

玻色-爱因斯坦凝聚系统的量子 Fisher 信息与混沌*

宋立军^{1)†} 严冬¹⁾ 刘焯²⁾

1)(长春大学理学院, 长春 130022)

2)(长春理工大学理学院, 长春 130022)

(2011年2月28日收到; 2011年6月15日收到修改稿)

量子 Fisher 信息作为经典 Fisher 信息的自然推广, 与量子信息中的纠缠判断具有密切联系. 在表现为典型量子混沌特征的受击两分量玻色-爱因斯坦凝聚系统中, 研究了与经典相空间对应的纠缠和量子 Fisher 信息动力学性质. 结果表明, 初次撞击后的系统量子态是纠缠的, 与初态所处相空间中的混乱程度无关. 而量子 Fisher 信息的动力学演化对系统初态非常敏感, 当初态处于混沌区域时, 量子 Fisher 信息值比初态处于规则区域时大. 利用这种较好的量子-经典对应关系, 得到量子 Fisher 信息可以刻画量子混沌的结论.

关键词: 量子 Fisher 信息, 玻色-爱因斯坦凝聚, 量子混沌, 量子-经典对应

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk, 05.45.Mt, 42.50.Dv

1. 引言

1995年, 实验上首次实现了玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)^[1,2], 其丰富多彩的动力学行为引起了人们的广泛兴趣, 研究人员观测到宏观量子隧穿、相干、量子涡旋、非线性孤子和超流等现象. 这种新物态使我们可以用原子代替光子观测非线性效应. BEC 不仅对基础研究具有重要意义, 同时也在许多技术领域(如芯片技术、精密测量和纳米技术等)都有着广阔的应用前景, 这使得 BEC 成为理论和实验研究的一个热门课题. 对于双势阱和两分量 BEC 模型虽然形式上比较简单, 却有着丰富的物理内涵, 被广泛地用于研究 BEC 的各种动力学性质. 特别是在周期驱动下双势阱和受击两分量 BEC 系统中都存在不稳定性(混沌)现象^[3-7]. 而混沌可以破坏原子之间的相干性, 导致 BEC 瓦解, 所以对 BEC 中的混沌控制研究具有重要意义. 考虑量子力学中不确定关系的存在, 量子测量误差不可避免, 而当系统受到外界环境或某个控制参数一个小的扰动

后, 系统量子动力学演化的敏感性与混沌对初值敏感性非常类似, 因而结合两种敏感性开展相关课题研究具有重要的意义. 近年来, 随着量子信息科学的发展, 人们开始尝试利用一些量子信息概念来理解 BEC 系统的量子混沌性质并取得了一些重要的研究成果, 例如量子关联或纠缠^[8-14]、保真度^[15,16]和自旋压缩^[17-20]等, 这些成果揭示了量子动力学过程中系统演化对初态的敏感性. 最近的研究表明, 量子 Fisher 信息可以作为多体纠缠的一个判据^[21]. 因为纠缠可以对非线性系统中的量子混沌进行有效刻画^[12], 所以考虑在 BEC 系统中引入量子 Fisher 信息作为标识量子混沌的一种手段. 由于量子 Fisher 信息在参数估计上的成功应用, 因此在量子混沌系统中研究量子 Fisher 信息可以带来全新的物理观点. 本文对周期性脉冲作用下两分量 BEC 系统的量子 Fisher 信息动力学性质进行了研究, 发现量子 Fisher 信息对系统初态非常敏感, 可以利用量子 Fisher 信息对系统的混沌进行有效刻画并判断系统量子态是否为纠缠, 从而为 BEC 系统中混沌控制的实验实现提供了一种新的

* 国家自然科学基金(批准号: 10947019)、教育部科学技术研究计划重点项目(批准号: 211040)、吉林省自然科学基金(批准号: 20101514)资助的课题.

† E-mail: ccdxslj@126.com

思路.

