in Chinese) [刘 煜 2009 物理学报 **58** 7452]

[12] Liu S K, Liu S D 2000 *Nonlinear Equation in Physics* (Beijing: Peking University Press) pp176, 177, 187, 188, 190, 191 (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京:北京大学出版社) 第 176, 177, 187, 188, 190, 191 页]

[13] Qimusurong, Wuenbaoyin 1997 *J. Inner Mongolia Teacher Col. Nationalities* (Nat. Sci. Ed.) **12** 158 (in Chinese) [其木苏荣、乌恩宝音 1997 内蒙古民族师院学报(自然科学版) **12** 158]

[14] Chen J L, Li X Z, Wang Y M 2005 *J. Lanzhou Univ. Techn.* (Nat. Sci. Ed.) **31** 140 (in Chinese) [陈金兰、李向正、王跃明 2005 兰州理工大学学报(自然科学版) **31** 140]

[15] Li H, Sun S R, Li J B 2006 *Appl. Math. Comput.* **175** 61

[16] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6214 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 6214]

[17] Guo G P, Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159 (in Chinese) [郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[18] Lin J, Wang R M, Ye L J 2006 *Chin. Phys.* **15** 665

A method of constructing peaked soliton solution of nonlinear wave equation by using smooth soliton solution*

Liu Yu[1)†] Liu Wei-Qing[2)]

1) (*Henan Electric Power Research Institute*, *Zhengzhou* 450052, *China*)

2) (*School of Mathematics and Statistics*, *Henan University of Science and Technology*, *Luoyang* 471003, *China*)

(Received 21 February 2011; revised manuscript received 5 July 2011)

Abstract

We propose a method of obtaining peakon solution from bell-shape smooth soliton (or solitary wave) solution, i. e. constructing directly an ansatz solution of peakon according to the well-known bell-shape smooth soliton solution and then determining the coefficients in ansatz solution. The method is verified to be feasible for four nonlinear wave equations and one set of equations. The bell-shape smooth soliton (or solitary wave) solution and peakon solution can exist in the same expression and the expressions of peakon solutions include those of the bell-shape smooth soliton solutions and the latter are the special cases of the former.

Keywords: nonlinear wave equation, bell-shape smooth soliton (or solitary wave) solution, peaked soliton (peakon) solution

PACS: 02. 30. Jr, 05. 45. Yv

* Project supported by the Scientific Research Foundation of Henan Electric Power Research Institute, China.

† E-mail: ly_hndl@yahoo. com. cn