

# 一种空时体积与引力的激发和跃迁生成模式

邵丹<sup>1)</sup> 邵亮<sup>2)†</sup> 邵常贵<sup>3)</sup>

1) (江汉大学光电信息研究所, 武汉 430056)

2) (武汉科技大学应用物理系, 武汉 430081)

3) (湖北第二师范学院理论物理研究所, 武汉 430205)

(2010年9月6日收到; 2011年5月25日收到修改稿)

利用4单形及其对偶1-骨架,描述了纯空时的跃迁. 对自旋网编织成的三维空间在跃迁的两个台阶间体积的改变做出了证明. 给出了四维空时体积的一个平坦量子涨落模型. 利用自旋网腿中的圈线刺过曲面时产生的激发,获得了三维空间的2阶对称离散张量 $h^{ab}$ ,按照空时是激发和跃迁体系的观点,得到了离散引力场 $h^{\mu\nu}$ 的产生与改变机制.

**关键词:** 体积量子膨胀, 空时度规涨落, 引力扰动的激发, 2阶对称张量的产生

**PACS:** 04. 60. Ds

## 1. 引言

在圈量子引力(LQG)中,一个四维空间利用三角剖分可被分成以4单形作为胞腔的集合. 本文的目的是反过来做,即在无任何背景条件下利用作为 $SU(2)$ 关系的跃迁4单形,按文献[1,2]的做法,对四维空时的形成以及引力的生成给出一种描述. 为此,首先需熟悉4单形. 这里将一 $SU(2)$ 纯关系(即自旋网的5顶角)记为 $v_5(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ . 以 $v_5$ 作为1-骨架将决定一个4单形 $\Delta_4$ , $\Delta_4$ 由5个四面体 $\Delta_3$ 构成,见图1和图2. 与 $\Delta_3$ 对偶的1-骨架(即中心顶角)可记为 $v_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ . 对于 $\Delta_4$ ,还伴随有 $\Delta_4$ 的2-复形,LQG中将2-复形称为自旋泡沫 $\sigma$ .  $\sigma$ 是

面的集合, $\sigma$ 的边界是个自旋网 $s$ ,见图3. 从制出1-骨架图的角度, $\sigma$ 的边界自旋网 $s$ 可看作顶角 $v_5$ 的每条腿中的自由端与 $v_4$ 的腿对接而得,即有线图合成示意式 $v_5 \cup 5 \circ v_4 \Rightarrow s$ . 顶角 $v_5$ 和 $v_4$ 的体积可用双元法直接求得,并且这种方法得到的体积是关于顶角的不变量.