2. 受击两分量 BEC 系统

所谓两分量 BEC 系统是指凝聚原子布居在两个不同的超精细态上. 这样的两分量 BEC 系统在周期性脉冲撞击下, 其动力学遵守一个非线性陀螺模型^[22]. 依赖于原子之间的相互作用强度, 在经典极限下, 系统可以显示规则或者混沌行为. 采用标准的旋波近似, 系统哈密顿量可以表示成以下形式:

$$\hat{H} = \mu(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) + g(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b})^2 + K\delta_T(t)(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}). \quad (1)$$

这里 \hat{a} (\hat{a}^\dagger) 和 \hat{b} (\hat{b}^\dagger) 为原子的湮没 (产生) 算符, 参数 μ 为两分量之间的化学势差, g 为相互作用强度, K 为两内部量子态间的耦合强度系数, $\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ 为辐射场对 BEC 系统周期为 T 的脉冲函数, 其中 n 为撞击次数. 引入角动量算符

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}),$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}),$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}),$$

两分量 BEC 系统的哈密顿量可以简化为

$$\hat{H} = \mu\hat{J}_z + g\hat{J}_z^2 + K\delta_T(t)\hat{J}_x. \quad (2)$$

通过 Floquet 算符可以得到一个标准的动力学描述^[22]

$$\hat{F} = \exp[-i\hbar(\mu\hat{J}_z + g\hat{J}_z^2)T] + \exp(-i\hbar K\hat{J}_x). \quad (3)$$

本文选择自旋相干态

$$|\psi_0\rangle = R(\theta, \varphi)$$

$$= \exp[-i\theta(\hat{J}_x \sin\phi - i\hat{J}_y \cos\phi)] |j, -j\rangle$$

为初态, $|j, -j\rangle$ 为 \hat{J}_z 的本征态, 它是张在希尔伯特空间中 $2j+1$ 维的矢量, 其中 $j = N/2$, N 为体系的原子数. 这样, 在薛定谔图像中, 体系的演化满足

