

# 具有 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用的四量子比特海森堡 XXZ 模型中的热纠缠\*

张英丽 周 斌<sup>†</sup>

(湖北大学物理学与电子技术学院, 武汉 430062)

(2010 年 11 月 9 日收到; 2011 年 8 月 12 日收到修改稿)

研究四量子比特海森堡 XXZ 模型中配对纠缠的性质, 在该系统中引入了 Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用, 通过求解配对纠缠度来讨论最近邻和次近邻两量子比特之间的热纠缠性质. 研究表明: 对于铁磁和反铁磁两种情形而言, 次近邻两量子比特之间不存在配对热纠缠; 但在最近邻两量子比特情况时, DM 相互作用和各向异性参数  $\Delta$  对配对热纠缠和临界温度  $T_c$  都具有重要的影响, 且随着温度  $T$  的增加, 配对纠缠度逐渐减小直至消失. 因此, 选择和调整合适的 DM 相互作用和各向异性参数, 可以有效地控制和提高配对热纠缠.

**关键词:** 配对纠缠, XXZ 模型, Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用

**PACS:** 03. 65. Ud

## 1. 引言

量子纠缠在现代物理中扮演着重要的角色, 随着量子信息论的发展, 它已成为量子力学的一个核心概念, 作为量子信息技术中最宝贵的资源已逐渐应用于量子计算和量子通信中. 利用纠缠除了能实现经典方法不容易实现的行为外, 也可广泛地用于灵敏干涉测量、量子平板印刷术<sup>[1]</sup> 以及研究强关联量子系统<sup>[2]</sup> 等. 自从海森堡模型中热纠缠的概念被提出及进行探讨后<sup>[3]</sup>, 人们对各种海森堡模型的纠缠(两量子比特海森堡模型的热纠缠和  $N$  量子比特海森堡模型的配对纠缠) 特性已经进行了广泛的理论研究<sup>[4-21]</sup>. 其中对于四量子比特海森堡模型, 人们也进行了大量的研究, 例如: Cao 等<sup>[12]</sup> 研究了在磁场作用下四量子比特海森堡 XXZ 链中的热纠缠性质, 发现各种参数的变化会影响最近邻和次近邻量子比特之间的配对热纠缠性质; Wu 等<sup>[13]</sup> 研究了外磁场作用下的四量子比特海森堡 XY 链和海森堡 XX 链中的热纠缠性质, 结果表明各种参数对热纠缠具有一定的影响且在海森堡 XX 链模型中可获得更

高的配对纠缠.

Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用是一种具有反对称的各向异性超交换相互作用<sup>[22]</sup>, 可用于解释反铁磁材料(如  $\text{La}_2\text{CuO}_4$ ) 中的弱铁磁性以及其他的新奇性质<sup>[23]</sup>. 近年来人们也广泛讨论和研究了在 DM 各向异性交换作用下海森堡模型的纠缠特性, 但是到目前为止, DM 相互作用对热纠缠影响的研究大多集中在双量子比特和三量子比特的海森堡模型中<sup>[4, 14-18, 21]</sup>, 而四量子比特模型很少受到关注. 因此, 本文将重点讨论和研究 DM 相互作用对四量子比特海森堡 XXZ 模型中热纠缠性质的影响.

## 2. 理论模型和配对纠缠度

对于具有 DM 相互作用的  $N$  量子比特海森堡 XXZ 模型, 系统的哈密顿量  $H$  可以表示为

$$H = \frac{J}{2} \sum_{n=1}^N [(\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) + \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_n \times \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z], \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{D}$  为 DM 相互作用参数,  $J$  为耦合系数,  $\Delta$  为各

\* 国家自然科学基金(批准号: 10974046)、湖北省自然科学基金(批准号: 2009CDB360)和湖北省教育厅科研计划重点项目(批准号: D20101004)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: binzhou@hubu.edu.cn

向异性参数,  $\sigma_n^\alpha (\alpha = x, y, z)$  为第  $n$  个格点的泡利算符, 这里我们采用周期性边界条件, 即  $\sigma_{n+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$ . 当  $J > 0, \Delta > 0$  时, (1) 式对应反铁磁模型; 当  $J < 0, \Delta < 0$  时, (1) 式对应铁磁模型. 本文考虑四量子比特  $XXZ$  模型, 即  $N = 4$ , 同时我们假定 DM 相互作用沿着  $z$  轴, 即  $\mathbf{D} = D\hat{e}_z$ . 在这种情况下, 哈密顿量 (1) 式可具体写为

$$H = J \sum_{n=1}^4 \left[ (1 + iD) \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + (1 - iD) \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{1}{2} \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right], \quad (2)$$

