

# 非高斯噪声驱动下非对称双稳系统的平均首次穿越时间与随机共振研究\*

张静静 靳艳飞<sup>†</sup>

(北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2010年4月28日收到; 2011年7月4日收到修改稿)

研究了乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同激励下非对称双稳系统的平均首次穿越时间和随机共振问题. 利用路径积分法和两态模型理论, 推导出平均首次穿越时间和信噪比的表达式. 研究表明: 势阱非对称性对两个不同方向的平均首次穿越时间的影响是不同的. 信噪比是加性噪声强度和势阱非对称性的非单调函数, 系统出现了随机共振现象; 信噪比是乘性噪声强度的单调函数, 没有共振峰出现. 这说明该系统中乘性噪声强度和加性噪声强度对信噪比的影响是不同的.

**关键词:** 非高斯噪声, 非对称双稳系统, 平均首次穿越时间, 随机共振

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

## 1. 引言

“随机共振”是 Benzi 等<sup>[1]</sup>于 1981 年提出并用来解释地球冰川期问题. 此后, 随机共振及其相关问题的研究引起人们的广泛关注, 并在理论和实验方面取得重大突破<sup>[2-10]</sup>. 在随机共振及其相关问题的研究中, 对称双稳系统已成为人们广泛采用的经典模型. 然而在许多实际的物理系统中对称性是不能保证的, 故势阱的非对称性被引入磁通量闸门磁力计量器和超导量子干涉设备中用来探测弱信号<sup>[11-13]</sup>. Li<sup>[14]</sup>研究了由白噪声驱动的双稳系统中势阱的非对称性对随机共振的影响, 发现势阱的非对称性能够使系统的信噪比减小. 董晓娟<sup>[15]</sup>研究了基于关联噪声的带时滞项的非对称双稳系统的随机共振, 结果表明由于时滞量的存在系统出现了随机共振. 靳艳飞等<sup>[16,17]</sup>对乘性白噪声和加性白噪声共同驱动下的非对称双稳系统的平均首次穿越时间和随机共振进行了研究. 张娜敏等<sup>[18]</sup>研究了由关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的非对称双稳系统中势阱的非对称性及噪声强度对系统两个

方向平均首次穿越时间的影响. 周丙常等<sup>[19]</sup>研究了周期矩形信号和关联的乘性色噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统的随机共振现象.

上述工作主要研究的是高斯噪声激励的情况, 而已有实验研究证明<sup>[20,21]</sup>, 在某些神经系统、生物系统和物理系统中的噪声源倾向于非高斯分布. Fuentes 等<sup>[22,23]</sup>研究了非高斯噪声对双稳系统的平均首次穿越时间和随机共振的影响. Wu 和 Zhu<sup>[24]</sup>对非高斯噪声和高斯白噪声共同激励下带有时滞项的对称双稳系统进行了随机共振研究. Goswami 等<sup>[25]</sup>对乘性非高斯色噪声和加性非高斯色噪声共同驱动下的动力系统进行了研究, 并进行了数值模拟. 文献<sup>[26]</sup>研究了单模激光模型在非高斯噪声激励下的非平衡相变问题. 上述研究大都是针对非高斯噪声激励下的对称双稳系统进行的, 而对非高斯噪声激励下的非对称双稳系统的研究很少. 因此, 本文重点研究不相关的乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同驱动下的非对称双稳系统, 分别讨论势阱的非对称性、噪声强度、噪声相关时间及非高斯参数对平均首次穿越时间与随机共振的影响.

\* 国家自然科学基金(批准号:10972032)、北京理工大学优秀青年教师计划(批准号:2010YS0101)和北京理工大学科技创新计划重大项目资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: jinyf@bit.edu.cn

## 2. 定态概率密度函数

考虑一个由乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声共同激励的非对称双稳系统,其朗之万方程如下:

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + x\eta(t) + \xi(t) + A\cos(\omega t), \quad (1)$$

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + rx, \quad (2)$$

其中  $r$  代表势阱的非对称性,势函数  $U(x)$  在  $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$  的条件下表示一个非对称双稳势函数,它具有两个稳定状态  $x_{s1}, x_{s2}$  和一个不稳定状态  $x_{un}$ <sup>[16]</sup>

$$x_{s1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right], \quad (3a)$$

$$x_{s2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right], \quad (3b)$$

$$x_{un} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right]. \quad (3c)$$

乘性噪声项  $\eta(t)$  为非高斯噪声,其统计性质如下<sup>[22]</sup>:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\eta}V_q(\eta) + \frac{1}{\tau}\varepsilon(t), \quad (4)$$

其中

$$V_q(\eta) = \frac{D}{\tau(q-1)}\ln\left[1 + \frac{\tau}{D}(q-1)\frac{\eta^2}{2}\right], \quad (5a)$$

$$\langle\eta(t)\rangle = 0, \quad (5b)$$

$$\langle\eta^2(t)\rangle = \begin{cases} \frac{2D}{\tau(5-3q)} & \left(q \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)\right), \\ \infty & \left(q \in \left[\frac{5}{3}, 3\right)\right). \end{cases} \quad (5c)$$

这里  $\xi(t)$  和  $\varepsilon(t)$  均为高斯白噪声,统计性质可以由它们的均值和方差来表示,

$$\langle\varepsilon(t)\rangle = \langle\xi(t)\rangle = 0, \quad (6a)$$

$$\langle\varepsilon(t)\varepsilon(t')\rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (6b)$$

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = 2Q\delta(t-t'), \quad (6c)$$

$$\langle\xi(t)\varepsilon(t')\rangle = 0. \quad (6d)$$

$\tau$  为非高斯噪声  $\eta(t)$  的相关时间, $D$  和  $Q$  分别为  $\varepsilon(t)$  和  $\xi(t)$  的噪声强度.

