

Λ型和V型三能级原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性*

卢道明†

(武夷学院电子工程系,武夷山 354300)

(2011年3月18日收到;2011年5月25日收到修改稿)

研究了由一个Λ型三能级原子、一个V型三能级原子和光纤连接的双模腔构成的系统,给出了系统态矢的演化.采用部分转置密度矩阵的负本征值来描述两个子系统间的纠缠,利用数值计算方法研究了原子与原子之间和腔场与腔场之间的纠缠特性.讨论了光纤模与腔场间的耦合强度对纠缠特性的影响.研究表明:随光纤模与腔场间的耦合强度增强,原子间的纠缠和腔场间的纠缠均增强.

关键词: 量子光学, 原子-腔-光纤复合系统, 三能级原子, 量子纠缠

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

1. 引言

量子纠缠是量子力学最显著也是最奇特的特征之一.由于它在量子信息处理中的量子态隐形传输、量子密钥分配和量子密码共享中的广泛应用,使其成为量子信息领域中的基本资源,因此纠缠态的制备和度量一直备受人们的关注.在纠缠态的度量方面,人们已利用 von Neumann 熵、纠缠相对熵^[1]、密度算符之间的距离^[2]、Renyi 纠缠度^[3]和共生纠缠度^[4]等物理量来度量纠缠态的纠缠度.例如:张英杰等^[5]研究了多光子 Tavis-Cummings 模型中两原子纠缠演化.吴超等^[6]研究了两运动原子与单模场相互作用系统中原子间的纠缠.陈丽等^[7]研究了偶极相互作用和失谐对 Tavis-Cummings 模型中原子纠缠的影响.另一方面,因为腔与原子相互作用是实现多比特纠缠、量子信息处理和量子计算等最有前途的技术之一,人们对其已进行了大量研究.但在以往的研究中,大多集中在原子与单个腔或非耦合腔相互作用系统^[8-10].近年来,原子与耦合腔相互作用系统引起了人们极大的兴趣^[11-14].例如:Yang 等^[15]提出利用原子与耦合腔相互作用系统实现量子相位门的方案.Yin 等^[16]提出一种利

用原子与耦合腔相互作用系统实现量子态转换和逻辑门的方案.Zhang^[17]研究了原子与光纤连接单模腔相互作用系统中原子间的纠缠.2007年,Peng 和 Li^[18]给出了利用Λ型三能级原子、V型三能级原子和光纤联接的双模腔构成的系统制备原子纠缠态的方案.但是,对该系统中原子与原子之间和腔场与腔场之间的纠缠研究作者尚未见报道.本文采用部分转置密度矩阵的负本征值来度量两个子系统间的纠缠,利用数值计算方法研究了两个原子之间和两个腔场之间的纠缠性质.同时还讨论了光纤模与腔场间的耦合强度对纠缠特性的影响.

2. 理论模型

本文研究由一个Λ型三能级原子、一个V型三能级原子和光纤联接的双模腔构成的系统,如图1所示. $|e_{-}\rangle$ 和 $|e_{+}\rangle$ 是V型三能级原子的两个简并激发态, $|g\rangle$ 为其基态. $|g_{-}\rangle$ 和 $|g_{+}\rangle$ 是Λ型三能级原子的两个简并基态, $|e\rangle$ 为其激发态.考虑原子跃迁 $|e\rangle\rightarrow|g_{-}\rangle$ 和 $|e_{-}\rangle\rightarrow|g\rangle$ 与腔场左旋极化光共振相互作用,而原子跃迁 $|e\rangle\rightarrow|g_{+}\rangle$ 和 $|e_{+}\rangle\rightarrow|g\rangle$ 与腔场右旋极化光共振相互作用.在旋波近似下,相互作用绘景中原子和腔场体系的哈密顿量为

* 福建省自然科学基金(批准号:2011J010180)资助的课题.