其中

$$\sigma_n^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y).$$

在下面的讨论中, 我们将考虑两个近邻量子比特之间的配对纠缠. 哈密顿量 (2) 式的本征值为

$$\begin{aligned} E_{0,1} &= 0, \\ E_{2,3} &= -2J, \\ E_{4,5} &= 2J, \\ E_{6,7} &= 2J\Delta, \\ E_{8,9} &= -J\Delta \mp s, \\ E_{10,11} &= -2JD, \\ E_{12,13} &= 2JD, \\ E_{14,15} &= -J\Delta \mp m. \end{aligned} \quad (3)$$

相应的本征矢为

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|0011\rangle - |1100\rangle), \\ |\psi_1\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|0110\rangle - |1001\rangle), \\ |\psi_{2,4}\rangle &= \frac{1}{2} (|1011\rangle + |1110\rangle \\ &\quad \mp |1101\rangle \mp |0111\rangle), \\ |\psi_{3,5}\rangle &= \frac{1}{2} (|0010\rangle + |1000\rangle \\ &\quad \mp |0001\rangle \mp |0100\rangle), \\ |\psi_6\rangle &= |1111\rangle, \\ |\psi_7\rangle &= |0000\rangle, \\ |\psi_8\rangle &= a_0 \left[ (|0011\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1100\rangle) \right. \\ &\quad \left. - \frac{J\Delta + s}{2J} (|0101\rangle + |1010\rangle) \right], \\ |\psi_9\rangle &= a_1 \left[ (|0011\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1100\rangle) \right. \\ &\quad \left. - \frac{J\Delta - s}{2J} (|0101\rangle + |1010\rangle) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_{10,12}\rangle &= \frac{1}{2} (|1110\rangle - |1011\rangle \\ &\quad \pm i|1101\rangle \pm i|0111\rangle), \\ |\psi_{11,13}\rangle &= \frac{1}{2} (|1000\rangle - |0010\rangle \\ &\quad \pm i|0100\rangle \mp i|0001\rangle), \\ |\psi_{14}\rangle &= a_2 \left[ (|0011\rangle - |0110\rangle \right. \\ &\quad \left. - |1001\rangle + |1100\rangle) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{J\Delta + m}{2JD} (|0101\rangle + |1010\rangle) \right], \\ |\psi_{15}\rangle &= a_3 \left[ (|0011\rangle - |0110\rangle \right. \\ &\quad \left. - |1001\rangle + |1100\rangle) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{J\Delta - m}{2JD} (|0101\rangle + |1010\rangle) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

这里

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{J^2(8D^2 + \Delta^2)}, \\ s &= \sqrt{J^2(8 + \Delta^2)}, \\ a_{0,1} &= \sqrt{\frac{J}{J(\Delta^2 + 8) \pm \Delta s}}, \\ a_{2,3} &= \sqrt{\frac{JD^2}{J(\Delta^2 + 8D^2) \pm \Delta m}}. \end{aligned}$$

对于四量子比特  $XXZ$  模型, 存在以下两种类型的热纠缠: 最近邻两量子比特之间的热纠缠和次近邻两量子比特之间的热纠缠. 本文将分别讨论这两种类型的热纠缠. 由以上的本征值和本征矢, 可以求出温度为  $T$  时系统的密度矩阵

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{15} \exp(-\beta E_n) |\psi_n\rangle \langle \psi_n|.$$

这里

$$\beta = \frac{1}{k_B T},$$

其中  $k_B$  为玻尔兹曼常数, 在下面的讨论中取自然单位, 即  $k_B = 1$ ;  $Z$  为配分函数,

$$\begin{aligned} Z &= 2 + 4\cosh\left(\frac{2J}{T}\right) + 4\cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) \\ &\quad + 2\exp\left(-\frac{2J\Delta}{T}\right) + 2\exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \\ &\quad \times \left[ \cosh\left(\frac{s}{T}\right) + \cosh\left(\frac{m}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

我们计算得到最近邻量子比特 1 和量子比特 2 的约化密度矩阵  $\rho_{12}(T) = \text{tr}_{34}[\rho(T)]$ , 即

$$\rho_{12}(T) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & y_1 & 0 \\ 0 & y_1^* & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