$$|\psi_n\rangle = F^n |\psi_0\rangle. \quad (4)$$

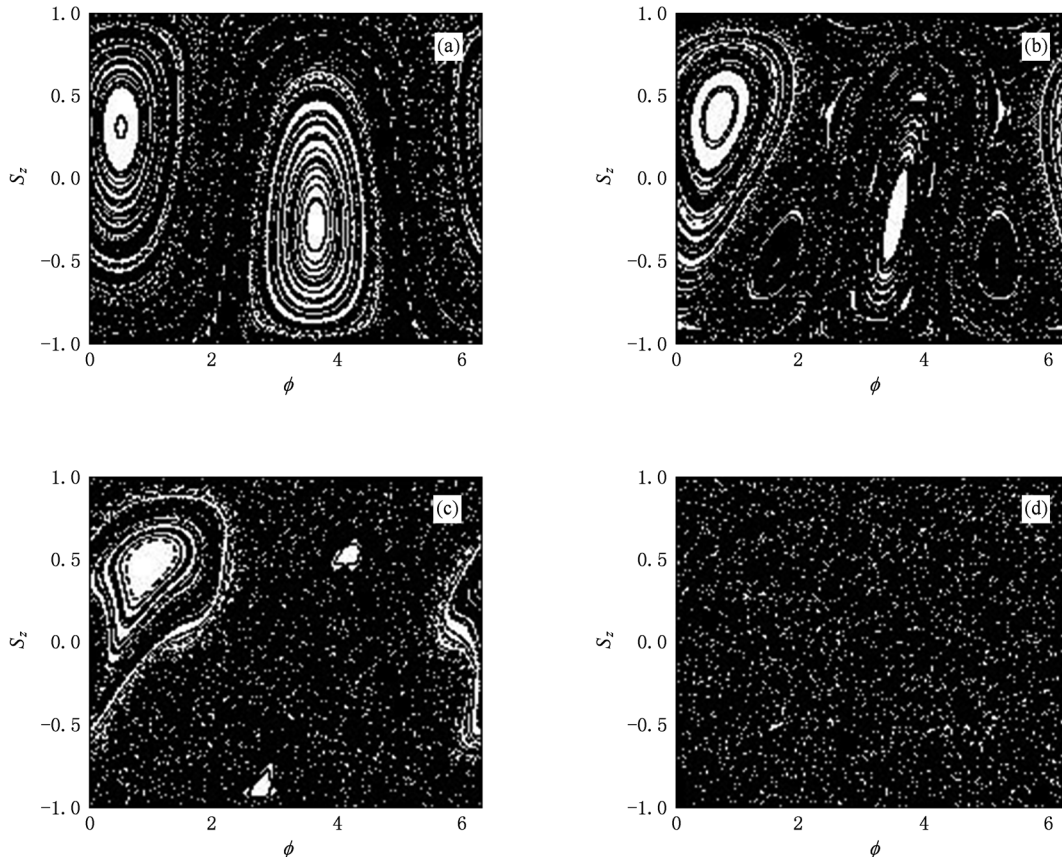


图1 当 $\mu = T = 1, K = 2, g_c = 0.1, 0.5, 1, 4$ 时经典相空间轨道 (a) $g_c = 0.1$, (b) $g_c = 0.5$, (c) $g_c = 1$, (d) $g_c = 4$

利用 $S_x = \langle \hat{J}_x/j \rangle, S_x S_y = \langle \hat{J}_x \hat{J}_y/j^2 \rangle (j \rightarrow \infty, \text{即 } N \rightarrow \infty)$ 经典近似手段,可以得到下列经典哈密顿形式:

$$\hat{H} = \mu \hat{S}_z + g_c \hat{S}_z^2 + K \delta_T(t) \hat{S}_x. \quad (5)$$

这里 $g_c = gj$. 相应的经典动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= S_{x,n}, \\ \dot{S}_y &= S_{y,n} \cos K - S_z \sin K, \\ \dot{S}_z &= S_{y,n} \sin K + S_z \cos K; \\ S_{x,n+1} &= \dot{S}_x \cos[(\mu + g + g_c \dot{S}_z)T] \\ &\quad - \dot{S}_y \sin[(\mu + g + g_c \dot{S}_z)T], \\ S_{y,n+1} &= \dot{S}_x \sin[(\mu + g + g_c \dot{S}_z)T] \\ &\quad + \dot{S}_y \cos[(\mu + g + g_c \dot{S}_z)T], \\ S_{z,n+1} &= \dot{S}_z. \end{aligned} \quad (6)$$

利用方程(6),通过数值计算可以得到相应的经典相空间图. 图1所示为不同参数下的经典相空间图. 由图1可以发现,当参数 μ, K 给定后,随着相互作用强度参数 g_c 的增大,首先导致周期轨道被破坏,产生一些新的椭圆点. 然后每个椭圆点和围绕它的不变环面组成一些新的规则区域,如图1(b)所示. 当作用强度进一步增大后,大多数的不变环面被破坏,产生四个明显的岛屿被包围在混沌海中,如图1(c)所示. 最后,当 g_c 继续增大时,这些岛屿也被逐渐破坏,系统进入完全混沌状态,如图1(d)所示.

3. 量子 Fisher 信息

经典 Fisher 信息是估计理论中一个非常重要的概念. 估计理论是统计学和信号处理的一个分支,主要是通过测量或经验数据来估计分布参数的值. 量子 Fisher 信息^[23-25]作为经典 Fisher 信息的自然推广,产生于 20 世纪 60 年代数学量子统计研究中. 但是量子化 Fisher 信息定义的方法并不唯一,这里采用对称对数求导 (symmetric logarithmic derivative, 简记为 SLD) 方法. 我们考虑一个量子态 $\rho(\theta)$, 其中 θ 为参数,有关 θ 的量子 Fisher 信息定义如下:

$$F_Q(\theta) = \text{tr}[\rho(\theta)L_\theta^2]. \quad (7)$$

这里 L_θ 为 SLD 算符,可用下列公式表示:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \rho(\theta) = \frac{1}{2} [L_\theta \rho(\theta) + \rho(\theta) L_\theta]. \quad (8)$$

