

## 忆阻混沌电路的分析与实现\*

包伯成<sup>1)†</sup> 胡文<sup>2)</sup> 许建平<sup>3)</sup> 刘中<sup>4)</sup> 邹凌<sup>1)</sup>

1) (常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164)

2) (南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 210016)

3) (西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

4) (南京理工大学电子工程系, 南京 210094)

(2010年10月5日收到; 2011年4月18日收到修改稿)

具有记忆功能的忆阻器是除电阻器、电容器和电感器之外的第四种基本二端电路元件. 提出了由  $\varphi$ - $q$  平面上的一条三次单调上升的非线性曲线来确定的光滑磁控忆阻器, 它有着斜“8”字形的类紧磁滞回线的伏安特性曲线. 采用此忆阻器和负电导构成的有源忆阻器替换蔡氏混沌电路中的蔡氏二极管, 导出了一个基于忆阻器的混沌振荡电路. 此外, 利用常规的运算放大器和乘法器等元器件给出了有源忆阻器的等效电路实现形式. 理论分析、数值仿真和电路仿真结果一致, 均表明忆阻混沌电路的动力学行为依赖于忆阻器的初始状态, 在不同初始状态下存在混沌振荡、周期振荡或稳定的汇等不同的运行轨道.

**关键词:** 忆阻器, 混沌电路, 初始状态, 等效电路

**PACS:** 05.45.-a

## 1. 引言

在电路基本理论中, 电路和元件特性是由四个基本变量(电流、电压、电荷和磁通)来描述的, 其中描述电压与电流关系、电压与电荷关系、电流与磁通关系的元件即为电阻器、电容器和电感器, 它们是目前实现电路的基本组成元件. 根据变量组合完备性原理, 加州大学伯克利分校的华裔科学家蔡少棠<sup>[1]</sup>于1971年从理论上预测描述电荷和磁通关系元件——忆阻器的存在性, 并在文献[2]中阐述了元件特性、合成原理和应用. 由于在现实中没有发现这类器件, 关于忆阻器及应用的研究并没有引起科学界和工程界的重视. 惠普公司实验室的 Strukov等<sup>[3]</sup>于2008年5月首次报道了忆阻器的实现性, 其研究引起人们的极大兴趣<sup>[4]</sup>. 忆阻元件的存在, 使电路设计的基础元件由电阻、电容和电感增加到了四个, 忆阻器为电路设计及其忆阻电路应用提供了全新的发展空间<sup>[5-11]</sup>.

Itoh 和蔡少棠<sup>[9]</sup>采用一个特性曲线为单调上

升且分段线性的忆阻器替换蔡氏混沌电路中的蔡氏二极管, 导出了基于忆阻器的类正弦振荡或混沌振荡电路. 类似地, Muthuswamy<sup>[10]</sup>采用一个不连续分段线性忆导函数的含源忆阻器替换蔡氏混沌电路或类蔡氏混沌电路<sup>[12,13]</sup>中的蔡氏二极管, 导出了一些新的忆阻混沌电路. 这些混沌电路在一定的电路参数条件下可生成不同形状的混沌吸引子. 文献[9,10]中所采用的忆阻器特性曲线均是非光滑的分段线性函数, 导致它的忆阻或忆导均是不连续的非线性函数, 在物理上实现这类器件是不现实的. 此外, 文献[9,10]几乎没有对其所提出的忆阻混沌电路进行动力学特性分析. 其实, 由于忆阻器在电路中的介入, 使得新构建的电路存在一个分布于某一坐标轴上的平衡点集<sup>[11-13]</sup>, 有着与一般混沌电路或系统完全不同的非线性物理现象<sup>[14-16]</sup>.