这里

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} + \cosh\left(\frac{2J}{T}\right) + \cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) + \exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \\ &\times \left[ a_0^2 a_4 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 a_6 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) \right. \\ &\left. + a_2^2 a_8 \exp\left(\frac{m}{T}\right) + a_3^2 a_{10} \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right], \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} + \cosh\left(\frac{2J}{T}\right) + \exp\left(-\frac{2J\Delta}{T}\right) + \cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) \\ &+ \exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \left[ a_0^2 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) \right. \\ &\left. + a_2^2 \exp\left(\frac{m}{T}\right) + a_3^2 \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right], \\ \nu_1 &= \mu_1, \\ y_1 &= -\sinh\left(\frac{2J}{T}\right) + i \sinh\left(\frac{2JD}{T}\right) + \exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \\ &\times \left[ -a_0^2 a_5 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 a_7 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) \right. \\ &\left. - a_2^2 a_9 \exp\left(\frac{m}{T}\right) - a_3^2 a_{11} \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{4,6} &= 1 + \frac{(s \pm J\Delta)^2}{4J^2}, \\ a_{5,7} &= \frac{s \pm J\Delta}{J}, \\ a_{8,10} &= 1 + \frac{(J\Delta \pm m)^2}{4J^2 D^2}, \\ a_{9,11} &= \frac{J\Delta \pm m}{JD}. \end{aligned}$$

次近邻量子比特 1 和量子比特 3 的约化密度矩阵为

$\rho_{13}(T) = \text{tr}_{24}[\rho(T)]$ , 即

$$\rho_{13}(T) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & y_2 & 0 \\ 0 & y_2^* & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

这里

$$\begin{aligned} w_2 &= 1 + \cosh\left(\frac{2J}{T}\right) + \cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) + 2\exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \\ &\times \left[ a_0^2 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) + a_2^2 \exp\left(\frac{m}{T}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. + a_3^2 \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right],$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \cosh\left(\frac{2J}{T}\right) + \exp\left(-\frac{2J\Delta}{T}\right) + \cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) \\ &+ \exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \left[ a_0^2 a_4 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 a_5 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) \right. \\ &\left. + a_2^2 a_6 \exp\left(\frac{m}{T}\right) + a_3^2 a_7 \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\nu_2 = \mu_2,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \cosh\left(\frac{2J}{T}\right) - \cosh\left(\frac{2JD}{T}\right) + 2\exp\left(\frac{J\Delta}{T}\right) \\ &\times \left[ a_0^2 \exp\left(\frac{s}{T}\right) + a_1^2 \exp\left(-\frac{s}{T}\right) - a_2^2 \exp\left(\frac{m}{T}\right) \right. \\ &\left. - a_3^2 \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \right]. \end{aligned}$$

为了研究四量子比特的热纠缠性质,在  $N$  量子比特  $XXZ$  环中,我们计算量子比特  $i$  和量子比特  $j$  之间的配对纠缠度  $C_{ij}$ . 配对纠缠度  $C_{ij}$  [24-26] 定义为

$$C_{ij} = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (8)$$

其中  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是算子

$$R_{ij} = \rho_{ij}(\sigma_i^y \otimes \sigma_j^y) \rho_{ij}^*(\sigma_i^y \otimes \sigma_j^y)$$

本征值的平方根,满足  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ . 配对纠缠度  $C_{ij}$  的取值从 0 到 1,  $C_{ij} = 0$  表示非纠缠态,  $C_{ij} = 1$  对应于最大纠缠态,  $0 < C_{ij} < 1$  为部分纠缠.

由方程(5)和(6)求得最近邻量子比特 1 和量子比特 2 情况下,算子  $R_{12}$  本征值的四个平方根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{w_1 + |y_1|}{Z}, \\ \lambda_2 &= \frac{w_1 - |y_1|}{Z}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \frac{\sqrt{\mu_1 \nu_1}}{Z}. \end{aligned} \quad (9)$$

相应的配对纠缠度为

$$C_{12} = \frac{2}{Z} \max\{|y_1| - \sqrt{\mu_1 \nu_1}, 0\}. \quad (10)$$

同理,由方程(5)和(7)求得次近邻量子比特 1 和量子比特 3 情况下,算子  $R_{13}$  本征值的四个平方根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{w_2 + |y_2|}{Z}, \\ \lambda_2 &= \frac{w_2 - |y_2|}{Z}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = \frac{\sqrt{\mu_2 \nu_2}}{Z}. \end{aligned} \quad (11)$$