利用(7)式将(8)式改写成如下形式:

$$\begin{aligned} F_Q(\theta) &= \sum_i \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} p_i\right)^2}{p_i} \\ &\quad + 2 \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} \left| \left\langle \varphi_j \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_i \right\rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $|\varphi_i\rangle$ 和 p_i 分别是 ρ 的本征矢和本征值. 如果想通过测量 $\rho(\theta)$ 来估计参数 θ , 则参数 θ 的偏差 $\Delta\theta$ 由一个基本下界来限制,即 $\Delta\theta$ 可用量子 Cramer-Rao 不等式表示为

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\text{QCR}} \equiv \frac{1}{\sqrt{F_Q(\theta)}}. \quad (10)$$

如果(10)式中的 $F_Q(\theta)$ 比较大,则估计偏差就比较小.

这里主要是利用量子 Fisher 信息描述系统的动力学性质,所以考虑下面这样一个量子测量过程. 首先,假设由 N 个自旋 1/2 粒子构成的系统,并将它作为一个探测器. 然后,绕任意方向 \mathbf{n} 转动一个角度 θ , 这个过程可以表示为

$$\rho(\theta) = \exp(-i\theta J_n) \rho_{in} \exp(i\theta J_n),$$

其中 $J_n = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$. 最后,通过测量 $\rho(\theta)$ 来估计参数 θ . 这样可以将 θ 的量子 Fisher 信息表示为 $F_Q[\rho_{in}, J_n]$. 当取 $\rho(\theta)$ 和 ρ_{in} 为相同值时,量子 Fisher 信息可表示为

$$F_Q[\rho_{in}, J_n] = \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \psi_j | J_n | \psi_i \rangle|^2. \quad (11)$$

对于一个纯态 $\rho_{in} = |\psi\rangle\langle\psi|$, 量子 Fisher 信息简化为

$$F_Q[\rho_{in}, J_n] = 4(\Delta J_n)^2, \quad (12)$$

其中

$$(\Delta J_n)^2 = \langle J_n^2 \rangle - \langle J_n \rangle^2.$$

文献[21]给出了一个利用量子 Fisher 信息判断系统纠缠的充分条件,即

$$\chi^2 \equiv \frac{N}{F_Q[\rho_{in}, J_n]} < 1. \quad (13)$$

如果考虑 Wineland 等^[26]给出的自旋压缩系数定义

$$\xi^2 = \frac{N(\Delta J_{n\perp})^2}{|\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|^2}, \quad (14)$$

则当量子态满足 $\xi^2 < 1$ 时系统是纠缠和压缩的. 由不确定关系式

$$(\Delta J_{n_1})^2 (\Delta J_{n_2})^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_{n_3} \rangle^2, \quad (15)$$

容易得到下列关系:

$$\chi^2 = \frac{N}{4(\Delta J_{n_1})^2} \leq \frac{N(\Delta J_{n_2})^2}{\langle J_{n_3} \rangle^2} = \xi^2. \quad (16)$$

因此,可以得到一个比自旋压缩系数更强的新的纠缠判据 $\chi^2 < 1$.

4. 量子 Fisher 信息动力学

在给出受击两分量 BEC 模型和量子 Fisher 信息概念后,下面利用量子 Fisher 信息来考察系统的动力学演化性质. 首先考察初态对量子 Fisher 信息的影响. 在图 1(c) 所示的规则区域与混沌区域相混合的经典相空间中取自旋相干态 $(0.4625, 0.9675)$, $(0.4625, 2.342)$, $(0.4625, 3.183)$ 为初态, 分别对应不动点处、规则区域与混沌区域交界处和混沌海中心三种典型情形. 图 2 给出了不同初态的量子 Fisher 信息随时间的演化曲线.