当  $|q-1| \ll 1$  时,应用路径积分法<sup>[22,23]</sup>可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\frac{dV_q(\eta)}{d\eta} &= \frac{\eta}{\tau}\left[1 + \frac{\tau}{D}(q-1)\frac{\eta^2}{2}\right]^{-1} \\ &\approx \frac{\eta}{\tau}\left[1 + \frac{\tau}{D}(q-1)\frac{\langle\eta^2\rangle}{2}\right]^{-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\eta. \quad (7)$$

将(7)式代入(4)式,则(4)式可以简化为

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\eta(t) + \frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\varepsilon_1(t). \quad (8)$$

这里  $\varepsilon_1(t)$  为高斯白噪声,

$$\langle\varepsilon_1(t)\rangle = 0, \quad (9a)$$

$$\langle\varepsilon_1(t)\varepsilon_1(t')\rangle = 2D_{\text{eff}}\delta(t-t'). \quad (9b)$$

$\tau_{\text{eff}}$  和  $D_{\text{eff}}$  分别为有效噪声相关时间和有效噪声强度<sup>[26]</sup>,

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{2(2-q)}{5-3q}\tau, \quad (10a)$$

$$D_{\text{eff}} = \left(\frac{2(2-q)}{5-3q}\right)^2 D. \quad (10b)$$

参数  $q$  表示  $\eta(t)$  偏离高斯分布的程度,当  $q \rightarrow 1$  时, $\eta(t)$  可近似看成相关时间为  $\tau_{\text{eff}}$ ,噪声强度为  $D_{\text{eff}}$  的高斯色噪声.

应用统一色噪声近似<sup>[2,24]</sup>,方程(1)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{E(x)}[x - x^3 - r + x\varepsilon_1(t) \\ &\quad + \xi(t) + A\cos(\omega t)], \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$E(x) = 1 - \tau_{\text{eff}}\left[-2x^2 + \frac{r}{x} - \frac{A\cos(\omega t)}{x}\right],$$

另外, $\tau \ll 1$ .

方程(11)还可以写为下列一般形式:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\Gamma(t). \quad (12)$$

这里  $\Gamma(t)$  是高斯白噪声,

$$\langle\Gamma(t)\rangle = 0, \quad (13a)$$

$$\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = 2\delta(t-t'), \quad (13b)$$

$$f(x) = \frac{x - x^3 - r + A\cos(\omega t)}{E(x)}, \quad (13c)$$

$$g(x) = \frac{G(x)}{E(x)}, \quad (13d)$$

$$G(x) = (D_{\text{eff}}x^2 + Q)^{1/2}. \quad (13e)$$

由方程(1)–(13)可得到如下近似的 Fokker-Planck 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}[A(x)P(x,t)] \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x)P(x,t)], \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$A(x) = f(x) + g(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$= \frac{x - x^3 - r + A \cos(\omega t)}{1 - \tau_{\text{eff}} \left[ -2x^2 + \frac{r}{x} - \frac{1}{x} A \cos(\omega t) \right]} + \frac{1}{2} B'(x), \quad (15a)$$

$$B(x) = g^2(x) = \frac{D_{\text{eff}} x^2 + Q}{\left\{ 1 - \tau_{\text{eff}} \left[ -2x^2 + \frac{r}{x} - \frac{1}{x} A \cos(\omega t) \right] \right\}^2}. \quad (15b)$$

由(14)和(15)式可得非对称双稳系统的定态概率密度函数为

$$\rho_{\text{st}}(x) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp \left[ -\frac{\tilde{U}(x)}{D_{\text{eff}}} \right]. \quad (16)$$

这里  $N$  为归一化常数, 广义势函数  $\tilde{U}(x)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & \frac{k_1}{2} x^4 + \left( \frac{1}{2} - k_1 k_2 \right) x^2 + k_1 r x - \frac{k_1 r^2}{h} \ln |x| \\ & + \left( k_1 k_3 - \frac{k_2}{2} \right) \ln (D_{\text{eff}} x^2 + Q) \\ & + \left[ \frac{(1+k_1)r}{\sqrt{h}} - k_1 r \sqrt{h} \right] \arctan \left( \sqrt{\frac{D_{\text{eff}}}{Q}} x \right) \\ & + \left\{ \left[ k_1 \sqrt{h} - \frac{1+k_1}{\sqrt{h}} \right] \arctan \left( \sqrt{\frac{D_{\text{eff}}}{Q}} x \right) \right. \\ & \left. - \frac{k_1 r}{h} \ln (D_{\text{eff}} x^2 + Q) \right. \\ & \left. + \frac{2k_1 r}{h} \ln |x| - k_1 x \right\} A \cos(\omega t), \quad (17) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= \tau_{\text{eff}}, \\ k_2 &= 1 + h, \\ k_3 &= h^2 + h + r^2 / (2h), \\ h &= Q / D_{\text{eff}}. \end{aligned}$$

### 3. 平均首次穿越时间

令(1)式中  $A = 0$ , 即系统无周期信号激励的情况, 此时(1)式的 Fokker-Planck 方程和定态概率密度函数的表达式对应于(11)–(17)式中取  $A = 0$ .