† E-mail: daominglu79@hotmail.com.

$$\begin{aligned}
 H_I &= H_A + H_B + H_F, \\
 H_A &= \sum_{i=\pm} g_{Ai} (a_{Ai}^+ s_{1i}^- + a_{Ai} s_{1i}^+), \\
 H_B &= \sum_{i=\pm} g_{Bi} (a_{Bi}^+ s_{2i}^- + a_{Bi} s_{2i}^+), \\
 H_F &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=\pm} (f_{ji} b_{ji} (a_{Ai}^+ \\
 &\quad + (-1)^j e^{i\theta} a_{Bi}^+) + \text{H. C.}).
 \end{aligned} \tag{1}$$

这里 H. C. 表示前面项的厄密共轭; g_{Ai} 和 g_{Bi} 为原子与腔场的耦合系数, 为简单起见, 设

$$\begin{aligned}
 g_{Ai} &= g_A, \\
 g_{Bi} &= g_B;
 \end{aligned}$$

a_{Ai}^+ 和 a_{Ai} (a_{Bi}^+ 和 a_{Bi}) 分别为腔场的产生和湮没算符, $i = \pm$ 分别表示在腔 A 和腔 B 中的右旋和左旋极化光,

$$a_{Ai}^+ |n_i\rangle_A = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle_A;$$

s_{li}^+ 和 s_{li}^- ($l = 1, 2$) 为第 l 个原子的赝自旋算符,

$$\begin{aligned}
 s_{1i}^+ &= |e\rangle\langle g_i|, \\
 s_{1i}^- &= |g_i\rangle\langle e|, \\
 s_{2i}^+ &= |e_i\rangle\langle g|, \\
 s_{2i}^- &= |g\rangle\langle e_i|;
 \end{aligned}$$

b_{ji} 为光纤模的湮没算符;

$$\theta = 2\pi\omega L/c,$$

其中 L 为光纤长度. 在满足短光纤的条件 $L\tilde{\nu}/(2\pi c) \leq 1$ 的情况下^[16] ($\tilde{\nu}$ 为腔场进入光纤的衰减速率), 光纤中只有一个模与腔场发生共振相互作用, 这时腔模与光纤模的相互作用哈密顿量近似为

$$H_F = \sum_{i=\pm} f_i (b_i (a_{Ai}^+ + a_{Bi}^+) + \text{H. C.}), \tag{2}$$

式中 f_{\pm} 为腔模与光纤模间的耦合系数, 为简单起见设 $f_+ = f_- = f$. 假设初始时刻原子 1 处于激发态, 原子 2 处于基态, 腔场和光纤模均处于真空态, 则系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle = |e\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2. \tag{3}$$

当系统初始处于 (3) 式表示的态时, 在演化过程中系统将保留在下列基矢构成的子空间中^[18]:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1\rangle &= |e\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_2\rangle &= |g_-\rangle_1 |1_-\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_3\rangle &= |g_-\rangle_1 |0\rangle_A |1_-\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_4\rangle &= |g_-\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |1_-\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_5\rangle &= |g_-\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |e_-\rangle_2, \\
 |\varphi_6\rangle &= |g_+\rangle_1 |1_+\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\varphi_7\rangle &= |g_+\rangle_1 |0\rangle_A |1_+\rangle_f |0\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_8\rangle &= |g_+\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |1_+\rangle_B |g\rangle_2, \\
 |\varphi_9\rangle &= |g_+\rangle_1 |0\rangle_A |0\rangle_f |0\rangle_B |e_+\rangle_2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $|n_i\rangle_l$ 表示在腔 l 中有 n 个 i 极化光子.

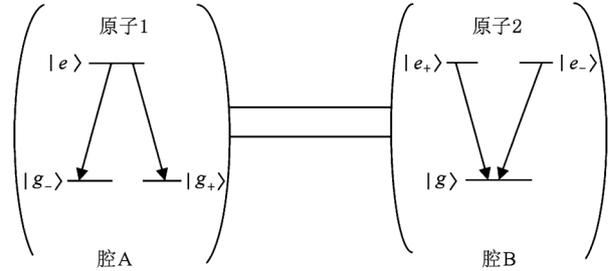


图1 系统示意图

在相互作用绘景中, 系统的态矢演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle, \tag{5}$$

取 $\hbar = 1$. 在任意时刻 t , 系统的态矢将演化为

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)\rangle &= d_1 |\varphi_1\rangle + d_2 |\varphi_2\rangle + d_3 |\varphi_3\rangle + d_4 |\varphi_4\rangle \\
 &\quad + d_5 |\varphi_5\rangle + d_6 |\varphi_6\rangle + d_7 |\varphi_7\rangle \\
 &\quad + d_8 |\varphi_8\rangle + d_9 |\varphi_9\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

