

玻色-爱因斯坦凝聚系统中原子的空间混沌分布*

李飞† 张冬霞 李文斌

(湖南科技大学物理系,湘潭 411201)

(2010年12月30日收到;2011年8月5日收到修改稿)

研究了非对称周期势阱中玻色-爱因斯坦凝聚原子的空间混沌分布结构. 在凝聚体相位为常数的情况下, 凝聚体内部不存在原子流, 凝聚原子的空间分布结构可以用一个无阻尼双驱动 Duffing 方程描述. 理论分析给出了原子间呈排斥作用系统的 Mel'nikov 混沌判据. 数值模拟结果显示, 化学势的增大能够对原子混沌分布产生明显的抑制作用, 甚至使混沌完全消失. 对于原子间呈吸引作用的系统, 在一定参数条件下, 调节光格势强度比可以使凝聚原子由周期状态进入到空间混沌分布状态, 随着化学势的增大这种空间混沌分布被完全抑制.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, Mel'nikov 函数, 混沌

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Hh, 05.45.Ac

1. 引言

玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)是继固态、气态、液态和等离子态之后被发现的物质存在的第五种方式. BEC本质上是一种宏观量子效应的体现,它具有许多独特的光学、热学、力学和电磁学等方面的物理性质^[1,2]. BEC的实现具有重大的意义,它证实了一个新物态的存在,为物理学家提供了新的研究对象,同时也给物理研究领域注入了新的活力. BEC在原子物理常数测量、微重力测量、研制原子干涉仪、确定原子钟的准确度和量子信息处理等方面也具有十分重要的潜在应用价值^[1,2]. 所以,近年来国际物理学界对 BEC 物质的研究热潮一直长盛不衰^[3-26]. BEC是一个多粒子系统. 在大粒子数情况下,当凝聚原子间的 s 波散射长度远小于原子间的平均距离时,可以采用平均场近似方法,即用平均场理论来研究凝聚体的运动. 在平均场理论框架下,理论研究常用 Gross-Pitaevskii 方程(GP 方程)描述 BEC 的宏观物理性质^[1,3-26]. GP 方程是一个非线性 Schrödinger 方程,其中的非线性项代表凝聚原子间相互作用. 原子间相互作用对凝聚原子在凝聚体内部的分布有着重要影响,凝聚体系统中几乎所

有的宏观量子现象都与原子间相互作用密切相关. 也正是由于原子间的这种非线性相互作用,凝聚体表现出了丰富的非线性现象,混沌就是其中最重要的一种^[9-22]. Filho 等^[9]发现,在凝聚体塌缩过程中存在混沌. 因此研究 BEC 系统中的混沌具有重要意义. 文献[10]研究了双势阱耦合 BEC 系统隧穿过程中的混沌现象. 对于周期振荡双势阱 BEC 系统,Abdullaev 和 Kraenkel^[10]应用 Mel'nikov 函数法得到了混沌宏观量子隧穿存在的条件. 在研究一个周期受击 BEC 时,刘杰等^[12]发现当非线性作用超过某一临界值时,系统将由准周期运动进入到混沌运动状态. 凝聚原子的空间混沌分布也受到了研究者的关注^[14-17,21]. 文献[14]研究了高斯型激光势垒作用下一维 BEC 系统中原子的空间离散混沌分布;文献[15-17]讨论了弱光格势中一维 BEC 系统的原子空间混沌分布及其控制策略. 此前,我们也对 BEC 系统中的原子隧穿混沌^[19]、时空混沌^[20]以及空间混沌^[21]现象进行了研究.

本文主要探讨非对称周期势阱中 BEC 原子的空间混沌分布. 考虑了凝聚体相位为常数、内部不存在原子流的情形,对于原子间呈排斥作用的系统,采用理论分析的方法讨论了系统出现 Smale 马蹄混沌的条件,得到了系统的 Mel'nikov 混沌判据.