利用平均首次穿越时间的定义和最速下降法<sup>[2]</sup>, 可得非对称双稳系统的两个不同方向的平均首次穿越时间表达式如下:

$$T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) = \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)\rho_{\text{st}}(x)} \int_{-\infty}^x dy \rho_{\text{st}}(y)$$

$$= \frac{2\pi \left| (-1 + 3x_{s1}^2)(-1 + 3x_{\text{un}}^2) \right|^{-1/2}}{\sqrt{B(x_{s1})}} \times \exp \left\{ \frac{\tilde{U}(x_{\text{un}}) - \tilde{U}(x_{s1})}{D_{\text{eff}}} \right\}, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)\rho_{\text{st}}(x)} \int_x^{+\infty} dy \rho_{\text{st}}(y) \\ &= \frac{2\pi \left| (-1 + 3x_{s2}^2)(-1 + 3x_{\text{un}}^2) \right|^{-1/2}}{\sqrt{B(x_{s2})}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{\tilde{U}(x_{\text{un}}) - \tilde{U}(x_{s2})}{D_{\text{eff}}} \right\}, \quad (18b) \end{aligned}$$

其中  $\tilde{U}(x)$  同(17)式中取  $A = 0$  时的表达式,  $x_{s1}, x_{s2}$  和  $x_{\text{un}}$  的定义同(3)式.  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  分别为由  $x_{s1}$  到  $x_{s2}$  和由  $x_{s2}$  到  $x_{s1}$  的平均首次穿越时间.

#### 3.1. 理论分析

根据平均首次穿越时间的表达式(18), 讨论  $D, Q, r$  和  $q$  对平均首次穿越时间的影响. 图1给出了两个不同方向的平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为势阱非对称性  $r$  的函数随非高斯参数  $q$  的变化情况. 由图1(a)可见,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随  $r$  的增加而单调递增, 且随着  $q$  的增加而单调减小. 图1(b)出现了完全不同的情况,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随着  $r$  的增加先减小再增加, 故在  $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) - r$  曲线上存在一个极小值, 形成了一个抑制平台. 同时, 曲线极小值的位置随着  $q$  的增加而逐渐降低.

图2给出了  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为  $D$  的函数随  $r$  的变化情况. 从图2可以看出,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随  $D$  的增加而单调减小. 在图2(a)中, 开始时  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随着  $r$  的增加而增加, 但是当  $D \geq 8.2$  时,  $r = 0.1$  所对应的曲线值成为三条曲线中最小. 在图2(b)中, 开始时  $r = 0.1$  所对应的曲线值是三条曲线中最小, 但是当  $D \geq 1$  时,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随着  $r$  的增加而增加.

图3给出了  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为  $Q$  的函数随  $r$  的变化情况. 由图3可见,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随  $Q$  的增加而减小. 在图3(a)中,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  开始时随着  $r$  的增加而增加, 但是当  $Q \geq 3.1$  时这种情形不再保持. 在图3(b)中,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  开始时随着  $r$  的增加而减

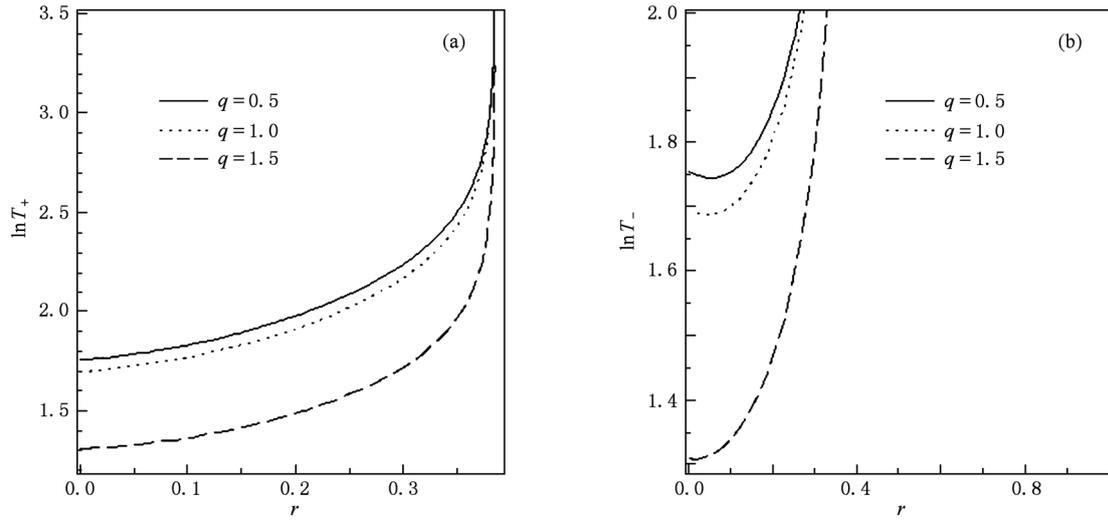


图1 平均首次穿越时间  $T_{\pm}$  作为  $r$  的函数随  $q$  的变化  $\tau = 0.1, D = 0.8, Q = 0.8$ . (a)  $\ln T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})-r$ , (b)  $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})-r$