利用初始条件 $d_1 = 1, d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0$. 解 (6) 式可得

$$d_1 = A\cos(\alpha t) + B\cos(\beta t) + C,$$

$$d_2 = d_6 = -\frac{i}{2g_A} (A\alpha\sin(\alpha t) + B\beta\sin(\beta t)),$$

$$\begin{aligned}
 d_3 = d_7 &= -\frac{1}{2g_A f} [(2g_A^2 - \alpha^2)A\cos(\alpha t) \\
 &\quad + (2g_A^2 - \beta^2)B\cos(\beta t) + 2g_A^2 C],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 = d_8 &= \frac{-i}{2g_A f^2} [(\alpha^2 - 2g_A^2 - f^2)A\alpha\sin(\alpha t) \\
 &\quad + (\beta^2 - 2g_A^2 - f^2)B\beta\sin(\beta t)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_5 = d_9 &= \frac{-g_B}{2g_A f^2} [A(\alpha^2 - 2g_A^2 - f^2)(1 - \cos(\alpha t)) \\
 &\quad + B(\beta^2 - 2g_A^2 - f^2)(1 - \cos(\beta t))],
 \end{aligned} \tag{7}$$

式中

$$H = \sqrt{(g_B^2 - 2g_A^2)^2 + 4f^4},$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_B^2 + 2g_A^2 + 2f^2 + H)^{1/2},$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_B^2 + 2g_A^2 + 2f^2 - H)^{1/2},$$

$$A = \frac{g_A^2(H - g_B^2 + 2g_A^2)}{\alpha^2 H},$$

$$B = \frac{g_A^2(H + g_B^2 - 2g_A^2)}{\beta^2 H},$$

$$C = 1 - \frac{g_A^2}{H} \left(\frac{H - g_B^2 + 2g_A^2}{\alpha^2} + \frac{H + g_B^2 - 2g_A^2}{\beta^2} \right).$$

3. 原子间纠缠的演化

采用部分转置密度矩阵的负本征值来描述两

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_1|^2 & d_1 d_5^* & 0 & 0 & 0 & d_1 d_9^* & 0 \\ 0 & 0 & d_5 d_1^* & |d_5|^2 & 0 & 0 & 0 & d_5 d_9^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{234}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 d_1^* & d_9 d_5^* & 0 & 0 & 0 & |d_9|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{678}|^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中

$$|d_{234}|^2 = |d_2|^2 + |d_3|^2 + |d_4|^2,$$

个子系统间的纠缠^[19],即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统,纠缠可用其部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值来定义,

$$N = -2 \sum_i u_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

式中 u_i 是部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值.

利用(6)式,对腔场和光纤模求迹,以 $|e\rangle_1|e\rangle_2, |e\rangle_1|e_+\rangle_2, |e\rangle_1|g\rangle_2, |g\rangle_1|e\rangle_2, |g\rangle_1|e_+\rangle_2, |g\rangle_1|g\rangle_2, |g_+\rangle_1|e\rangle_2, |g_+\rangle_1|e_+\rangle_2, |g_+\rangle_1|g\rangle_2$ 为基矢,可得原子1和原子2构成的系统的密度矩阵为

$$|d_{678}|^2 = |d_6|^2 + |d_7|^2 + |d_8|^2.$$

对原子2的态进行转置,可得其部分转置矩阵为

$$\rho_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 d_5^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 d_9^* \\ 0 & 0 & |d_1|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |d_5|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 d_9^* & 0 & 0 \\ d_5 d_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{234}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_9 d_5^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_9|^2 & 0 \\ 0 & d_9 d_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |d_{678}|^2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

为简单起见,取 $g_B = \sqrt{2}g_A, g_A = g$. 利用(8)和(10)式,可计算出原子间的纠缠度 N_{12} 随规范时间 gt 的演化,所得结果如图2所示. 从图2可见:当光纤模与腔场间的耦合强度较弱时,原子间的纠缠度 N_{12}

随时间作不规则振荡. 随着光纤模与腔场间的耦合强度逐渐增强,原子间的纠缠演化逐渐呈现出准周期性的演化规律,但各峰值不相等. 当该耦合强度大于一定值后,纠缠度随时间的演化呈现出周期性

演化的规律,并且其峰值增大到 1. 另一方面,随光纤模与腔场间的耦合强度增强,曲线的峰值增大,

曲线重心上移. 这表明随光纤模与腔场间的耦合强度增强,原子间的纠缠增强.