* 湖南省教育厅科研基金(批准号:08C344)、低维量子结构与调控教育部重点实验室基金(批准号:QSQ1005)和湖南科技大学研究生创新基金(批准号:S090124)资助的课题.

† E-mail: wiself@gmail.com

通过数值计算,分析了激光波矢比、化学势以及光格势强度比对凝聚原子空间分布的影响.

2. 理论分析

考虑一维 BEC 系统,对应的 GP 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2\psi + V_{\text{ext}}(x)\psi, \quad (1)$$

其中 \hbar 是普朗克常量, m 是原子质量, $g = 4\pi a_s \hbar^2/m$ 是非线性作用参数. 这里 a_s 是 s 波散射长度. 当 $a_s > 0$ 时,原子间呈排斥作用;当 $a_s < 0$ 时,原子间呈吸引作用. 考虑系统被囚禁在一个非对称周期势 $V_{\text{ext}}(x) = V_1 \sin(Kx) + V_2 \sin(\beta Kx)$ 中,它由沿着 x 方向传播的激光束通过干涉生成, V_1 和 V_2 是光格势的强度, K 是激光波矢, β 是两个激光波矢之比. 为了便于分析,采用无量纲参量

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\hbar}{m} K^2 t, \\ \tilde{x} &= Kx, \\ \tilde{\psi} &= \frac{\psi}{\sqrt{n}}, \\ \tilde{V}_1 &= \frac{m}{K^2 \hbar^2} V_1, \\ \tilde{V}_2 &= \frac{m}{K^2 \hbar^2} V_2, \\ \tilde{g} &= \frac{mn}{K^2 \hbar^2} g, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 n 是 BEC 原子数密度. 在不至于产生混淆的情况下,去掉各参量上方的标记“ \sim ”,得到无量纲 GP 方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2\psi + [V_1 \sin(x) + V_2 \sin(\beta x)]\psi. \quad (3)$$

设(3)式的解为

$$\psi(x, t) = R(x) \exp(i[\theta(x) - \mu t]), \quad (4)$$

其中 $R(x)$ 是振幅, $\theta(x)$ 是相位, μ 是化学势. 化学势是温度与凝聚原子总数的函数. 将(4)式代入(3)式,可以得到以下两个耦合方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} - R(x) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - [V_1 \sin(x) + V_2 \sin(\beta x)] \\ \times R(x) + \mu R(x) - gR^3(x) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \left(2R^2 \frac{d\theta}{dx} \right) = 0. \quad (6)$$

(5) 式类似于一个流体动力学方程,其第二项

$R(x) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2$ 代表系统的速度场,而 $R^2 = n$ 为粒子数密度. (6) 式表明系统存在一个稳定的原子流

$$j = 2R^2 \frac{d\theta}{dx}.$$

考虑相位角 $\theta(x)$ 为常数(平凡相)的情形,此时 $j = 0$,不存在原子流,则(5)式第二项为零,有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} - [V_1 \sin(x) + V_2 \sin(\beta x)] \\ \times R(x) + \mu R(x) - gR^3(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

很显然,如果将(7)式的空间坐标 x 用时间 t 替代,恰好就是一个无阻尼双驱动的 Duffing 方程. 上述的分析结果表明,对于不存在粒子流的凝聚体系统,可以用无阻尼双驱动 Duffing 方程理论来研究其原子的空间分布特征. 在理论分析中,本文只考虑 $a_s > 0$,即 $g > 0$ 的排斥系统.