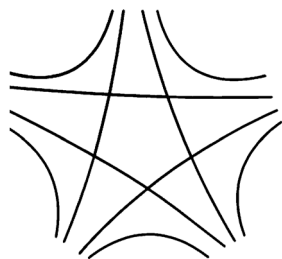


图1 与 $\Delta_4$ 对偶的1-骨架 $v_5$



图2  $\Delta_4$ 由5个 $\Delta_3$ 构成

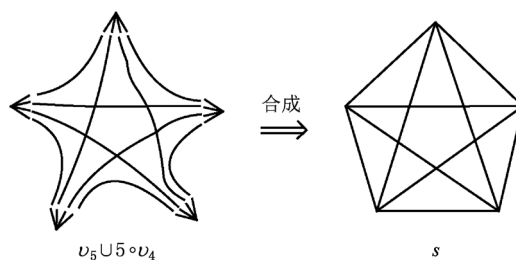


图3 自旋泡沫 $\sigma$ 的边界自旋网 $s$

† 通讯联系人. E-mail: liangshao2006@126.com

## 2. 空间跃迁形成空时

### 2.1. 空时 4 单形跃迁

我们知道,对于三维空间,在 LQG 中,它可由  $SU(2)$  纯关系的编织而形成<sup>[3-5]</sup>. 为了得到物理的四维空时,可利用作为  $SU(2)$  关系的 4 单形中的 Pachner 跃迁( $\xi \rightarrow \zeta$ ). 这里  $\xi + \zeta = 5$ ;  $\xi, \zeta = 1, 2, 3, 4$ . 这种跃迁便是在不同跃迁台阶间 5 个四面体的替代移动,其方式只有  $1 \rightarrow 4$  和  $2 \rightarrow 3$  及它们的逆四种. 这种跃迁产生于 LQG 中 Hamilton 约束的主控. 当空间与时间组合成四维统一体系时,跃迁的两个台阶间的幅度将由存在二者之间的固有空时节律决定. 空时节律可通过它泄露在经典空时中信息的寻找而被确定<sup>[1]</sup>. 应当指出,光速及其不变性质将是一种折射出空时节律的至关重要的信息,它可能是来自于空间时间本身相结合的原始产物. 若令  $\Gamma_i, \Gamma_f$  分别代表自旋泡沫进行跃迁的始、末自旋网态,它们均由四面体的对偶 1-骨架给出,则跃迁过程中的整个空时自旋网的振幅为<sup>[1,3]</sup>

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f} = \sum_B \prod_{k=1}^{N-1} \mathcal{A}(\xi \rightarrow \zeta)_{k \rightarrow k+1}, \quad (1)$$

式中参与求乘积的指标  $k = 0, 1, \dots, N-2, N$  为构成空时网的空间自旋网  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{N-1}$  的数目,  $\mathcal{A}(\xi \rightarrow \zeta)_{k \rightarrow k+1}$  为由时间台阶  $k$  到  $k+1$  的用空时 4 单形给出的 Pachner 量子跃迁的振幅,  $B$  为空时网的可能着色. 在这种跃迁下,跃迁前后的自旋网所携带的顶角体积数及体积值将是不同的. 这将使得由跃迁后得到的自旋网编织出的空间体积必然经受改变,从而使空时自身在微观产生量子胀缩起伏.

### 2.2. 空间体积的确定和度量的量子胀缩

对于空时跃迁  $\xi \rightarrow \zeta$ ,跃迁前后顶角体积数由  $\xi$  变为  $\zeta$ . 对于  $1 \rightarrow 4$  跃迁,令跃迁前的顶角为  $v_1$ ,跃迁后的顶角分别为  $v_2, v_3, v_4, v_5$ ,则伴随的体积跃迁将由下式给出<sup>[6-8]</sup>:

$$2^{-3/2} l_0^3 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^{v_{i=1}}} \Rightarrow 2^{-3/2} l_0^3 \sum_{f=2}^5 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^{v_f}}. \quad (2)$$

这里  $l_0 = 4\sqrt{\pi} l_p$ , 其中  $l_p$  为 Planck 常数;  $G_{i_d}^{v_i}$  为 4 顶角的着色抓法数<sup>[9]</sup>,它是顶角中通过的圈线直接决定的顶角不变量,与高阶顶角的 3 顶角展开无关,并由下式给出:

$$G_{i_d} = A_d^4 + B_d^4. \quad (3)$$

这里

$$\begin{aligned} A_d^4 &= 4 [ i_{34} i_{23} (i_{12} + i_{14}) + i_{12} i_{14} (i_{34} + i_{23}) ] \\ &\quad + 2 ( i_{12}^2 i_{34} + i_{23}^2 i_{14} + i_{12} i_{34}^2 + i_{23} i_{14}^2 ) \\ &\quad + (i_{12} + i_{34}) (i_{23}^2 + i_{14}^2) \\ &\quad + (i_{23} + i_{14}) (i_{12}^2 + i_{34}^2), \quad (4) \\ B_d^4 &= 2 [ (i_{24} p_1 p_3) + i_{13} (p_2 p_4) ] \\ &\quad + i_{13} [ (i_{23} + i_{34}) p_1 + (i_{12} + i_{14}) p_3 ] \\ &\quad + i_{24} [ (i_{34} + i_{14}) p_2 + (i_{12} + i_{23}) p_4 ] \\ &\quad + (i_{13} + i_{24}) (i_{12}^2 + i_{23}^2 + i_{34}^2 + i_{14}^2), \quad (5) \end{aligned}$$