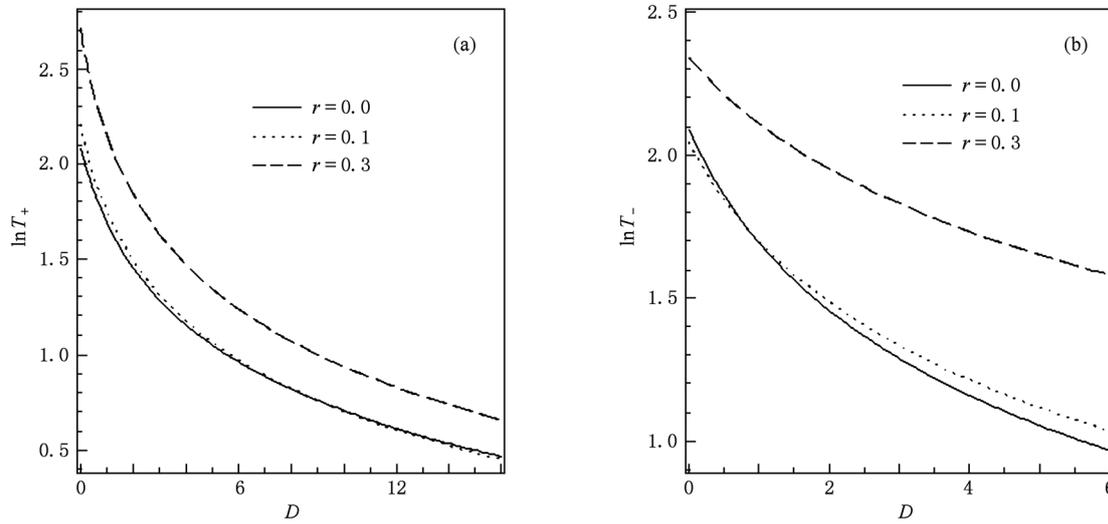


图2 平均首次穿越时间  $T_{\pm}$  作为  $D$  的函数随  $r$  的变化  $\tau = 0.1, q = 0.5, Q = 0.8$ . (a)  $\ln T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})-D$ , (b)  $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})-D$

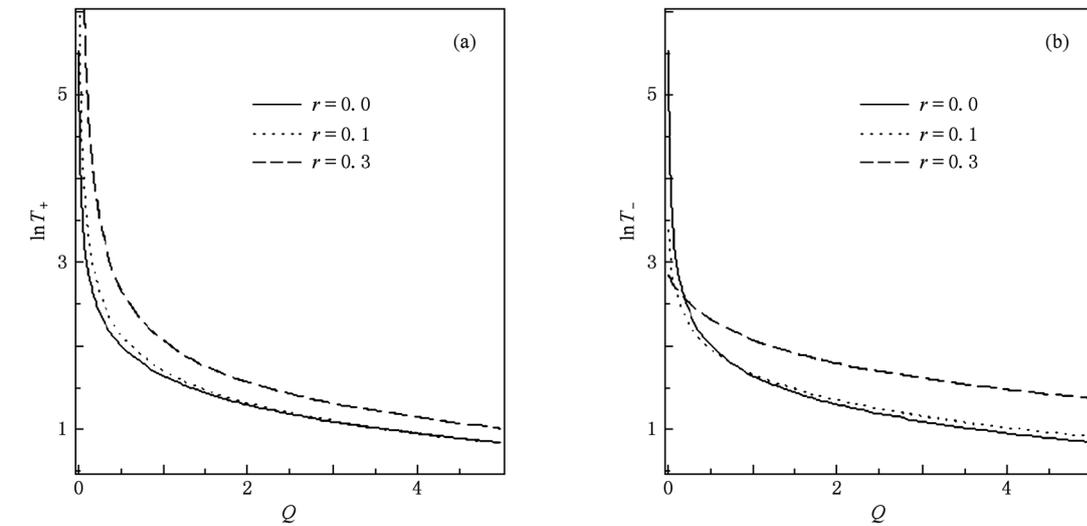


图3 平均首次穿越时间  $T_{\pm}$  作为  $Q$  的函数随  $r$  的变化  $\tau = 0.1, q = 0.5, D = 0.8$ . (a)  $\ln T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})-Q$ , (b)  $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})-Q$

小,当  $Q \geq 0.8$  时,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随着  $r$  的增加而增加,这与文献[16] 所得结果不同,说明非高斯噪声的引入对平均首次穿越时间是有影响的. 当  $r = 0$  时,方程(2) 退化为对称双稳模型,平均首次穿越时间与初始状态无关,故在图 2 和图 3 中,分别对应于  $r = 0$  的  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  曲线和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  曲线是相同的.