在实际电路中, 元件特性曲线一般是光滑连续的, 不存在非连续点. 已有文献研究成果表明, 物理意义下忆阻器的特性曲线将具有多样性<sup>[3,17,18]</sup>. 因此, 随着半导体纳米技术的高速发展, 完全有可能

\* 国家自然科学基金(批准号:60971090)、江苏省自然科学基金(批准号:BK2009105)和航空科学基金(批准号:2009ZC52038)资助的课题.

† E-mail: mervinbao@126.com

根据实际应用需要制作出具有特定特性曲线的忆阻器. 本文将提出一个具有光滑连续的三次单调上升的非线性函数  $f(\varphi, q) = 0$  的归一化磁控忆阻器, 基于该忆阻器设计出一个忆阻混沌电路, 并利用常规的元器件给出有源磁控忆阻器的等效电路实现, 由此验证忆阻器所对应的初始状态与忆阻混沌电路动力学特性之间的关系.

## 2. 光滑忆阻器

忆阻器是一个基本的无源二端元件, 它的磁链  $\varphi$  与累积的电荷  $q$  之间的关系可以用  $\varphi$ - $q$  或  $q$ - $\varphi$  平面上的一条曲线  $f(\varphi, q) = 0$  来确定. 忆阻器分为荷

控忆阻器和磁控忆阻器两种<sup>[1-3]</sup>, 如图 1 所示. 图 1(a) 中的荷控忆阻器可以用  $q$ - $\varphi$  平面上一条通过原点的特性曲线  $\varphi = \varphi(q)$  来表征, 其斜率即磁链随电荷的变化率  $M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}$  称为忆阻, 流过的电流与两端的电压之间的伏安特性可以描述为  $v = M(q)i$ . 图 1(b) 中的磁控忆阻器可以用  $\varphi$ - $q$  平面上一条通过原点的特性曲线  $q = q(\varphi)$  来表征, 其斜率即电荷随磁链的变化率  $W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}$  称为忆导, 流过的电流和两端的电压之间的伏安特性可以描述为  $i = W(\varphi)v$ . 这里  $M(q)$  和  $W(\varphi)$  均是非线性函数, 且取决于忆阻器内部状态变量  $q$  或  $\varphi$ .

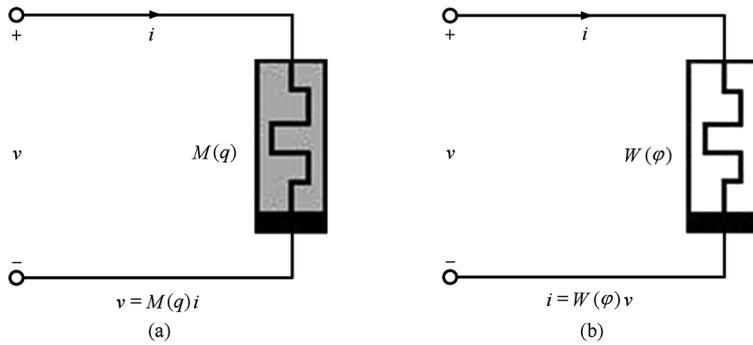


图 1 忆阻器 (a) 荷控忆阻器, (b) 磁控忆阻器

定义一个磁控忆阻元件具有光滑的三次单调上升的非线性特性曲线<sup>[11-13]</sup>, 即

$$q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3, \quad (1)$$

可得到它的忆导  $W(\varphi)$  为

$$\begin{aligned} W(\varphi) &= \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \\ &= a + 3b\varphi^2. \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $a > 0, b > 0$ . (1) 式描述的磁控忆阻器在  $\varphi$ - $q$  平面上的特性曲线如图 2(a) 所示; (2) 式表述的忆导曲线如图 2(b) 所示, 它是随内部状态变量  $\varphi$  变化的正值函数.

上述忆阻器所消耗的即时功率

$$p(t) = W(\varphi(t))v(t)^2 \geq 0. \quad (3)$$

从时刻  $t_0$  至  $t$ , 对所有  $t \geq t_0$ , 流入此忆阻器的能量满足

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0. \quad (4)$$

因此, 具有图 2(a) 所示特性曲线的磁控忆阻器是无源的.