式中  $i_{\alpha\beta}$  为过 4 顶角的圈线组中的圈线数,顶角选定后,  $i_{\alpha\beta}$  自然给定. (2) 式是 LQG 中可以算出  $1 \rightarrow 4$  跃迁具体结果的明确算式. 用这些结果可以证明(2)式将导致跃迁后空间自身的体积必然膨胀. 对于各  $\Delta_3$  是均衡着色的空时编织,将膨胀 4 倍. 类似地,对于  $2 \rightarrow 3$  跃迁,跃迁前后的体积改变为

$$2^{-3/2} l_0^3 \sum_{i=1}^2 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^i} \Rightarrow 2^{-3/2} l_0^3 \sum_{f=3}^5 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^f}. \quad (6)$$

(6) 式也必将导致体积的改变. 对于均衡着色,将膨胀 3/2 倍. 从而得到空间区域在做相邻时间台阶间的跃迁时,其自身体积必将在微观经受量子跃迁引起的改变,这种改变将会导致微观尺度上空时体积和度量的量子涨落. 这是本文通过计算得到的一个明确结果.

通过四单形的上述 Pachner 跃迁,将给出空间自旋网  $\Gamma_k \rightarrow \Gamma_{k+1}$  的跃迁. 从  $k = 0$  到  $k+1 = N-1$  的  $N$  个台阶间的自旋网的跃迁,将形成以  $\Gamma_i = \Gamma_0$  为始态、以  $\Gamma_f = \Gamma_{N-1}$  为末态的一个完整空时区域. 该区域中的任意自旋网  $\Gamma$  将是编织成空间超曲面  $\Sigma$  的自旋网,  $\Gamma$  所携带的顶角体积的集合,按编织理论将用来描述平均平坦空间  $\Sigma$  的体积. 令空间  $\Sigma$  的度量为  $\delta^{ab}$  ( $a, b = 1, 2, 3$ ), 则当考虑时间进程并假定所有离散节点衍生出的时间方向一致时,含空间  $\Sigma$  的纯空时区域上的四维度量(因不存在引力)可自然规定成 Minkowski 度规  $\eta^{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). 而当考虑到被编织成的空间是拓扑平坦空间,并且存在有体积的平坦量子起伏时,含有空间  $\Sigma$  的四维纯空时区域的度量则应写成  $\varepsilon^{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$ . 这里的重复指标不求和,  $\varepsilon^{\mu\nu}$  称为空时度量拓扑演变参量,它表明在 Planck 尺度由于空间延着时间阶梯的跃迁产生的体积涨落所引起的空时度量的拓扑(或共形)平坦起伏.

### 3. 量子四面体的激发及引力的产生

自旋网的顶角和腿分别作为本征态,在算符作用下对它们的本征作用均是激发. 这样的激发产生的是空间的体积和面积自身,而跃迁产生了四维空时. 换言之,空时的本质意义就在于激发和跃迁<sup>[10,11]</sup>. 激发和跃迁维系着空时自身的存在和量子运动. 此外,LQG 还认为,激发可产生引力. 下面给出说明. 用  $n$  记一个正规 4 单形  $\Delta_4$  的一个边界四面体  $\Delta_3$  的中心顶角,与  $\Delta_3$  对偶的这一 4 顶角称为引力 4 顶角,如图 4 所示. 图 4 中的  $i, j, p, q$  用于标定 4 顶角的 4 条腿(同时也代表腿的引力颜色). 为表述方便,  $i, j, p, q$  也用以标定  $\Delta_4$  中的其余边界四面体  $\Delta_3$  中的 4 个中心顶角,如图 5 所示. 而  $n_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = i, j, p, q; \alpha \neq \beta)$  为通过顶角  $n$  的引力圈线组. 三维空间中的引力圈线组将形成自旋网,称为空间引力(扰动)自旋网. 与产生面积一样,空间引力自旋网中每一圈线组穿过  $\Delta_3$  侧面三角形时将产生激发,这种激发将是产生引力场的根据. 不过这种圈线组是在四面体不同侧面三角形上两两成对地产生激发,且共有六种,可将它们统一地记为  $h^{\alpha, \beta} (\alpha, \beta = i, j, p, q; \alpha \neq \beta)$ . 这里  $h^{\alpha, \beta}$  表征在三角形  $t_{n\alpha}$  和  $t_{n\beta}$  上产生的激发,并有  $h^{\alpha, \beta} = n_{\alpha\beta}$ . 而对于整条腿而言,以腿  $i$  为例,它在三角形  $t_{ni}$  上产生激发的量子数可记为  $i = n_{ij} + n_{ip} + n_{iq}$ . 这里提供  $h^{\alpha, \beta}$  的量子取值公式,从原理上使用的应是符合态和本征值双重线性关系的等距面积谱<sup>[6,7]</sup>