图 4 给出了当  $r$  取不同值时,两个不同方向的平均首次穿越时间之比  $T_+/T_-$  随噪声强度  $D$  和  $Q$  的

变化关系. 从图 4 可以看出,当  $r = 0$  时,  $T_+/T_-$  恒为 1,表明在对称双稳系统中  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) = T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ . 在图 4(a) 中,  $T_+/T_-$  随着  $D$  的增加而减小,  $T_+/T_-$  开始随着  $r$  的增加而单调增加,而当  $D$  逐渐增加到 2.8 时,  $T_+/T_-$  便随着  $r$  的增加而单调减小. 在图 4(b) 中,  $T_+/T_-$  随着  $Q$  的增加而减小,  $T_+/T_-$  开始随着  $r$  的增加而单调增加,当  $Q$  逐渐增加到 1.7 时,曲线便随着  $r$  的增加而逐渐下移,并且  $T_+/T_-$  小于 1.

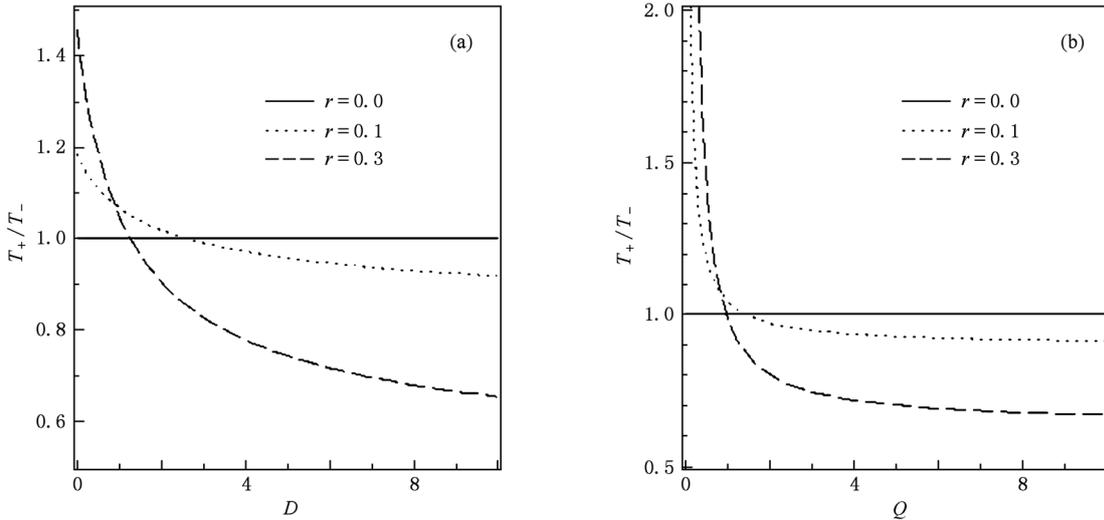


图 4 当  $r = 0, 0.1, 0.3$  时,两个不同方向的平均首次穿越时间之比  $T_+/T_-$  随  $D$  和  $Q$  的变化  $\tau = 0.1, q = 0.5$ . (a) 当  $Q = 0.8$  时  $T_+/T_-$  随  $D$  的变化, (b) 当  $D = 0.8$  时  $T_+/T_-$  随  $Q$  的变化

### 3.2. 数值模拟

为了检验所得理论结果的有效性及其所用近似方法的适用范围,有必要对原方程(1) 进行数值模

拟. 我们利用欧拉方法对方程(1), (4), (6) 进行数值积分,通过 Box-Muller 算法和一伪随机数发生器产生高斯白噪声,得到时间序列的数值解. 计算中,积分步长取为 0.008,并对 1024 个系综进行平均.

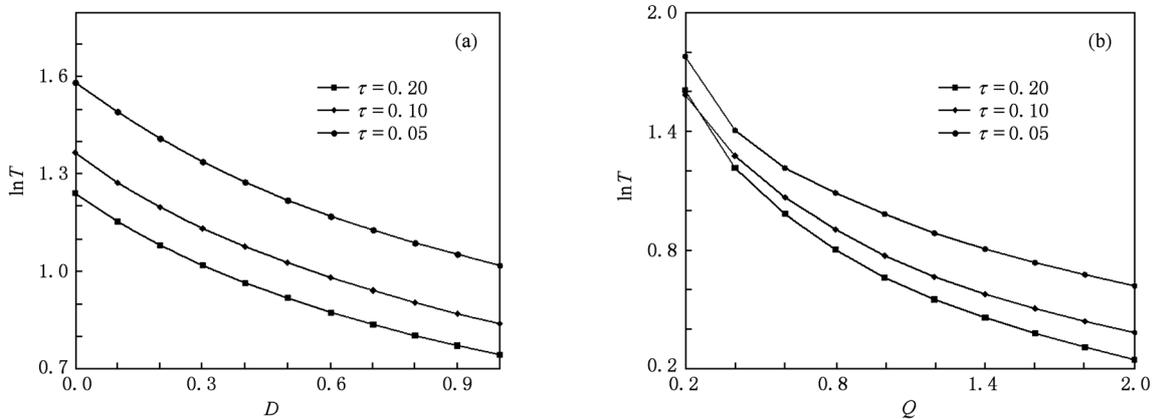


图 5 当  $\tau = 0.05, 0.1, 0.2$  时,平均首次穿越时间  $T$  随  $D$  和  $Q$  的变化  $r = 0, q = 0.5$ . (a) 当  $Q = 0.8$  时  $T$  随  $D$  的变化, (b) 当  $D = 0.8$  时  $T$  随  $Q$  的变化

为了方便起见,取  $r = 0, q = 0.5$ , 计算噪声相关时间  $\tau$  取不同值时平均首次穿越时间  $T$  随噪声强度  $D$  和  $Q$  的变化, 所得结果如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 平均首次穿越时间  $T$  是  $D$  和  $Q$  的减函数, 随着  $\tau$  的增加,  $T$  逐渐增大. 由此可知, 理论分析结果与数值模拟结果相符, 但近似理论适用于  $\tau$  不太大的情况.