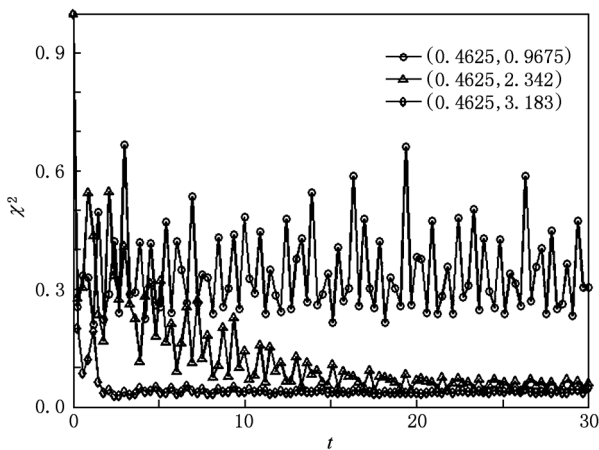


图 2 不同初态的 χ^2 随时间的演化 粒子数 $N = 60$

由图 2 可以看出,无论初态取在哪个位置,在第一次撞击后 χ^2 总是小于 1. 这说明系统在第一次撞击后,演化过程中态总是纠缠的. 但是,当初态选择处于混沌海中心时,第一次撞击后的演化曲线快速下降到某一个极小值并达到一种周期振荡的稳定状态. 而当初态选在不动点处时, χ^2 的值要比初态处于混沌海中心时小很多,并且第一次被撞击后演化曲线一直保持一种随机振荡状态. 而初态选择规则区域与混沌区域交界处时,对应的演化曲线则表现为一种非常好的过渡状态. 通过以上分析可以发现,量子 Fisher 信息对混沌系统的初态非常敏感,利

用量子 Fisher 信息可以更好地判断系统的纠缠. 同时表明混沌的发生使系统的 χ^2 值减小, $F_Q[\rho_{in}, J_n]$ 值增加,利用量子 Fisher 信息可以作为系统量子混沌的标识.

为了进一步讨论系统量子 Fisher 信息与混沌之间的关系,在图 1 的四个经典相空间图中分别随机取 300 个点作为系统 Fisher 信息演化的初态,然后将所有的 χ^2 取平均值,得到 $\bar{\chi}^2$ 随时间的演化曲线如图 3 所示. 从图 3 可以看出:当 $g_c = 0.1$ 时, $\bar{\chi}^2$ 随时间演化的曲线衰减较慢,系统的量子 Fisher 信息大约在 100 个时间单位后达到稳定状态;而当 $g_c = 4$ 时, $\bar{\chi}^2$ 曲线快速衰减到一个较小值,系统的量子 Fisher 信息大约在 3 个时间单位后即达到稳定状态. $g_c = 0.5$ 和 $g_c = 1$ 给出了一个较好的中间过渡状态. 与图 1 比较后可以明显发现,随着两个分量之间的相互作用强度不断增加,系统经典相空间逐渐由规则进入混沌,而反映系统量子性质的 χ^2 值则相应变小, $F_Q[\rho_{in}, J_n]$ 值变大,这表明经典混沌促进纠缠产生.

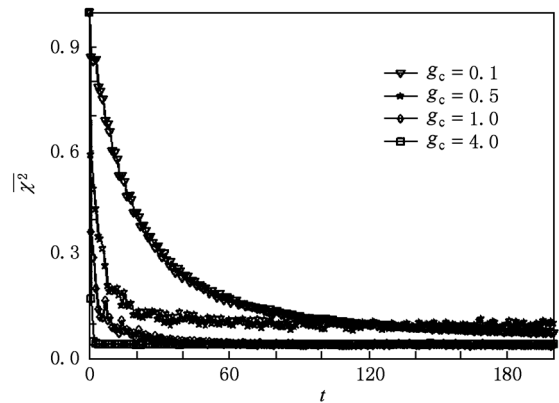


图 3 随机选择初态的 $\bar{\chi}^2$ 随时间的演化 粒子数 $N = 60$

为了考察受击两分量 BEC 模型中量子 Fisher 信息动力学的整体演化情况,将图 1 每个相空间图中的全体点作为初态进行演化,结果也验证了上述结论. 图 4 所示为取经典相空间中所有点为初态时, χ^2 随时间的演化(截断时间 $t = 30$),不同的灰度表示不同的 χ^2 值. 从图 4 可以发现,量子相空间的 χ^2 分布结构与经典相空间(图 1) 结构相比较非常相似. 例如:对于 $g_c = 0.1$ 情形,图 4(a) 中有三个明显的规则区域,与图 1(a) 具有非常好的对应关系. 对于 $g_c = 0.5$ (图 1(b)) 和 $g_c = 1$ (图 1(c)) 情形,经典相空间的一些小规则区域在 χ^2 随时间演化图

中也得到了较好刻画. 而对于 $g_c = 4$ (图 1(d)) 的经典全空间混沌情形, 在图 4(d) 中表现为全空间不存在规则结构, 两者具有非常理想的对应关系.