$$A = l_0^2 \sum_j j. \quad (7)$$

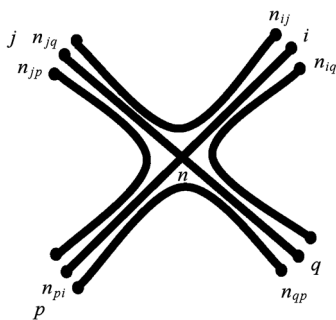


图 4 量子四面体的对偶 1-骨架的圈线组展开

在量子四面体每一侧面三角形  $t_{n\alpha}$  上分别取其单位法矢量  $N^{n\alpha}$ ,并在量子四面体  $\Delta_3$  的中心顶点取三维自然标架基,其指标为  $a, b, \dots$ . 这样必有单位

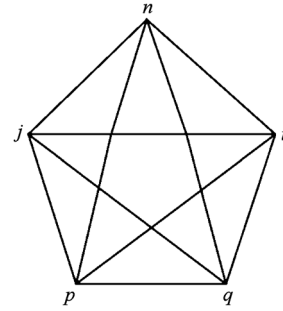


图 5 4 单形边界自旋网中顶角的标定

法矢量  $N^{n\alpha}$  在自然标架下的分量  $N_a^{n\alpha} (a = 1, 2, 3)$ . 而用  $h^{\alpha, \beta}$  表征的激发,利用法矢量在自然标架下展开,将有如下方程成立:

$$h^{\alpha, \beta} = h^{ab} N_a^{n\alpha} N_b^{n\beta} \quad (\alpha \neq \beta). \quad (8)$$

这里  $h^{ab}$  是三维空间中的 2 阶离散对称引力张量,它具有三维空间中引力场所具有的性质与量纲,用来描述引力场的起源. 它是由边界四面体  $\Delta_3$  的中心顶角的结网算子空间的结构,是在侧面三角形上的激发而产生的.

当考虑时间进程时,根据广义相对论(GR)提供的信息,含空间  $\Sigma$  的纯空时区域上的四维度量可写成 2 阶对称离散张量  $h^{\mu\nu}$ ,从而四维空时的统一度量可写成

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}. \quad (9)$$

当  $\varepsilon^{\mu\nu} = \varepsilon = 1$  时,(9) 式给出的是 GR 的度量分解表达式,此时的  $\eta^{\mu\nu}$  可视为相对论中的不变 Minkowski 度规. 当  $\varepsilon > 1$  时,将得到纯空时共形膨胀的结果. 而当  $\varepsilon^{00} = 1, \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} > 1$  时,将导致空间共形膨胀. 这种膨胀(含负膨胀)是空时自身的行为,与引力场及物质和能量的存在与否无关.

### 4. 结果及讨论

LQG 中的面积和体积算符与 Hamilton 算符不对易,因而面积与体积并不是完全可观测量. 但它们对应于具有本征态的算符,因而是部分可观测量. 它们的本征值仍然可用来作为 LQG 所描述的世界储存密码,并可用作预言. 并且,用本征值刻划的空间体积和面积,也将分别可以用量子概率团和量子概率云描述. 当空间尺度增大时,为物理学所能了解到的将是它们在某种平均意义下的连续结果,这种结果是尺度增大时物理学为人类认识做出

的一种选择. 这一选择, 产生的是欧氏几何. 这是空时从无序到有序的最直接和最经济的发展方式.