#### 4. 随机共振

当(1)式中  $A \neq 0$ , 即系统有外加周期信号激励的情况, 可得其 Fokker-Planck 方程和定态概率密度函数的表达式对应于(11)–(17)式. 在绝热近似条件和时间尺度  $T \gg \omega_0^{-1}$  时(其中  $\omega_0$  为方程(1)仅受加性和乘性白噪声的特征转换率), 粒子由  $x_{s1}$  所在的势阱跃迁到  $x_{s2}$  所在的势阱的跃迁率以及相应的逆跃迁率的表达式为

$$W_+ = \frac{|(-1 + 3x_{s1}^2)(-1 + 3x_{un}^2)|^{1/2}}{2\pi} \times \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_{s1})}{D_{\text{eff}}}\right], \quad (19)$$

$$W_- = \frac{|(-1 + 3x_{s2}^2)(-1 + 3x_{un}^2)|^{1/2}}{2\pi} \times \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_{s2})}{D_{\text{eff}}}\right], \quad (20)$$

其中  $x_{s1}, x_{s2}, x_{un}$  和  $\tilde{U}(x)$  的定义同(3)和(17)式.

根据两态模型理论<sup>[2]</sup>, 得到系统的信噪比  $R_{\text{SN}}$  表达式如下:

$$R_{\text{SN}} = \frac{A^2 \pi (\mu_1 \beta_2 + \mu_2 \beta_1)^2}{4\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= A \cos(\omega t), \\ \mu_1 &= W_+ \Big|_{\bar{\beta}=0}, \\ \mu_2 &= W_- \Big|_{\bar{\beta}=0}, \\ \beta_1 &= -\frac{dW_+}{d\bar{\beta}} \Big|_{\bar{\beta}=0}, \\ \beta_2 &= -\frac{dW_-}{d\bar{\beta}} \Big|_{\bar{\beta}=0}. \end{aligned}$$

根据信噪比的表达式(21), 讨论噪声强度  $D$  和  $Q$ 、噪声相关时间  $\tau$ 、势阱的非对称性  $r$  和非高斯参数  $q$  对随机共振的影响.

图 6 给出了信噪比  $R_{\text{SN}}$  作为  $r$  的函数随着  $q$  和  $\tau$  的变化关系. 可以发现图 6 中的曲线均出现了明显的单峰结构, 表明有随机共振出现. 图 6(a) 中, 信噪比曲线的峰值位置随着  $q$  值的增加而向左下方移动. 在图 6(b) 中, 信噪比随着  $\tau$  值的增加而增加. 图 6 表明, 在该系统中非高斯噪声的加入有利于信噪比的提高.

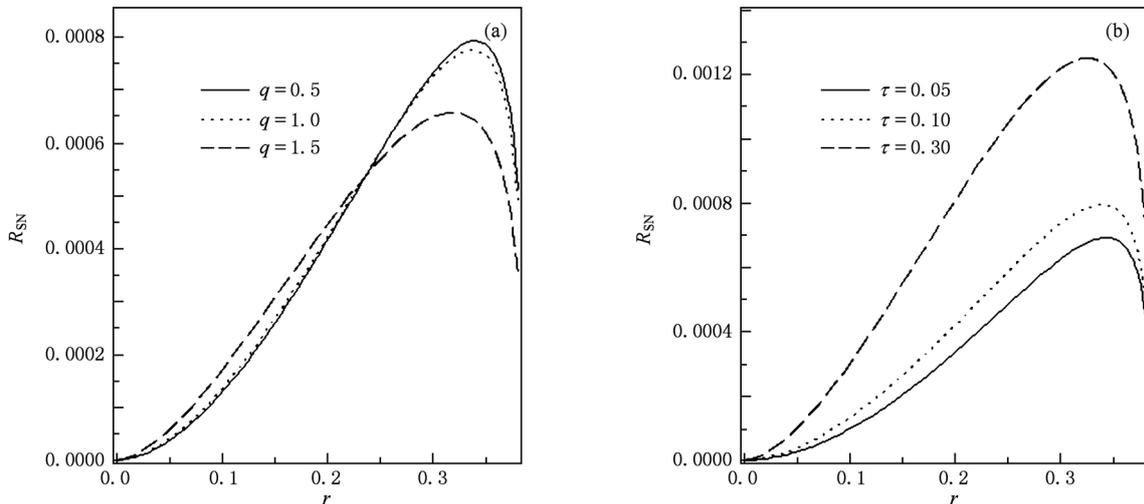


图 6 信噪比  $R_{\text{SN}}$  作为  $r$  的函数随  $q$  和  $\tau$  的变化  $A = 0.1, D = 0.8, Q = 0.8$ . (a) 当  $\tau = 0.1$  时  $R_{\text{SN}}$  随  $q$  的变化, (b) 当  $q = 0.5$  时  $R_{\text{SN}}$  随  $\tau$  的变化