以上分析说明系统经典动力学与量子 Fisher 信息动力学之间存在紧密联系, 两者具有较好的对应关系.

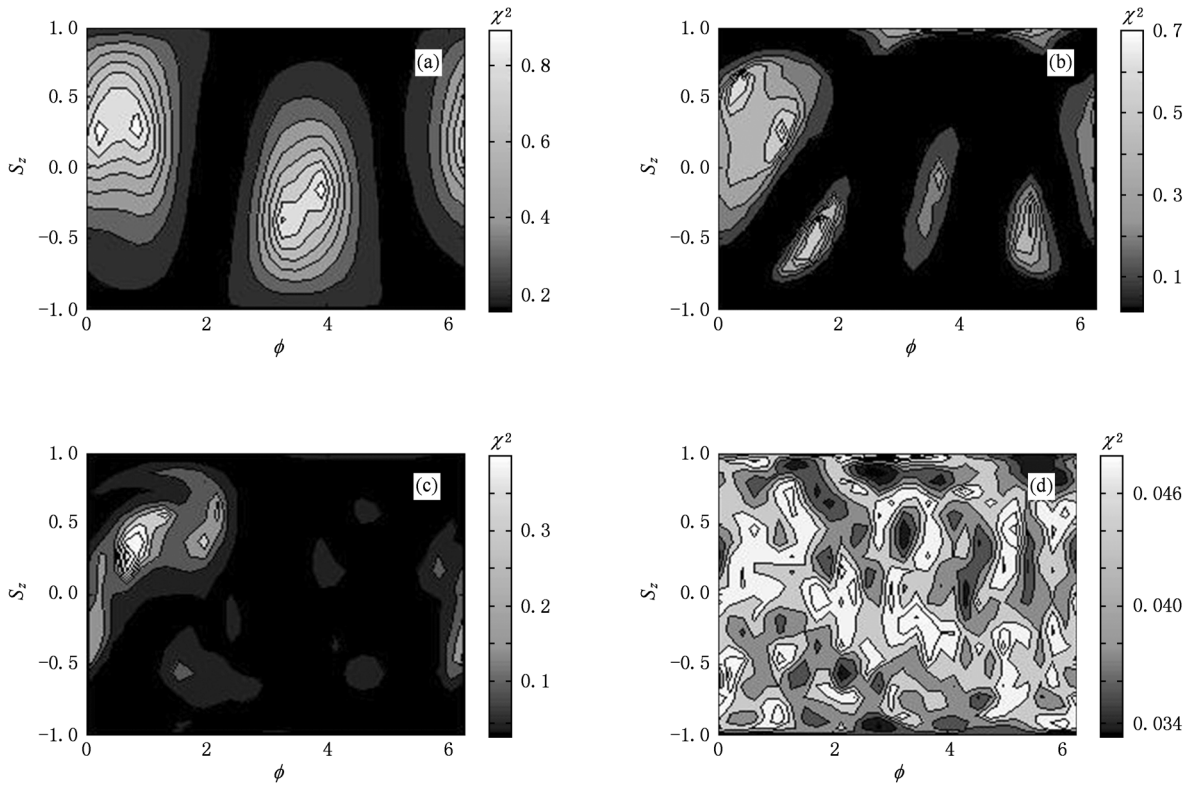


图 4 取经典相空间中所有点为初态时 χ^2 随时间的演化 截断时间 $t = 30$. (a) $g_c = 0.1$, (b) $g_c = 0.5$, (c) $g_c = 1$, (d) $g_c = 4$