进一步, 当  $a = 1$  和  $b = 1$  时, (1) 式描述的是一个归一化磁控忆阻器.

在如图 1(a) 所示的归一化磁控忆阻器的两端施加一个单位幅度的正弦电压  $\sin(2\pi ft)$  激励, 设忆阻器端电压为  $v$ , 流过的电流为  $i$ , 于是有

$$\begin{aligned} v &= \sin(2\pi ft), \\ i &= W(\varphi)v \\ &= (1 + 3\varphi^2)v, \\ d\varphi/dt &= v. \end{aligned}$$

利用 ODE45 算法, 可得到归一化磁控忆阻器在  $v$ - $i$  平面上的伏安特性曲线如图 2(c) 所示, 激励频率  $f = 0.5$  Hz 时对应的电压和电流的时域波形如图 2(d) 所示.

图 2(c) 给出了两个不同的频率激励时归一化磁控忆阻器的伏安特性曲线, 表明忆阻器的性能受激励频率的影响很大. 另外, 磁控忆阻器的伏安特性具有一个斜“8”字形的类紧磁滞回线的形状, 除原点外, 电压和电流互为彼此的双值函数, 该特性与惠普忆阻器和蔡氏忆阻器所描述的一致.

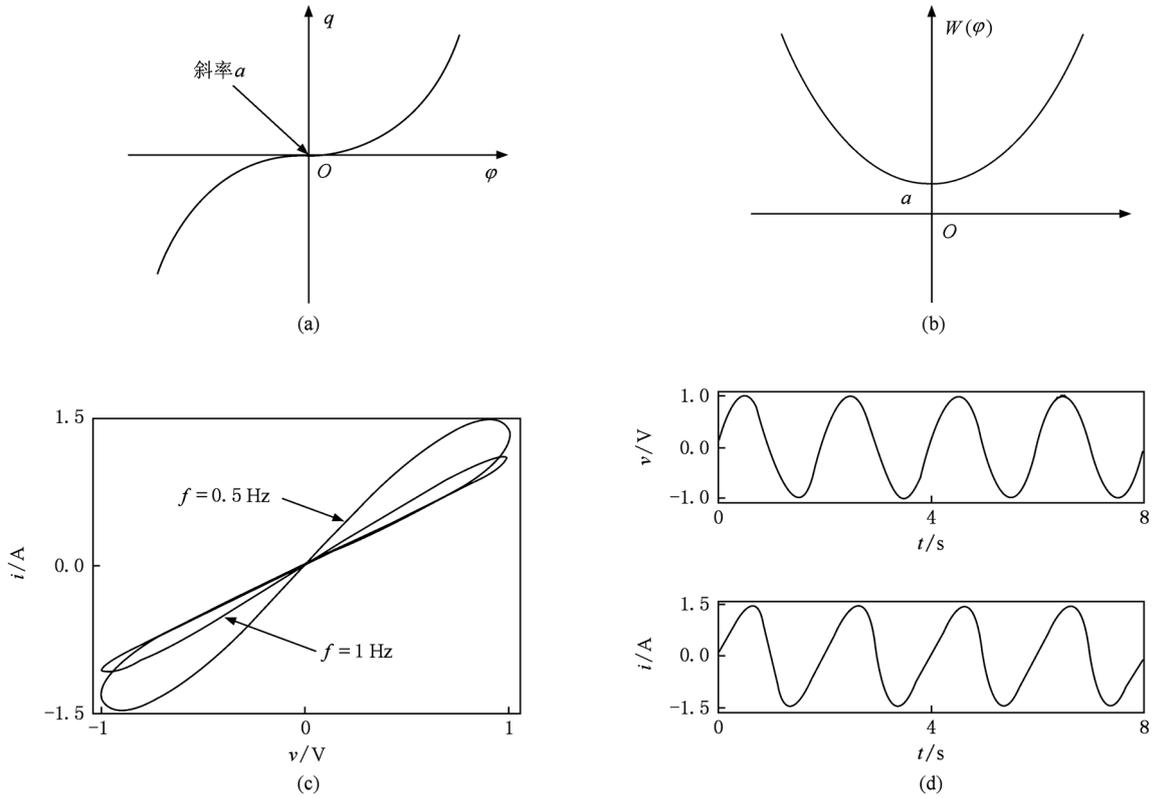


图2 光滑磁控忆阻器的特性 (a)  $\varphi$ - $q$  关系曲线, (b) 忆导曲线, (c) 伏安特性, (d) 时域波形

### 3. 忆阻混沌电路

一个包含有源忆阻器的混沌电路如图3所示. 该电路是通过采用无源二端口光滑磁控忆阻和一个负电导构成的有源忆阻器<sup>[9-13]</sup>代替蔡氏混沌电路中的蔡氏二极管来实现的. 图3电路由四个动态元件组成, 分别是两个电容、一个电感和一个忆阻, 它们所对应的四个状态变量分别是  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $i_3$  和  $\varphi$ , 这里  $\varphi$  是忆阻内部状态变量.

图3中AA'端的右边电路构成了一个有源忆阻器, 从端口A流进的电流  $i_m$  与AA'端的电压  $v$  之间的伏安关系为

$$\begin{aligned} i_m &= (W(\varphi) - G)v \\ &= (a - G + 3b\varphi^2)v. \end{aligned} \quad (5)$$