当光格势强度 $V_1 = V_2 = 0$ 时,(7)式为一完全哈密顿系统,通过计算可得其异宿解

$$R(x) = \sqrt{\frac{\mu}{g}} \tanh \left[\sqrt{\frac{\mu}{2}} (x - x_0) \right]. \quad (8)$$

在弱囚禁势情况下,对应于(7)式的系统是一个近可积哈密顿系统,根据文献[27],(7)式所表示的系统具有的 Mel'nikov 函数为

$$\begin{aligned} M(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dR(x)}{dx} [V_1 \sin(x) \\ + V_2 \sin(\beta x)] R(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

对(9)式等号右端积分后可得

$$\begin{aligned} M(x_0) = \frac{\pi V_1}{g} \cos x_0 \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}} \right) \\ + \frac{\beta^2 \pi V_2}{g} \cos(\beta x_0) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \beta}{\sqrt{2\mu}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

凝聚原子出现混沌分布的必要条件是 Mel'nikov 函数具有简单零点^[28],即对给定的 x_0 ,当 $M(x_0) = 0$ 时,必须有

$$\begin{aligned} \frac{dM(x_0)}{dx_0} = -V_1 \sin x_0 \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}} \right) \\ - V_2 \beta^3 \sin(\beta x_0) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \beta}{\sqrt{2\mu}} \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Mel'nikov 函数又称 Mel'nikov 距离,它表示 Poincaré 截面上稳定流形和不稳定流形在 x_0 处的距离. 如果它有简单零点,亦即只要条件(10)和(11)式得到满足,那么稳定流形和不稳定流形之间将出现横截相交,这意味着系统凝聚原子分布存在 Smale 马蹄意义下的混沌特征.

由 $M(x_0) = 0$, 有

$$\frac{\cos x_0}{\cos(\beta x_0)} = \frac{\beta^2 V_2 \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\beta}{\sqrt{2\mu}}\right)}{V_1 \operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}\right)}. \quad (12)$$

如果 $0 < \cos x_0 / \cos(\beta x_0) \leq 1$, 则可得参数空间的混沌区域为

$$V_1 \geq \frac{\beta^2 V_2 \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\beta}{\sqrt{2\mu}}\right)}{\operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}\right)}. \quad (13)$$

如果 $\cos x_0 / \cos(\beta x_0) \geq 1$, 则参数空间的混沌区域为

$$V_1 \leq \frac{\beta^2 V_2 \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\beta}{\sqrt{2\mu}}\right)}{\operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}\right)}. \quad (14)$$

以(13)式所表示的情形为例, 在设定 $V_2 = 0.1$ 后, 图1示出了微扰情况下激光波矢比 β 取不同值时系统出现规则状态和混沌状态的参数区域, 图中曲线上方为系统处于混沌状态的参数区域, 下方为系统处于规则状态的参数区域. 从图1我们无法断定激光波矢之比 β 的单调变化是否可以对原子混沌分布起到抑制作用, 不过图中显示化学势 μ 的增大和第一个光格势强度 V_1 的减小可以对原子混沌分布产生抑制作用. 必须指出的是, Mel'nikov 函数法是建立在一级微扰近似基础上的混沌判定方法, 其确定的规则与混沌参数区域并不一定完全准确, 二者之间存在一个过渡区域. 但在微扰足够小的情况下, 其仍不失为一种有效的处理手段. 有意思的是, 通过对比(13)和(14)式可以发现, 取相同参数的

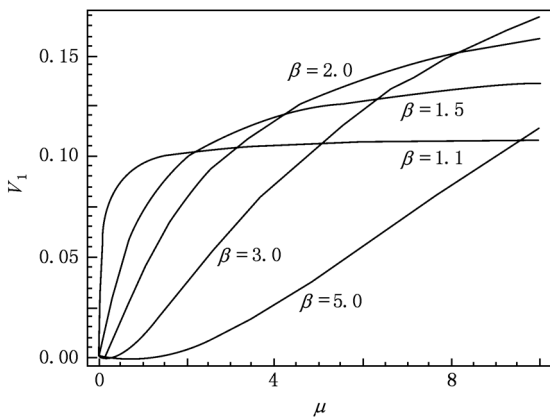


图1 激光波矢比 β 取不同值时系统出现规则状态和混沌状态的参数区域

情况下, 由(13)式得到的混沌区域恰好就是(14)式所确定的规则区域, 而由(13)式得到的规则区域恰好就是(14)式所确定的混沌区域.