跃迁 4 单形决定空时四维体积 (即形成空时), 存在以下两种途径: 一种是由每一时间台阶中形成三维空间  $\Sigma$  的所有四面体贡献  $\Sigma$  中的三维区域的体积, 而由这样的体积并连同同时节律 (或 4 单形跃迁台阶间隔) 共同决定四维空时的体积与度量, 另一种是由跃迁 4 单形  $\Delta_4$  的顶角  $v_5$  的体积直接决定四维空时体积与度量, 而  $\Delta_4$  的三维边界四面体  $\Delta_3$  则只贡献三维空间  $\Sigma$  中区域的体积. 如上两种方法均涉及四面体与 4 单形体积的计算, 目前只有双元法 (亦称圈线法、股线法) 可以给出具有可靠性的明确结果. 这是因为用 4 单形作为跃迁胞腔时,  $\Delta_4$  中的各  $\Delta_3$  以及 5 个  $\Delta_3$  与  $\Delta_4$  间的对偶 1-骨架间的颜色必须是相容的.  $\Delta_3$  和  $\Delta_4$  的顶角网结中腿与其中圈线的走向分别由图 4 和图 1 给出. 只有圈线法可以计算出这种有具体圈线走向的顶角体积<sup>[9,10]</sup>, 而且不具有方法上的不确定性.  $\Delta_4$  与  $\Delta_3$  顶角中圈线走向与接合如图 6 所示. 图 6 中 5 个  $\Delta_3$  中的圈线走向均有 6 种, 与图 4 一致. 这些圈线均进入  $\Delta_4$  的 1-骨架  $v_5$  的腿中, 并在与其匹配下对接<sup>[1,3]</sup>. 采用双元法可以明确算出任意 5 顶角  $v_5$  的体积以及各  $v_4$  的体积, 这些正是利用圈线真实走向计算所得 (其余方法无此功能).  $v_4$  和  $v_5$  的体积  $V^4$  和  $V^5$  可分别表示为<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned}
 V^4 &= 2^{-3/2} l_0^3 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^4}, \\
 V^5 &= 2^{-3/2} l_0^3 \sqrt{\sum_d G_{i_d}^5}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

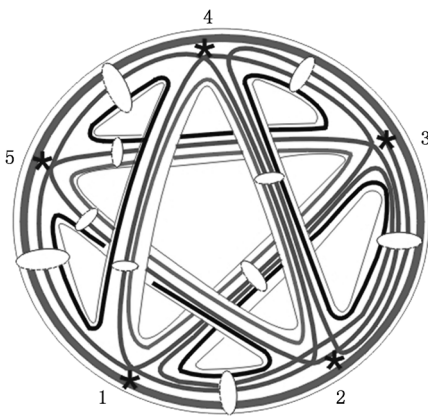


图 6 4 单形对偶自旋网中圈线结构示意图

对于离散引力扰动  $h^{\mu\nu}$ , 它的宏观极限应是 GR 的爱因斯坦方程的解. 而对于 (9) 式  $\varepsilon^{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$  项中的  $\eta^{\mu\nu}$ , 除作为基底选择可定义  $\eta^{ab} = \delta^{ab}$  外,  $\eta^{0a}$  还可利用规范条件确定为  $\eta^{00} = -1, \eta^{0a} = 0$ . 系数  $\varepsilon^{\mu\nu}$  表明的是平坦度量  $\eta^{\mu\nu}$  的量子起伏, 它将由空间膨胀以及空时节律 (或跃迁时间间隔) 参与确定<sup>[11]</sup>. 空时在微观是一种激发和跃迁的量子系统, 在宏观则由 GR 揭示了空时连续几何与物质间的关系.