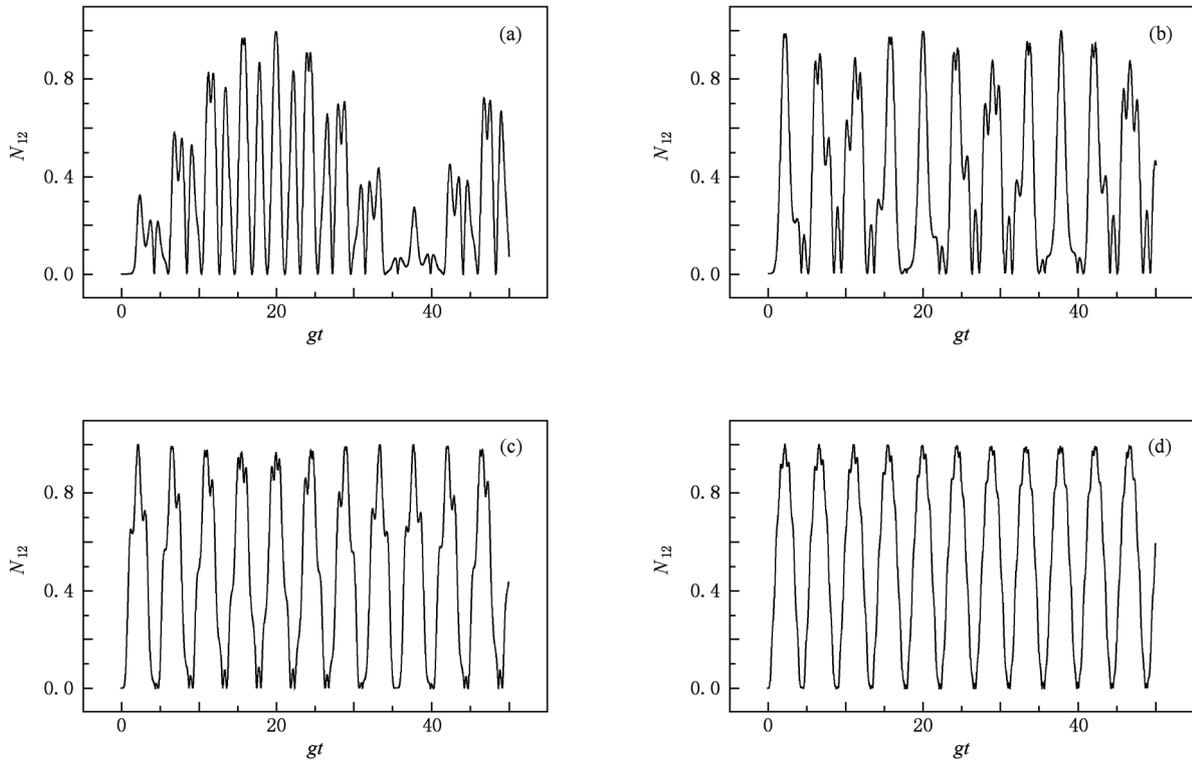


图 2 当 f 取 $0.5g, 2g, 4g$ 和 $8g$ 时原子间纠缠度 N_{12} 随规范时间的演化 (a) $f = 0.5g$, (b) $f = 2g$, (c) $f = 4g$, (d) $f = 8g$

4. 腔场间纠缠的演化

腔场 A 与腔场 B 间的纠缠同样采用部分转置密度矩阵的负本征值来描述. 利用(6)式,

对原子 1、原子 2 和光纤模求迹,以 $|0\rangle_A |0\rangle_B$, $|0\rangle_A |1_+\rangle_B$, $|0\rangle_A |1_-\rangle_B$, $|1_+\rangle_A |0\rangle_B$, $|1_+\rangle_A |1_+\rangle_B$, $|1_+\rangle_A |1_-\rangle_B$, $|1_-\rangle_A |0\rangle_B$, $|1_-\rangle_A |1_+\rangle_B$, $|1_-\rangle_A |1_-\rangle_B$ 为基矢,可得到腔 A 和腔 B 构成的系统的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} |d_{13579}|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |d_8|^2 & 0 & d_8 d_6^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |d_4|^2 & 0 & 0 & 0 & d_4 d_2^* & 0 & 0 \\ 0 & d_6 d_8^* & 0 & |d_6|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 d_4^* & 0 & 0 & 0 & |d_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