相应的配对纠缠度为

$$C_{13} = \frac{2}{Z} \max\{|y_2| - \sqrt{\mu_2 \nu_2}, 0\}. \quad (12)$$

### 3. 结果及讨论

首先,我们考虑次近邻两量子比特之间的热纠缠. 文献[9]研究发现,当忽略 DM 相互作用且没有磁场的情况下,在四量子比特  $XX$  模型中次近邻两量子比特之间不存在热纠缠. 本文考虑四量子比特  $XXZ$  模型,计算结果表明,无论是对铁磁模型还是对反铁磁模型,DM 相互作用都不会诱导次近邻两量子比特之间产生热纠缠,即  $C_{13} = (D, \Delta, T) = 0$ .

接着,讨论最近邻两量子比特之间的热纠缠. 对于两量子比特  $XXZ$  模型,文献[4]研究发现,热纠缠存在与否决定于各向异性参数  $\Delta$  和耦合系数  $J$ ,在 DM 相互作用下,铁磁和反铁磁情况具有相同的热纠缠性质. 文献[21]研究发现,对于三量子比特

$XXZ$  模型,引入 DM 相互作用后,可以使原本不存在热纠缠的反铁磁自旋链产生纠缠,而且对于铁磁和反铁磁这两种  $XXZ$  自旋链,DM 相互作用和各向异性参数  $\Delta$  对热纠缠具有不同的影响. 本文讨论四量子比特  $XXZ$  模型,分析得出,在 DM 相互作用下,铁磁和反铁磁情况具有相同的热纠缠性质.

下面我们讨论在相同的温度  $T$  下,当 DM 相互作用参量  $D$  取不同值时配对纠缠度  $C_{12}$  随  $J$  和  $\Delta$  的变化关系. 图 1 描述的是温度  $T = 1$ ,  $D$  取不同值时,配对纠缠度  $C_{12}$  随  $J$  和  $\Delta$  的变化. 由图 1 可以看出:不存在 DM 相互作用时,铁磁与反铁磁系统都存在热纠缠,而且存在一个关于  $J$  和  $\Delta$  的区域,在这个区域内热纠缠趋稳定值;引入 DM 相互作用后,发现随着 DM 相互作用参量  $D$  的增加,纠缠趋于稳定区域的面积逐渐增大,但配对纠缠度  $C_{12}$  逐渐减小. 由以上分析可知,引入 DM 相互作用可以拓展纠缠的范围,但同时也会使配对纠缠度  $C_{12}$  减小.