图 7 给出了当  $q$  取不同值时信噪比  $R_{\text{SN}}$  随  $D$  和  $Q$  的变化关系. 在图 7(a) 中, 信噪比  $R_{\text{SN}}$  是  $D$

的单调减函数, 没有出现随机共振现象, 同时, 当  $D \leq 0.4$  时, 信噪比曲线随着  $q$  的增加而上移, 之

后便随着  $q$  的增加而逐渐向下移动. 在图 7(b) 中,  $R_{SN}$  是  $Q$  的非单调函数, 随着  $Q$  值的变化, 信噪比曲线出现了明显的单峰, 说明出现了随机共振现象, 并且共振峰值随着  $q$  的增加而增加. 由

(10) 式可知, 当  $q$  取一定值时, 乘性噪声强度  $D_{eff}$  与  $D$  之间仅相差一个常数倍, 故图 7 说明在该系统中乘性噪声强度和加性噪声强度对信噪比的影响是不同的.

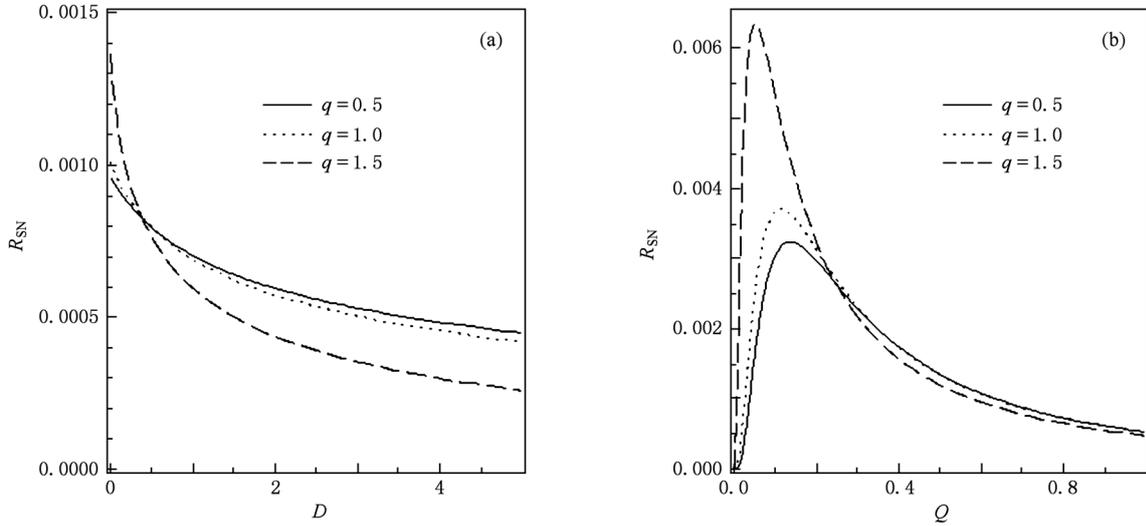


图 7 当  $q = 0.5, 1.0, 1.5$  时, 信噪比  $R_{SN}$  随  $D$  和  $Q$  的变化  $A = 0.1, \tau = 0.1, r = 0.3$ . (a) 当  $Q = 0.8$  时  $R_{SN}$  随  $D$  的变化, (b) 当  $D = 0.8$  时  $R_{SN}$  随  $Q$  的变化

图 8 给出了当  $\tau$  取不同值时, 信噪比  $R_{SN}$  随  $D$  和  $Q$  的变化关系. 从图 8(a) 可见,  $R_{SN}$  是  $D$  的单调减函数, 没有随机共振现象产生, 曲线随着  $\tau$  的增加而逐渐增加. 在图 8(b) 中,  $R_{SN}$  是  $Q$  的非单调函数, 随着

$Q$  的变化, 信噪比曲线出现了明显的单峰, 说明出现了随机共振现象, 并且共振峰的位置随着  $\tau$  值的增加而向右上方移动, 表明噪声的相关时间有利于增强输出信号.