一方面, (9) 式表明在宏观定域条件下建立并得到验证的 GR 描述的引力场对空时度量的影响, 只是体现在扰动张量  $h^{\mu\nu}$  上; 另一方面, (9) 式表明空时度量在微观 Planck 尺度还因受到空时动力学关系系统跃迁过程的影响而产生量子起伏, 并且这种起伏与引力场  $h^{\mu\nu}$ 、能量、粒子、延展体等存在无关<sup>[1]</sup>. 这两种机制 (即引力膨胀和空时自身量子膨胀) 都可以对空时度量  $g^{\mu\nu}$  产生影响, 从而在宏观大范围内产生空时胀缩的物理观测效应. 正如可将 GR 看做是抹杀了量子效应的平均下空时与引力的低能有效理论一样, Minkowski 空时 (度规) 也是一种从宏观研究入手得到的量子平均下定义的抽象空时. 在 LQG 的组合跃迁空时描述中, 纯空时度量始终是处于量子起伏的拓扑平坦涨落状态, 空时则是组合关系的量子跃迁系统.

## 5. 结 论

本文的研究表明, 在 LQG 中, 引力也是由激发而产生, 并且是产生在 4 单形  $\Delta_4$  的边界四面体  $\Delta_3$  的边界曲面上, 而且曲率也是以这种方式离散地出现在这种曲面上, 不存在连续的方法使其成为无穷大. 而 (9) 式则是从微观 Planck 尺度到 GR 所描述的宏观空时范围的一种统一的双变量空时与引力理论模式. 研究表明: 三维空间体积可以由激发产生 (即形成三维空间), 四维空时则是由三维空间跃迁所形成. 引力以激发的形式伴随空时而存在. 空时是引力存在的本体, 引力是本体上的织绣. 除引力膨胀外, 理论上可预言宇宙还存在空时自身膨胀. 空时自身体积的改变, 将具有改变和抵消引力的效应.

- [1] Rovelli C 2004 *Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Ashtekar A, Tate R 1991 *Non-perturbative Canonical Gravity* (Singapore: World Scientific)
- [3] Thiemann T 2006 *Introduction to Modern Canonical Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Rovelli C, Smolin L 1990 *Nucl. Phys. B* **331** 80
- [5] Ashtekar A, Rovelli C, Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237
- [6] Shao D, Shao L, Shao C G 2008 *Chin. Phys. Lett.* **40** 46
- [7] Shao D, Shao L, Shao C G 2010 *Int. J. Mod. Phys. A* **25** 1339
- [8] Krasnov K 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** L47
- [9] Shao L, Shao D, Shao C G, Zhang Z Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5637 (in Chinese) [邵亮、邵丹、邵常贵、张祖全 2006 物理学报 **55** 5637]
- [10] De Pietri R, Rovelli C 1996 *Phys. Rev. D* **54** 2664
- [11] Major S, Smolin L 1996 *Nucl. Phys. B* **473** 263

## On the creation of spacetime volume and gravity in loop gravity

Shao Dan<sup>1)</sup> Shao Liang<sup>2)†</sup> Shao Chang-Gui<sup>3)</sup>

1) (Institute of Light and Electronic Information, Jiangnan University, Wuhan 430056, China)

2) (Department of Applied Physics, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

3) (Institute of Theoretical Physics, Hubei Education University, Wuhan 430205, China)

(Received 6 September 2010; revised manuscript received 25 May 2011)

### Abstract

Using the 4-simplex and its dual-skeleton spin networks, a quantum transition of pure spacetime is described. The change of vertex volumes between successive steps of the transition of the three-dimensional space woven by spin networks is demonstrated. At the same time, a model of quantum fluctuation of the four-dimensional spacetime is given. Employing the excitations created when the loops on the edges of spin network pierce surfaces, a 2 order symmetric tensor  $h^{ab}$  is obtained in three-dimensional space. Based on the viewpoint that the spacetime is excitation and transition system, the creation and the change mechanisms of the gravitational field  $h^{\mu\nu}$  are investigated.

**Keywords:** quantum inflation of volume, fluctuation of spacetime metric, excitation of gravitational perturbation, creation of 2 order symmetric tensor

**PACS:** 04. 60. Ds

† Corresponding author. E-mail: liangshao2006@126.com