3. 数值计算

当系统不满足微扰条件时, 以上建立在一级微

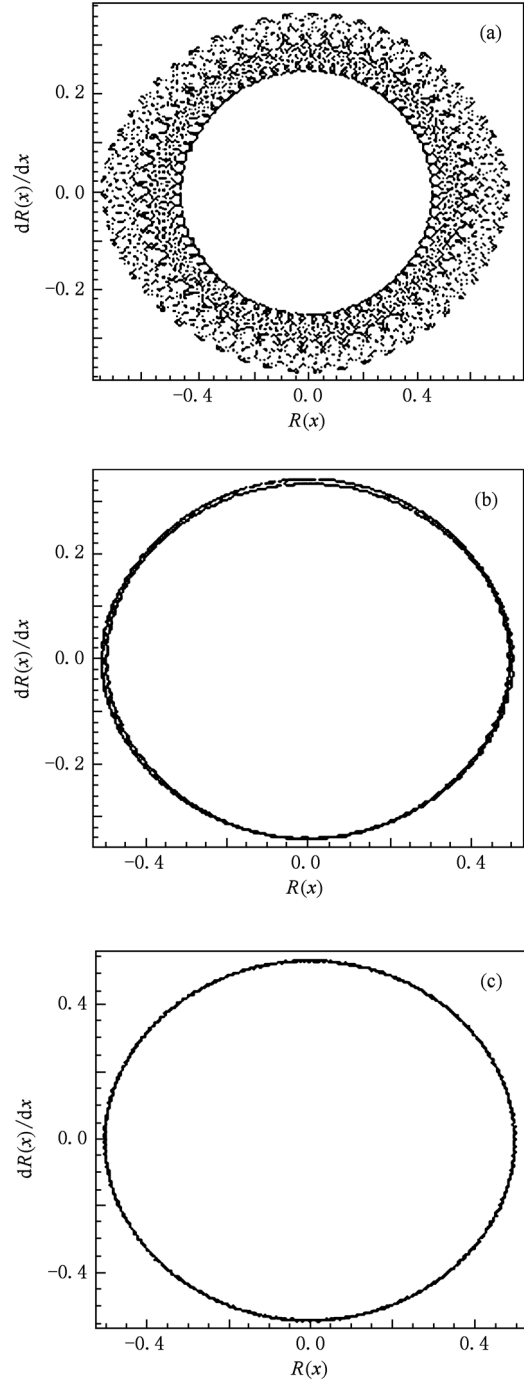


图2 当参数和初始条件为 $V_1 = V_2 = 0.01, g = 0.3, \beta = 3, R(0) = 0.5, dR(0)/dx = 0$ 时系统的等效相空间轨道 (a) $\mu = 0.33$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1.2$

扰近似基础上的 Mel'nikov 函数法就不再适用于对系统混沌的分析,同时由于(7)式的复杂性导致难以获得它的解析解. 在这种情况下,可以通过数值模拟来分析系统凝聚原子的混沌与规则分布. 选取系统参数和初始条件为 $V_1 = V_2 = 0.01, g = 0.3, \beta = 3, R(0) = 0.5, dR(0)/dx = 0$, 根据不同的化学势 μ , 利用计算机对(7)式进行数值计算, 我们在 $R(x) - dR(x)/dx$ 平面上得到了系统的等效相空间轨道. 当化学势 $\mu = 0.33$ 时, 图2(a)的相空间上呈现出一个典型的混沌吸引子, 吸引子中具有明显的分形结构. 这说明在取如上参数和初始条件的情况下, 凝聚原子在凝聚体内部空间呈混沌分布. 当化学势 μ 增大到 0.5 时, 相空间上的混沌特征和分形结构完全消失, 只出现了两条闭合轨道, 如图 2(b) 所示. 说明系统内凝聚原子空间分布不再具有混沌特征, 而是进入到一个双周期的空间分布结构. 当化学势 μ 进一步增大到 1.2 时, 相空间上只有一条