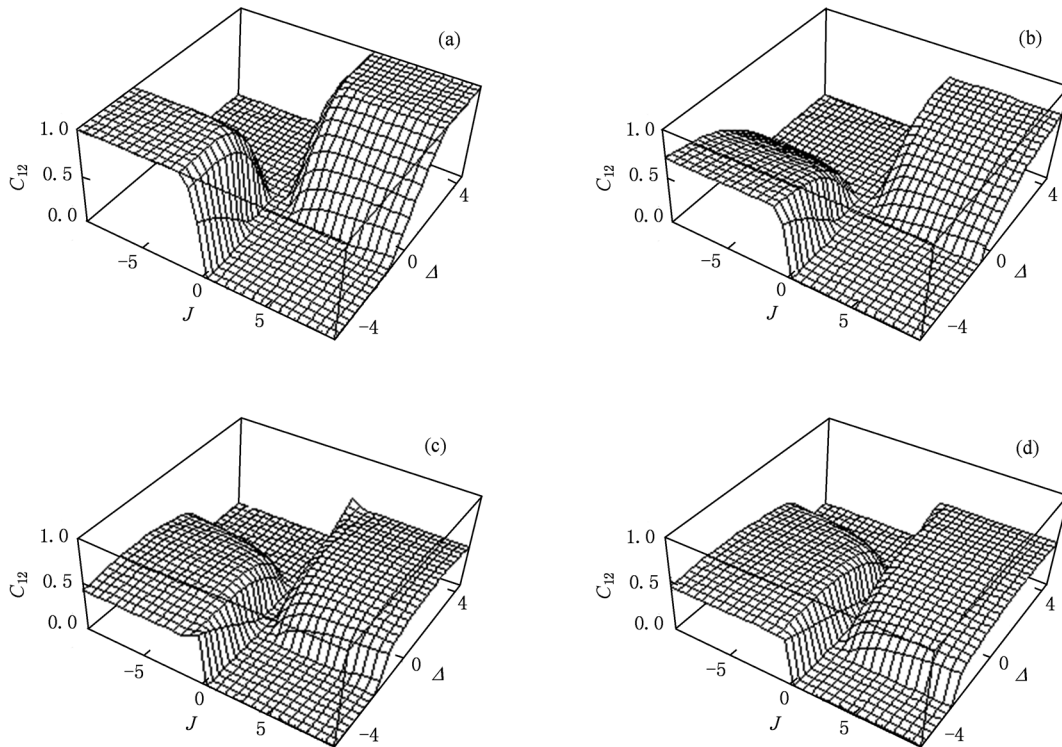


图 1 当 DM 相互作用参量  $D$  取不同值时,配对纠缠度  $C_{12}$  随  $J$  和  $\Delta$  的变化 温度  $T = 1$ . (a)  $D = 0$ , (b)  $D = 1.0$ , (c)  $D = 2.0$ , (d)  $D = 3.0$

现在讨论在不同的参数下配对纠缠度  $C_{12}$  随  $D$  的变化关系. 图 2 描述的是反铁磁 ( $J > 0, \Delta > 0$ ) 情况下,当各向异性参数  $\Delta$  取不同值时,在不同的温

度  $T$  下配对纠缠度  $C_{12}$  随 DM 相互作用参量  $D$  的变化. 分析图 2 (a) 可以发现:在温度  $T$  为零的情况下,当  $D \leq 1$  时,配对纠缠度  $C_{12}$  随着各向异性参数  $\Delta$

的增加而增加,在  $D = 1$  处,配对纠缠度  $C_{12}$  经历一个突变,而当  $D > 1$  时,配对纠缠度  $C_{12}$  受各向异性参数  $\Delta$  的影响相对较小;而当  $\Delta$  为零时,随着 DM 相互作用参量  $D$  的增大,配对纠缠度  $C_{12}$  始终为一个恒定值. 从图 2(b), (c) 和 (d) 可以看出:当温度  $T$  不为零时,配对纠缠度  $C_{12}$  随 DM 相互作用参量  $D$  的变化曲线在某个  $D^*$  值附近会出现一个“峡谷”的形状. 随着温度  $T$  的升高,“峡谷”的区域逐渐展宽而平滑;而且随着各向异性参数  $\Delta$  的增加, $D^*$  的值逐渐加大. 如当  $T = 0.5$  时,对  $\Delta = 0, 0.5, 1.0$  和  $1.5$  而言, $D^*$  分别为  $0.978, 1.052, 1.132$  和  $1.213$ . 在

有限温度下,当 DM 相互作用参量  $D$  小于  $D^*$  时,由于最大纠缠态与其他态混合在一起,因此观察到纠缠度随参量  $D$  的增加而单调减小. 另一方面,当参量  $D$  大于  $D^*$  时,DM 相互作用更有利于纠缠态的产生,同时抑制了温度和各向异性参数对纠缠态的影响,随着参量  $D$  的增加,系统逐渐趋近零温时的基态,因此可以观察到纠缠度随参量  $D$  的增加而增大,并逐渐趋近零温时的结果. Kamta 等<sup>[6]</sup> 的研究工作也注意到这种纠缠态的恢复现象,他们讨论了在两量子比特的 XY 模型中伴随磁场增加而出现的纠缠态恢复.