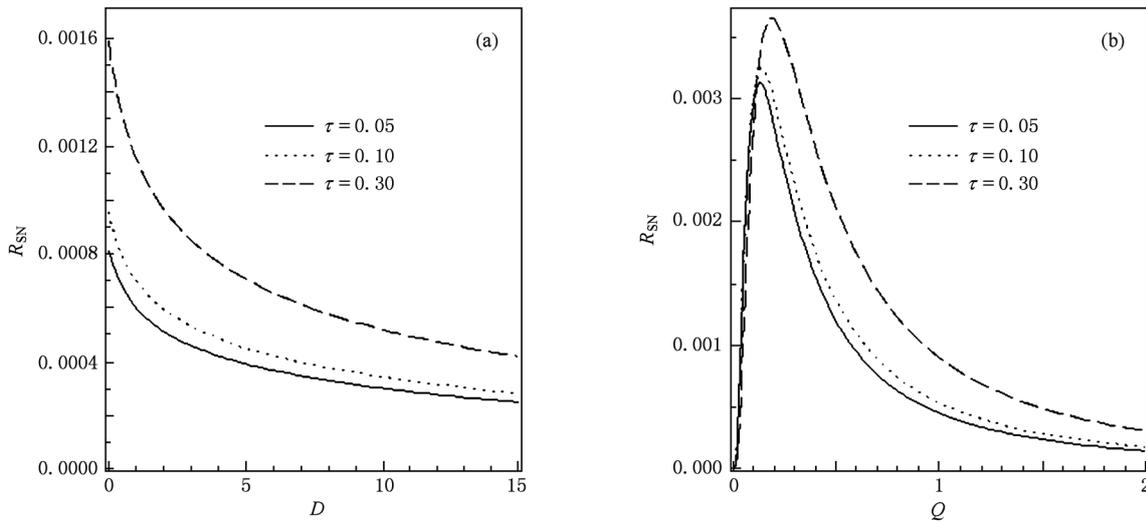


图 8 当  $\tau = 0.05, 0.1, 0.3$  时, 信噪比  $R_{SN}$  随  $D$  和  $Q$  的变化  $A = 0.1, q = 0.5, r = 0.3$ . (a) 当  $Q = 0.8$  时  $R_{SN}$  随  $D$  的变化, (b) 当  $D = 0.8$  时  $R_{SN}$  随  $Q$  的变化

## 5. 结 论

本文利用路径积分法研究了乘性非高斯噪声和加性高斯白噪声联合激励下非对称双稳系统的平均首次穿越时间和随机共振,数值模拟结果验证了近似方法的可行性. 研究结果表明,  $r$  对  $T_+$  和  $T_-$  的影响是不同的,例如当  $q$  取不同的值时,  $\ln T_+ - r$  曲

线是单调递增的,而  $\ln T_- - r$  曲线上有极小值出现,出现了“抑制”现象. 运用两态模型理论得到信噪比  $R_{SN}$  的表达式,通过对信噪比曲线的分析发现:随着  $Q$  和  $r$  的增加,系统出现了随机共振,而  $R_{SN}$  随  $D$  的变化曲线却呈现单调递减趋势,没有共振峰出现. 这说明在该系统中乘性噪声强度和加性噪声强度对信噪比的影响不同,非高斯噪声的加入有利于信噪比的提高.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海:上海科技教育出版社)]
- [3] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [4] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [5] Cao L, Liu L, Zhang L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [曹 力、刘 莉、张 立 2010 物理学报 **59** 1494]
- [6] Du L C, Mei D C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 946
- [7] Xu J X, Zhang G J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese) [徐健学、张广军 2005 物理学报 **54** 557]
- [8] Luo X Q, Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴、朱士群 2002 物理学报 **51** 977]
- [9] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [10] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
- [11] Bulsara A R, Inchiosa M E, Gammaitoni L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2162
- [12] Inchiosa M E, Bulsara A R, Gammaitoni L 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4049
- [13] Gammaitoni L, Bulsara A R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 230601
- [14] Li J H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031104
- [15] Dong X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5618 (in Chinese) [董小娟 2007 物理学报 **56** 5618]
- [16] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、马少娟、李 伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [17] Jin Y F, Xu W, Xu M 2005 *Chaos Solitons Fract.* **26** 1183
- [18] Zhang N M, Xu W, Wang C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5083 (in Chinese) [张娜敏、徐 伟、王朝庆 2007 物理学报 **56** 5083]
- [19] Zhou B C, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2035 (in Chinese) [周丙常、徐 伟 2008 物理学报 **57** 2035]
- [20] Bezrukov S M, Vodyanoy I 1997 *Nature* **385** 319
- [21] Goychuk I, Hänggi P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4272
- [22] Fuentes M A, Toral R, Wio H S 2001 *Physica A* **295** 114
- [23] Fuentes M A, Wio H S, Toral R 2002 *Physica A* **303** 91
- [24] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
- [25] Goswami G, Majee P, Ghosh P K, Bag B C 2007 *Physica A* **374** 549
- [26] Jin Y F 2010 *Dynamical Systems: Discontinuity, Stochasticity and Time-Delay* (New York: Springer) pp223—231

# Mean first-passage time and stochastic resonance in an asymmetric bistable system driven by non-Gaussian noise<sup>\*</sup>

Zhang Jing-Jing Jin Yan-Fei<sup>†</sup>

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 28 April 2010; revised manuscript received 4 July 2011)

## Abstract

In this paper, mean first-passage time (MFPT) and stochastic resonance (SR) are investigated in an asymmetric bistable system driven by multiplicative non-Gaussian noise and additive Gaussian white noise. Using the path integral approach and two-state theory, the expression of MFPT and the signal-to-noise ratio (SNR) are derived. The results show that the influences of the asymmetric coefficient on the MFPTs in two opposite directions are entirely different. SNR is a non-monotonic function of the additive noise intensity and asymmetric coefficient, therefore, an SR is found in this system. Whereas SNR is a monotonic function of the multiplicative noise intensity and no SR appears. This demonstrates that the effect of the multiplicative noise intensity on SNR is different from that of the additive noise intensity in the system.

**Keywords:** non-Gaussian noise, asymmetric bistable system, mean first-passage time, stochastic resonance

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972032), the Excellent Young Scholars Program of Beijing Institute of Technology, China (Grant No. 2010YS0101), and the Major Program of the Science and Technology Innovation of Beijing Institute of Technology, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jinyf@bit.edu.cn