闭合轨道, 如图2(c)所示. 这说明系统进入到了一个单周期状态, 凝聚原子空间分布呈单周期结构. 图2中相空间轨道的演化说明凝聚体化学势的增大可以起到抑制凝聚原子空间混沌分布的作用. 必须指出的是, 化学势并不是一个可以直接调节的物理量, 它依赖于其他参数; 在取定相互作用参数的情况下, 调节化学势 μ 相当于调节系统温度和凝聚原子总数.

下面考虑 $a_s < 0$, 即 $g < 0$ 的吸引系统. 令系统参数和初始条件为 $V_1 = 0.3, g = -0.5, \beta = 1, \mu = 0.2, R(0) = 0.5, dR(0)/dx = 0$, 根据不同的光格势强度比 V_2/V_1 , 我们在图3中示出了系统在 $R(x) - dR(x)/dx$ 平面上的等效相空间轨道. 当 $V_2/V_1 = 0.589$ 时, 图3(a)显示系统相空间轨道并不复杂, 而是呈规则排列, 意味着凝聚原子在凝聚体内具有规则的空间分布结构. 当 $V_2/V_1 = 0.614$ 时, 图3(b)表明系统相空间轨道已经具有一定的复

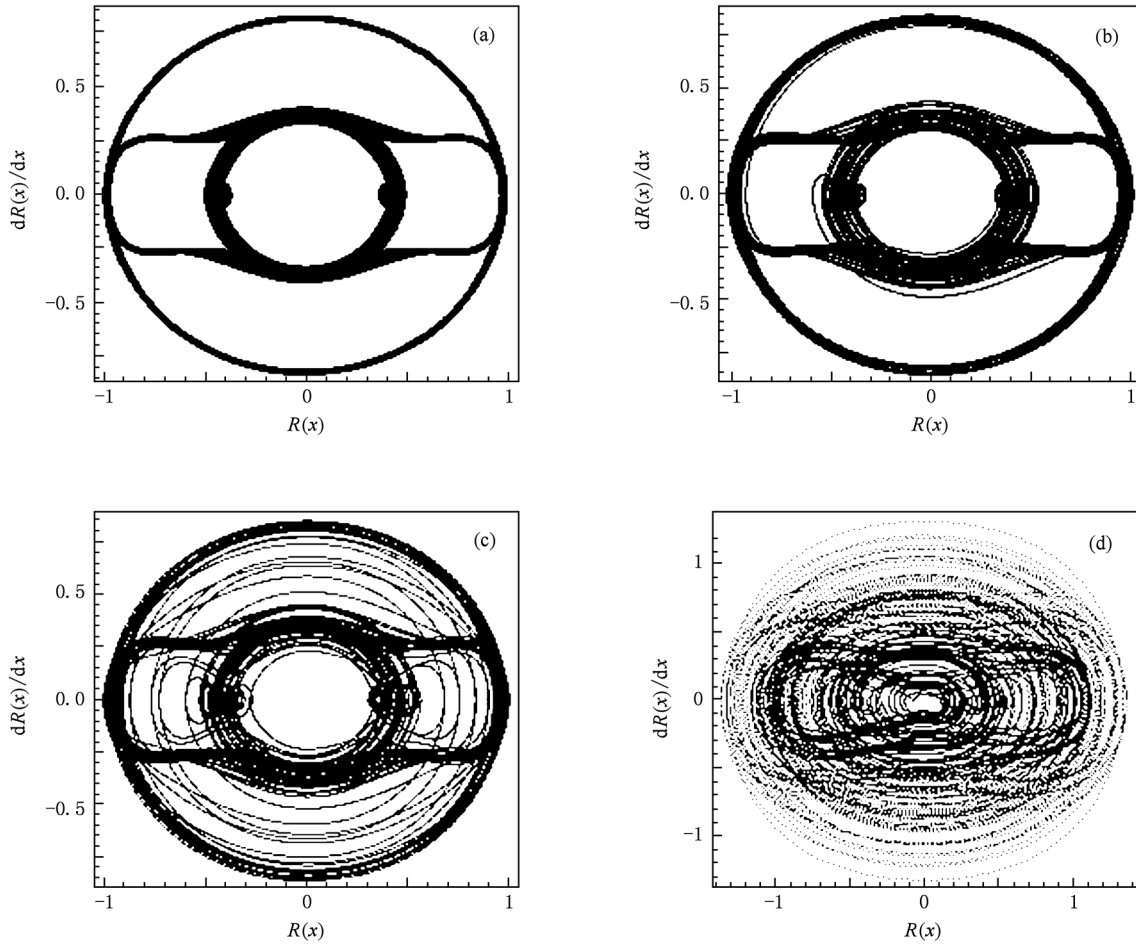


图3 当参数和初始条件为 $V_1 = 0.3, g = -0.5, \beta = 1, \mu = 0.2, R(0) = 0.5, dR(0)/dx = 0$ 时系统的等效相空间轨道 (a) $V_2/V_1 = 0.589$, (b) $V_2/V_1 = 0.614$, (c) $V_2/V_1 = 0.615$, (d) $V_2/V_1 = 0.62$