5. 结 论

本文研究了受击两分量 BEC 模型的量子 Fisher 信息动力学性质, 发现量子 Fisher 信息与量子混沌具有紧密的联系. 在详细考察系统经典相空间结构特点的基础上, 发现无论初态选择在规则区域还是混沌区域, 系统的量子态都是纠缠的. 但是当初态处于混沌区域时, χ^2 值要比处于规则区域时小. 采

用经典相空间随机取初态然后再平均的方法, 考察量子 Fisher 信息平均值 $\bar{\chi}^2$ 的演化规律, 结果发现经典混沌促进纠缠. 最后考察系统的整体量子 Fisher 信息动力学特性, 得到较好的量子-经典对应关系. 希望本文工作对 BEC 系统混沌控制的实验实现有所裨益.

感谢浙江大学王晓光教授对本文工作的有益指导.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
 [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
 [3] Smerzi A, Fantoni S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589
 [4] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵 鸿, 刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]

[5] Zhang C W, Liu J, Raizen M G, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 074101
 [6] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
 [7] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
 [8] Furuya K, Nemes M C, Pellegrino G Q 1998 *Phys. Rev. Lett.*

- 80 5524
- [9] Wang X G, Ghose S, Sanders B C, Hu B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016217
- [10] Hou X W, Chen J H, Hu B 2005 *Phys. Rev. A* **71** 034302
- [11] Emerson J, Weinstein Y S, Lloyd S, Cory D G 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 284102
- [12] Weinstein Y S, Hellberg C S 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016209
- [13] Zhang Y J, Xia Y J, Ren T Q, Du X M, Liu Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 722 (in Chinese) [张英杰、夏云杰、任延琦、杜秀梅、刘玉玲 2009 物理学报 **58** 722]
- [14] Guo L, Liang X T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 50 (in Chinese) [郭亮、梁先庭 2009 物理学报 **58** 50]
- [15] Meng S Y, Wu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5311 (in Chinese) [孟少英、吴炜 2009 物理学报 **58** 5311]
- [16] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2006 *Phys. Lett. A* **353** 216
- [17] Gorin T, Prosen T, Seligman T H, Znidaric M 2006 *Phys. Rep.* **435** 33
- [18] Song L J, Wang X G, Yan D, Zong Z G 2006 *J. Phys. B* **39** 559
- [19] Song L J, Yan D, Ma J, Wang X G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046220
- [20] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese) [严冬、宋立军、陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]
- [21] Pezzé L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [22] Haake F 1991 *Quantum Signature of Chaos* (Berlin: Springer)
- [23] Hall M J W 2000 *Phys. Rev. A* **62** 012107
- [24] Weiss C, Teichmann N 2009 *J. Phys. B* **42** 031001
- [25] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press)
- [26] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Moore F L, Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797

Quantum Fisher information and chaos in the system of Bose-Einstein condensate*

Song Li-Jun^{1)†} Yan Dong¹⁾ Liu Yie²⁾

1) (School of Science, Changchun University, Changchun 130022, China)

2) (School of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 28 February 2011; revised manuscript received 15 June 2011)

Abstract

Quantum Fisher information, derived from the classical Fisher information, is closely related to the quantum entanglement in quantum information. The entanglement and the quantum information which are both associated with the classical phase space are investigated in a two-component Bose-Einstein condensate impacted by the impulses. The results reveal that the states regardless of disorder of the phase space after the first impulse are entangled. However, the quantum information is very sensitive to the state centred in the classical phase space, concretely, the value of the quantum information centred in the chaotic region is greater than in the regular region. By employing the good quantum-classical correspondence, we conclude that the quantum information can serve as a signature of the quantum chaos.

Keywords: quantum Fisher information, Bose-Einstein condensate, quantum chaos, quantum-classical correspondence

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk, 05.45.Mt, 42.50.Dv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10947019), the Key Program of Science and Technology Research of Ministry of Education, China (Grant No. 211040), and the Natural Science Foundation of Jilin Province, China (Grant No. 20101514).

† E-mail: ccdxslj@126.com