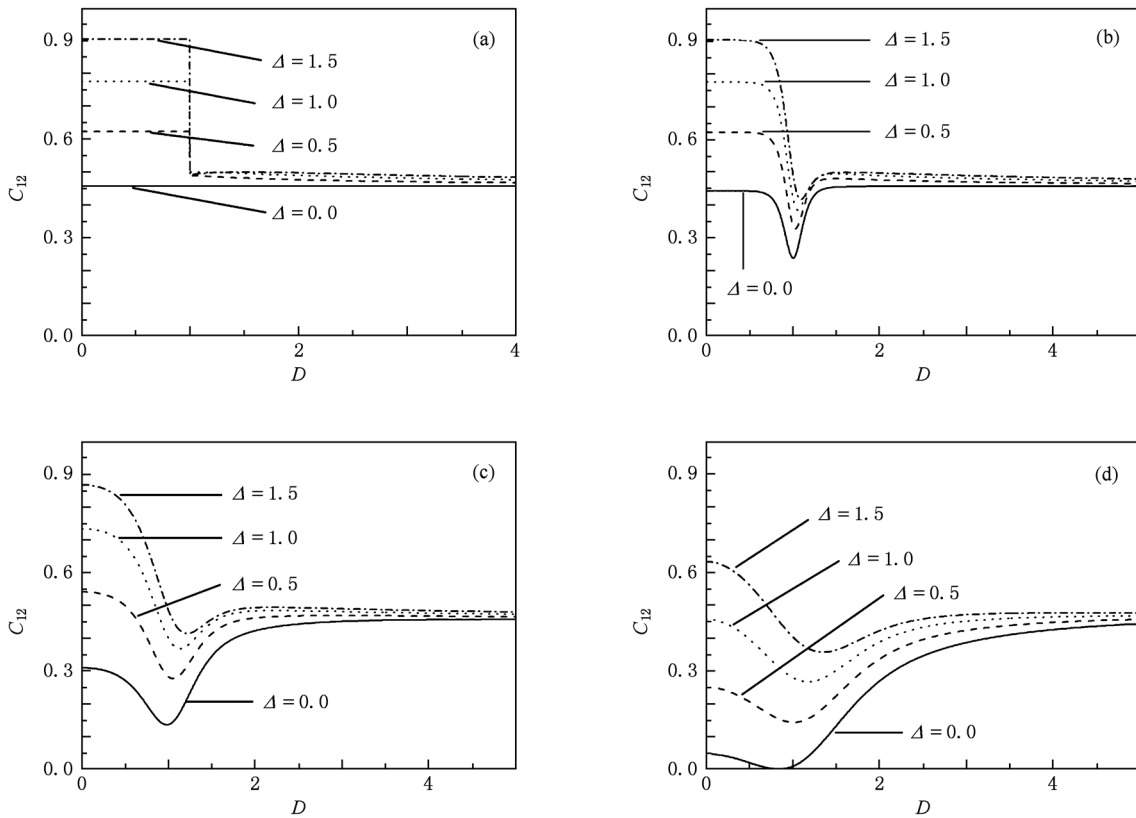


图 2 当各向异性参数  $\Delta$  取不同值时,在不同的温度  $T$  下配对纠缠度  $C_{12}$  随  $D$  的变化  $J = 1$ . (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 0.2$ , (c)  $T = 0.5$ , (d)  $T = 1.0$

图 3 描述的是反铁磁 ( $J > 0, \Delta > 0$ ) 情况下,当 DM 相互作用参量  $D$  取不同值时,在不同的各向异性参数  $\Delta$  下配对纠缠度  $C_{12}$  随温度  $T$  的变化. 由图 3 可以看出,配对纠缠度  $C_{12}$  随着温度  $T$  的增加而减小直至消失. 这说明存在一个临界温度  $T_c$ , 当  $T \geq T_c$  时,  $C_{12}(T) = 0$ ; 当 DM 相互作用参量  $D$  相同时,随着各向异性参数  $\Delta$  的增加,配对纠缠度  $C_{12}$  逐渐增大; 当各向异性参数  $\Delta$  相同时,随着 DM 相互作用参量  $D$  的增加,临界温度  $T_c$  逐渐增大,即当 DM 相

互作用参量  $D$  增加时,需要一个更高的温度  $T$ , 配对纠缠度  $C_{12}$  才能消失.

图 4 描述的是反铁磁 ( $J > 0, \Delta > 0$ ) 情况下,当各向异性参数  $\Delta$  取不同值时,临界温度  $T_c$  随 DM 相互作用参量  $D$  的变化. 仔细分析可以得出:当各向异性参数  $\Delta$  为零时,DM 相互作用参量  $D$  存在一个特殊值  $D_0$ , 即在  $|D_0| = 1$  处,临界温度  $T_c$  达到它的极小值 ( $T_c = 1.0387$ ), 而  $|D| > |D_0|$  时,临界温度随着 DM 相互作用参量  $D$  的增加而增加. 当各向异性参数  $\Delta$  逐渐

增大时,临界温度  $T_c$  将随 DM 相互作用参量  $D$  的绝对值的增加而增大,且  $D_0$  的绝对值逐渐减小直至为零.