杂性,说明凝聚原子在凝聚体内的空间分布结构已经趋于复杂. 当 V_2/V_1 进一步增大到 0.615 时,系统相空间轨道已经呈现出一定的混沌性(图 3(c)) 说明凝聚原子空间分布结构已经具有混沌的特征. 当 V_2/V_1 增大到 0.62 时,图 3(d) 显示系统的相空间上出现了一个典型的混沌吸引子,表明凝聚原子已经完全处于混沌的空间分布状态.

上述数值模拟结果表明,对于原子间呈排斥作用的凝聚体系统,在化学势较大的情况下,凝聚原子的空间混沌分布将受到有效抑制. 对于原子间呈吸引作用的系统,我们考虑图 3(d) 的情形. 保持其他系统参数和初始条件不变,我们发现在化学势 μ 逐渐增大的过程中,系统经历了混沌到准周期状

态,再由准周期状态到周期状态的过程,如图 4 所示. 当化学势 μ 提高到 0.4 时,尽管相图上的轨道仍然比较复杂,但是与图 3(d) 相比,复杂性已大为降低(图 4(a)). 当化学势 μ 提高到 0.42 时,从图 4(b) 展现的相平面上可以看到一个典型的准周期相图,即此时凝聚原子的空间分布呈准周期结构. 当化学势 μ 进一步提高到 2 时,图 4(c) 所示相平面上轨道的准周期性也明显降低. 而当化学势 μ 提高到 20 时,相平面上只有一条闭合轨道(图 4(d)),说明系统处于一个单周期状态,凝聚原子在凝聚体内部完全处于规则的单周期空间结构. 图 4 中相图的演化过程表明,随着化学势 μ 的增大,凝聚原子空间混沌结构被完全抑制.