由基尔霍夫定律和元件的伏安特性可得, 图3所示电路的状态方程为四个联立的一阶微分方程组<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1} [v_2 - v_1 + GRv_1 - RW(\varphi)v_1], \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{RC_2} [v_1 - v_2 + Ri_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L}v_2 - \frac{r}{L}i_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= v_1. \end{aligned} \quad (6)$$

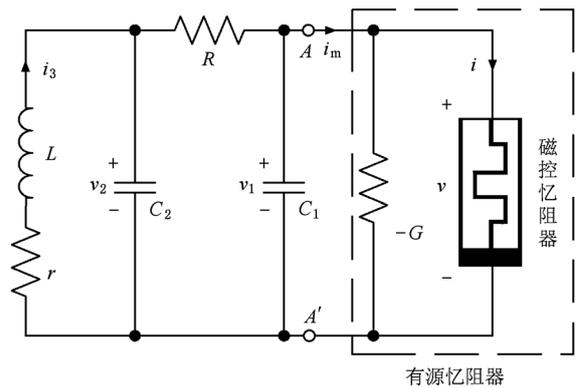


图3 磁控忆阻振荡器电路

设

$$\begin{aligned} x &= v_1, \\ y &= v_2, \\ z &= i_3, \\ w &= \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1/C_1, \\ \beta &= 1/L, \\ \gamma &= r/L, \\ \xi &= G, \\ C_2 &= 1, \\ R &= 1, \end{aligned}$$

并定义非线性函数  $W(w)$  为

$$\begin{aligned} W(w) &= \frac{dq(w)}{dw} \\ &= a + 3bw^2, \end{aligned} \quad (7)$$

(6) 式的状态方程可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x + \xi x - W(w)x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \\ \dot{w} &= x. \end{aligned} \quad (8)$$

因此,磁控忆阻混沌电路是一个四维系统,它的动力学特性由(8)式描述,基于该式的代数方程可以进行相应的理论分析和数值仿真.