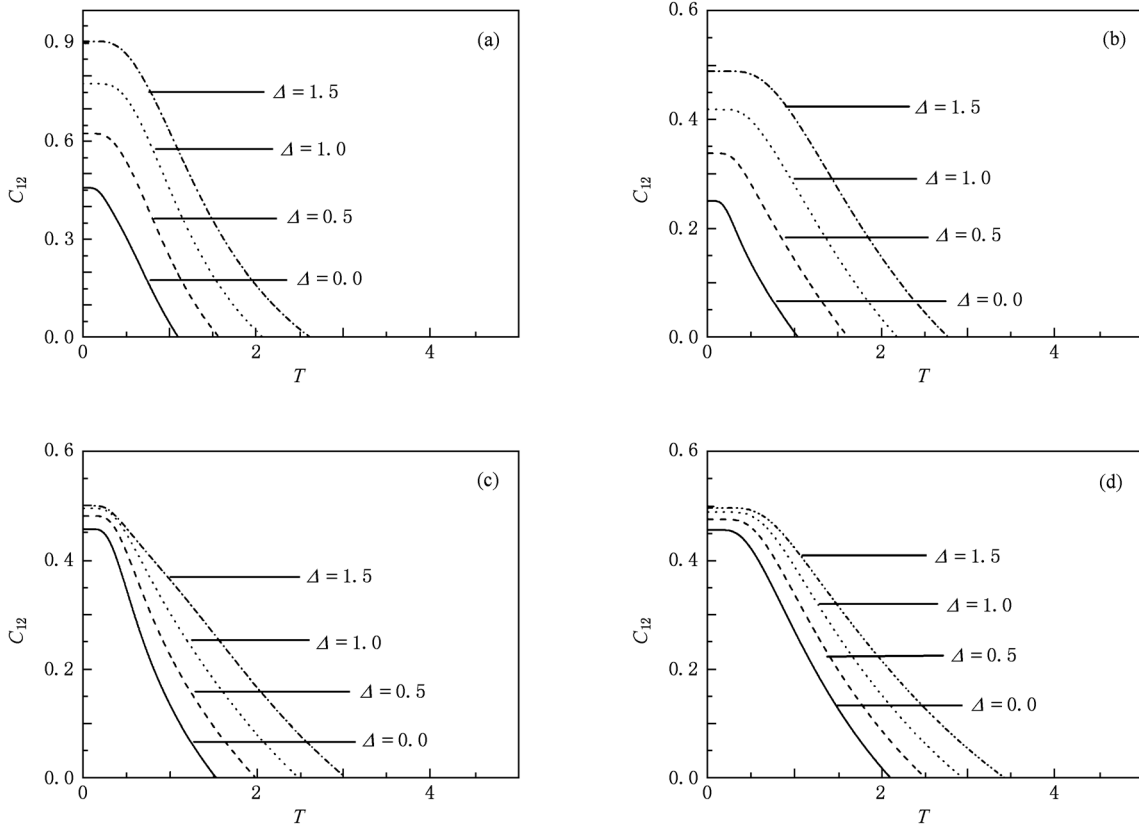


图3 当 DM 相互作用参量  $D$  取不同值时,在不同的各向异性参数  $\Delta$  下配对纠缠度  $C_{12}$  随温度  $T$  的变化  $J = 1$ . (a)  $D = 0$ , (b)  $D = 1.0$ , (c)  $D = 1.5$ , (d)  $D = 2.0$

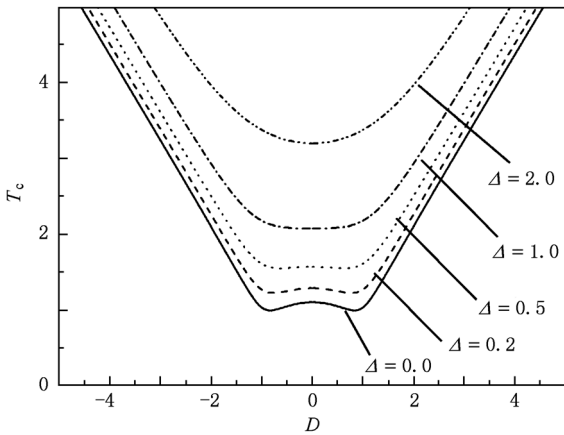


图4 当各向异性参数  $\Delta$  取不同值时,临界温度  $T_c$  随 DM 相互作用参量  $D$  的变化  $J = 1$

#### 4. 结 论

本文通过计算配对纠缠度,研究了具有 DM 相互作用的四量子比特海森堡  $XXZ$  模型的热纠缠性质,计算得到配对纠缠度随各种参数的变化规律. 研究表明:对于铁磁和反铁磁这两种情形而言,次近邻两量子比特之间不存在配对热纠缠;但在最近邻两量子比特情况时,DM 相互作用和各向异性参数  $\Delta$  对热纠缠和临界温度  $T_c$  都有重要的影响,且随着温度  $T$  的增加,配对纠缠度逐渐减小直至消失. 因此,选择和调整合适的 DM 相互作用参量和各向异性参数,可以有效地控制和提高配对热纠缠.