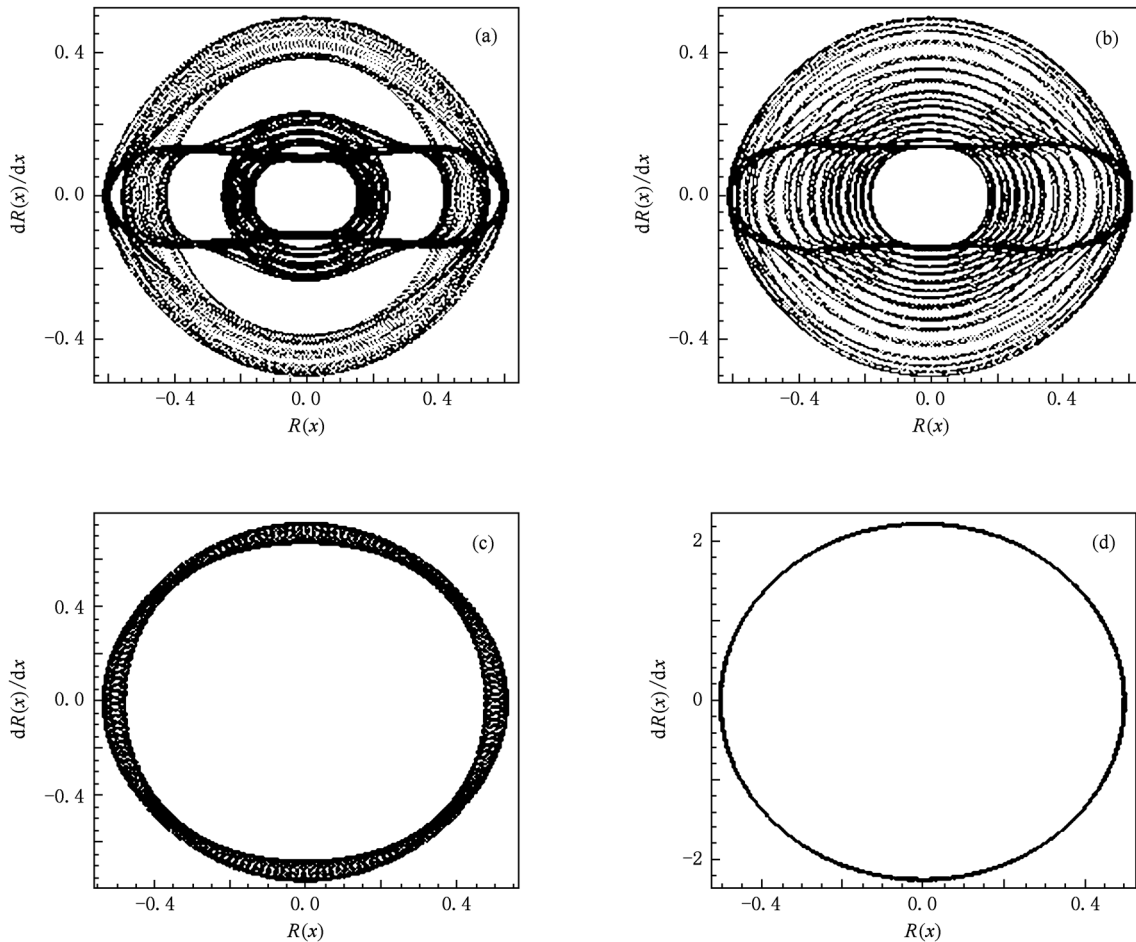


图 4 当化学势 μ 取不同值时系统的等效相空间轨道 (a) $\mu = 0.4$, (b) $\mu = 0.42$, (c) $\mu = 2$, (d) $\mu = 20$

4. 结 论

本文研究了非对称周期势阱中单体 BEC 系统原子的混沌空间分布. 在凝聚体相位为常数的情况

下,系统内部不存在原子流. 此时系统的原子空间结构可以用一个无阻尼双驱动的 Duffing 方程模拟. 考虑 s 波散射长度 $a_s > 0$, 即原子间呈排斥作用的系统,通过理论分析给出了系统的 Mel'nikov 混沌判据. 研究表明,激光波矢比 β 的单调变化并未

体现出对原子空间混沌分布的抑制作用. 数值模拟结果显示, 化学势 μ 的增大能够对原子混沌分布产生明显的抑制. 当化学势足够大时, 混沌完全消失, 凝聚原子的空间分布呈单周期结构. 对于 s 波散射长

度 $a_s < 0$, 即原子间呈吸引作用的系统, 在一定参数条件下光格势强度比 V_2/V_1 的增大可以使凝聚原子空间分布由周期状态进入到一个混沌的空间分布状态, 增大化学势后原子的空间混沌分布被完全抑制.