式中

$$|d_{13579}|^2 = |d_1|^2 + |d_3|^2 + |d_5|^2 + |d_7|^2 + |d_9|^2.$$

通过计算可得腔场 A 和腔场 B 间的纠缠量为

$$N_{AB} = \sqrt{|d_{13579}|^4 + 4(|d_2d_4|^2 + |d_8d_6|^2) - |d_{13579}|^2}. \quad (12)$$

为简单起见,取 $g_B = \sqrt{2}g_A, g_A = g$. 利用(8)和(12)式,通过数值计算可得腔场间的纠缠度 N_{AB} 随规范时间 gt 的演化,所得结果如图 3 所示. 从图 3 可见:当光纤模与腔场间的耦合强度较弱时,腔场间的纠缠度 N_{AB} 随时间作不规则振荡. 随光纤模与腔场间的耦合强度增强,腔场间的纠缠演化逐渐呈现出准周期性的演化规律. 当该耦合强度大于一定值后,纠缠度随时间的演化呈现出周期性演化的规律,并且其峰值增大到 1. 另一方面,随光纤模与腔场间的

耦合强度增强,曲线的峰值增大,曲线重心上移. 这表明随光纤模与腔场间的耦合强度增强,腔场间的纠缠增强.

比较图 2 和图 3 可知:原子之间的纠缠和腔场之间的纠缠随光纤模与腔场间的耦合强度变化,其演化规律相似,均随光纤模与腔场间的耦合强度逐渐增强,演化逐渐呈现出周期性,并且均逐渐增强. 但是, N_{12} 大于 N_{AB} ,说明原子间纠缠强于腔场间的纠缠. 从物理机理上看,随着光纤模与腔场间的耦合强度增强,光纤模被激发的概率降低,激发子被两个原子或两个腔分享的概率增大,因此相应原子间的纠缠或腔场间的纠缠也得到提高.