[1] Boto A N, Kok P, Abrams D S, Braunstein S L, Williams C P, Dowling J P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733

[2] Preskill J 2000 *Mod. Opt.* **47** 127

[3] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87**

- 017901
- [4] Wang X G 2001 *Phys. Lett. A* **281** 101
- [5] Wang X G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 034302
- [6] Kamta G L, Starace A F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 107901
- [7] Sun Y, Chen Y G, Chen H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 044301
- [8] Zhou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev. A* **68** 024301
- [9] Cao M, Zhu S Q 2005 *Phys. Rev. A* **71** 034311
- [10] Asoudeh M, Karimipour V 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022308
- [11] Zhang G F, Li S S 2005 *Phys. Rev. A* **72** 034302
- [12] Cao M, Zhu S Q 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2888
- [13] Wu K D, Zhou B, Cao W Q 2007 *Phys. Lett. A* **362** 381
- [14] Zhang G F 2007 *Phys. Rev. A* **75** 034304
- [15] Li D C, Wang X P, Cao Z L 2008 *J. Phys. : Condens. Matter* **20** 325229
- [16] Li D C, Cao Z L 2008 *Eur. Phys. J. D* **50** 207
- [17] Ma X S, Zhang J Y, Cong H S, Wang A M 2008 *Sci. China G* **51** 1987
- [18] Abliz A, Cai J T, Zhang G F, Jin G S 2009 *J. Phys. B* **42** 215503
- [19] Ren J Z, Shao X Q, Zhang S, Yeon K H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100307
- [20] Zhang G F, Jia X J, Yan Q W, Liang J Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2393 (in Chinese)[张国锋、贾新娟、严启伟、梁九卿 2003 物理学报 **52** 2393]
- [21] Wang Y H, Xia Y J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7479 (in Chinese)[王彦辉、夏云杰 2009 物理学报 **58** 7479]
- [22] Shekhtman L, Wohlman E O, Aharony A 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 836
- [23] Shu L, Chen Y G, Chen H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 902 (in Chinese)[姜蕾、陈宇光、陈鸿 2002 物理学报 **51** 902]
- [24] Hill S, Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022
- [25] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [26] Coffman V, Kundu J, Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306

## Thermal entanglement in the four-qubit Heisenberg $XXZ$ model with the Dzyaloshinskii-Moriya interaction \*

Zhang Ying-Li Zhou Bin<sup>†</sup>

(School of Physics and Electronic Technology, Hubei University, Wuhan 430062, China)

(Received 9 November 2010; revised manuscript received 12 August 2011)

### Abstract

In this paper, we study the property of thermal entanglement in four-qubit Heisenberg model, where Dzyaloshinskii-Moriya (DM) interaction is considered, and investigate the pairwise concurrences of two nearest-neighbor qubits and two next-neighbor qubits to study this entanglement property. The result shows that for the two-next-neighbor-qubit case, there exists pairwise concurrence neither in ferromagnetic model nor in antiferromagnetic model; but for the two-nearest-neighbor-qubits case, the DM interaction and the parameter of the anisotropy exchange coupling  $\Delta$  have a significant influence on the pairwise entanglement and critical temperature  $T_c$ . Moreover, the pairwise concurrence will decrease with the increase of temperature. When the temperature exceeds its critical value, the pairwise concurrence disappears. Therefore, the pairwise entanglement can be controlled and enhanced by choosing the appropriate parameters of the DM interaction and the anisotropy exchange coupling.

**Keywords:** pairwise entanglement,  $XXZ$  model, Dzyaloshinskii-Moriya interaction

**PACS:** 03.65.Ud

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974046), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2009CDB360), and the Key Program of the Scientific Research of the Education Bureau of Hubei Province, China (Grant No. D20101004).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: binzhou@hubu.edu.cn