- [1] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [2] Zhou S Y, Long Q, Zhou S Y, Fu H X, Wang Y Z 2002 *Physics* **31** 481 (in Chinese) [周蜀渝, 龙全, 周善钰, 付海翔, 王育竹 2002 物理 **31** 481]
- [3] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [4] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [5] Milburn G J, Corney J, Wright E M, Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [6] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [7] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [8] Xue J K 2005 *J. Phys. B* **38** 3841
- [9] Filho V S, Gammal A, Frederico T, Tomio L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 033605
- [10] Abdullaev F K, Kraenkel R A 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023613
- [11] Hai W, Lee C, Chong G, Shi L 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026202
- [12] Liu J, Zhang C, Raizen M, Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [13] Hai W, Zhu Q, Rong S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 023603
- [14] Hai W, Rong S, Zhu Q 2008 *Phys. Rev. E* **78** 066214
- [15] Chong G, Hai W, Xie Q 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016202
- [16] Chong G, Hai W, Xie Q 2004 *Chaos* **14** 217
- [17] Xu J, Hai W, Li H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2244
- [18] Xie Q, Rong S, Zhong H, Lu G, Hai W 2010 *Phys. Rev. A* **82** 023616
- [19] Li F, Shu W, Luo H, Ren Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 650
- [20] Li F, Shu W, Jiang J, Luo H, Ren Z 2007 *Eur. Phys. J. D* **41** 355
- [21] Li F, Ren Z, Luo H, Shu W, Wu Q 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 107
- [22] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [23] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [24] Chen H J, Xue J K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3962 (in Chinese) [陈海军, 薛具奎 2008 物理学报 **57** 3962]
- [25] Wang G F, Liu H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 667 (in Chinese) [王冠芳, 刘红 2008 物理学报 **57** 667]
- [26] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [27] Li F, Zhou B, Shu W, Luo H, Huang Z, Tian L 2008 *Eur. Phys. J. D* **50** 75
- [28] Long Y J 1996 *Chaotic Vibration Research: Approach and Practice* (Beijing: Tsinghua University Press) p39 (in Chinese) [龙运佳 1996 混沌振动研究: 方法与实践 (北京: 清华大学出版社) 第 39 页]

Spatially chaotic distribution of atoms in Bose-Einstein condensate systems^{*}

Li Fei[†] Zhang Dong-Xia Li Wen-Bin

(Department of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

(Received 30 December 2010; revised manuscript received 5 August 2011)

Abstract

In this paper, we study the spatially chaotic distribution of atoms in a Bose-Einstein condensate system, trapped in an asymmetric periodic potential. For a constant phase of condensate, without atom currents in the system, the space distributed structure of condensated atoms can be described by an undamped Duffing equation with double drivers. Through theoretical analyses, the Mel'nikov chaotic criterion for the system with a repulsive interatomic interaction is presented. Numerical simulations show that an increasing chemical potential can exert considerable suppression on the chaotic distribution of condensated atoms and even completely eliminate chaos. For a system with an attractive interatomic interaction, under some specific parametric conditions, adjusting the ratio between optical lattice potential amplitudes will force the condensated atoms from a periodic state into a spatially chaotic distribution; with the increase of chemical potential, the spatially chaotic distribution is completely suppressed.

Keywords: Bose-Einstein condensates, Mel'nikov function, chaos

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Hh, 05.45.Ac

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 08C344), the Foundation of Key Laboratory of Low Dimensional Quantum Structures and Quantum Control of Ministry of Education, China (Grant No. QSQC1005), and the Graduate Student Innovation Foundation of Hunan University of Science and Technology, China (Grant No. S090124).

[†] E-mail: wiself@gmail.com