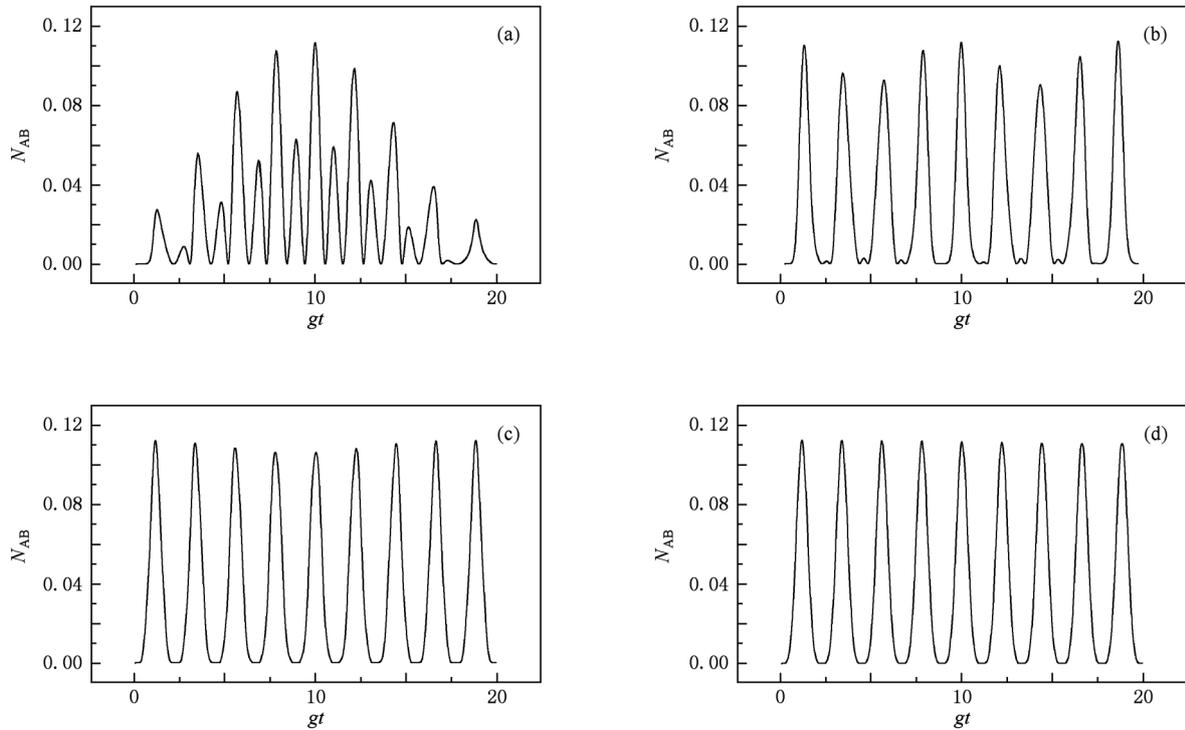


图 3 当 f 取 $0.5g, 2g, 4g$ 和 $8g$ 时腔场 A 与腔场 B 间纠缠度 N_{AB} 随规范时间的演化 (a) $f = 0.5g$, (b) $f = 2g$, (c) $f = 4g$, (d) $f = 8g$

5. 结 论

本文研究了由 Λ 型三能级原子、V 型三能级原子和光纤联接的双模腔构成的系统,给出了系统态矢的演化公式. 运用部分转置密度矩阵的负本征值来描述两个子系统间的纠缠,研究了两个原子之间和腔场 A 与腔场 B 间纠缠的演化. 采用数值计算方法,讨

论了光纤模与腔场间的耦合强度变化对纠缠特性的影响. 研究表明:随光纤模与腔场间耦合强度的变化,原子之间和腔场之间的纠缠有相似的演化规律,它们均随光纤模与腔场间的耦合强度逐渐增大,逐渐呈现出周期性的演化规律. 并且,随光纤模与腔场间的耦合强度逐渐增强,纠缠均逐渐增强. 这表明增大耦合强度对提高原子间或腔场间的纠缠有利. 另一方面,原子间纠缠远强于腔场间的纠缠.

- [1] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [2] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
- [3] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [4] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [5] Zhang Y J, Zhou Y, Xia Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 21 (in Chinese) [张英杰、周原、夏云杰 2008 物理学报 **57** 21]
- [6] Wu C, Fang M F 2010 *Chin. Phys.* **19** 020309
- [7] Chen L, Shao X Q, Zhang S 2009 *Chin. Phys.* **18** 888
- [8] Zhan Z M, Yang W X, Li J H 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 846
- [9] Yang Z B 2007 *Chin. Phys.* **16** 329
- [10] Zhang J S, Xu J B 2009 *Opt. Commun.* **282** 3652
- [11] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063805
- [12] Hartmann M J, Brandao F G S L, Plenio M B 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160501
- [13] Zheng S B, Yang C P, Nori F 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042327
- [14] Zheng S B 2010 *Chin. Phys.* **19** 064204
- [15] Yang Z B, Xia Y, Zheng S B 2010 *Opt. Commun.* **283** 3052
- [16] Yin Z Q, Li F L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 012324
- [17] Zhang B 2010 *Opt. Commun.* **283** 196
- [18] Peng P, Li F L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062320
- [19] Zou Y 2009 *Chin. J. Quantum Electron.* **26** 69 (in Chinese) [邹艳 2009 量子电子学报 **26** 69]

The entanglement properties in the system composed of a Λ -type atom and a V-type atom trapped in two distant cavities connected by an optical fiber*

Lu Dao-Ming[†]

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

(Received 18 March 2011; revised manuscript received 25 May 2011)

Abstract

We consider a system consisting of a Λ -type atom and a V-type atom, which are individually trapped in two spatially separated cavities that are connected by an optical fiber. The evolution of the state vector of the system is given. We investigate the temporal evolution in the entanglement between atoms and that between cavities. We discuss the influence of cavity-fiber coupling coefficient on entanglement. The results obtained by the numerical method show that the entanglement between atoms and the entanglement between cavities have the same evolution regularities. On the other hand, the entanglement between atoms and that between cavities are strengthened with the increase of cavity-fiber coupling coefficient.

Keywords: quantum optics, atom-cavity-fiber compound system, three-level atom, quantum entanglement

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2011J010180).

[†] E-mail: daominglu79@hotmail.com