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 可得(8)式的平衡点为集合

$$E = \{(x, y, z, w) \mid x = y = z = 0, w = c\},$$

即  $w$  坐标上的点集均是平衡点,这里  $c$  是一个实常数. 选择电路参数使得  $\alpha = 10, \beta = 14, \gamma = 0.1, \xi = 2.2, a = 1$  和  $b = 1$ , (8)式在平衡点处的 Jacobi 矩阵  $J_E$  为

$$J_E = \begin{bmatrix} 12 - 10W(c) & 10 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -0.1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中  $W(c) = 1 + 3c^2$ . 平衡点集  $E$  的特征根方程为

$$\lambda[\lambda^3 + (30c^2 - 0.9)\lambda^2 + (33c^2 + 1.9)\lambda + 423c^2 - 2.92] = 0. \quad (10)$$

(10)式方括号中的三次多项式方程的系数均为非零实常数. 根据 Routh-Hurwitz 稳定条件,该三次多项式方程的根的实部为负的充分必要条件是

$$\begin{aligned} 0.2627 < |c| < 0.2992, \\ |c| > 0.5569. \end{aligned} \quad (11)$$

当三次多项式方程中的常数  $c$  满足条件

$$\begin{aligned} |c| < 0.2627, \\ 0.2992 < |c| < 0.5569, \end{aligned} \quad (12)$$

平衡点集  $E$  是不稳定的.

需要说明的是,忆阻混沌电路的稳定性不能简单地由平衡点集  $E$  的三个非零特征根  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  的稳定性来确定,在一定的电路参数下零特征根 ( $\lambda_4 = 0$ ) 对忆阻混沌电路的稳定性也有很大的影响.

对于初始条件  $(0, 10^{-10}, 0, 0)$ , 光滑忆阻混沌电路生成的吸引子在相平面上的投影及其时域波形如图 4 所示. 图 4(a)和(b)分别给出了混沌吸引子在  $x-y$  和  $x-w$  平面上的投影,图 4(a)是一个单涡卷混沌吸引子,而图 4(b)是一个双涡卷混沌吸引子;图 4(c)是电路中忆阻器的端电压与流过的电流在  $v-i$  平面上的相轨,它反映了忆阻器的非线性动力学特性. 变量  $x$  和  $w$  的时域波形如图 4(d)所示,它们是非周期性的,貌似随机的. 光滑忆阻混沌电路的 Lyapunov 指数  $L_1 = 0.2567, L_2 = 0, L_3 = 0, L_4 = -4.6638$ , Lyapunov 维数  $d_L = 2.055$ . 因此,从相轨图、时域波形以及 Lyapunov 指数和维数可知该电路是混沌振荡的.

一般的混沌系统都对初始条件具有敏感依赖性,在不同的初始条件下系统轨线随时间的演化是不可预测的,但它的运动轨迹始终局限于一个确定的混沌吸引域内,无论混沌系统内部状态多么不稳定,它的轨迹都不会离开混沌吸引域,即混沌是有界的<sup>[14-16]</sup>. 但对于忆阻混沌电路,由于其平衡点为分布于某一坐标轴上的点集,不同位置的平衡点具有不同的稳定性,因此在不同的初始状态下其运行轨道会在混沌行为、周期行为或稳定的汇之间发生状态转移,这是由于忆阻器对内部状态具有独特的记忆性所决定的.

图 5 示出了在忆阻器具有不同初始状态时光滑忆阻混沌电路的运行轨道在  $x-y$  平面上的投影. 图 5(a)和(b)显示了  $w(0)$  位于正负值区间内两个典型的混沌吸引子,它们的拓扑结构具有复合结构,并且关于坐标原点形成中心对称. 图 5(c)显示了一个周期极限环,图 5(d)则显示了光滑忆阻混沌电路的运行轨道为一个位于原点的有界点(图中用叉号标注的点). 由此说明了光滑忆阻混沌电路在不同初始状态时存在着完全不同的运行轨道. 另外,大量的数值仿真结果表明,(10)式中的零特征根对忆阻混沌电路的稳定性能有着一定的影响. 关于忆阻混沌电路的详细动力学分析可参见文献[13].

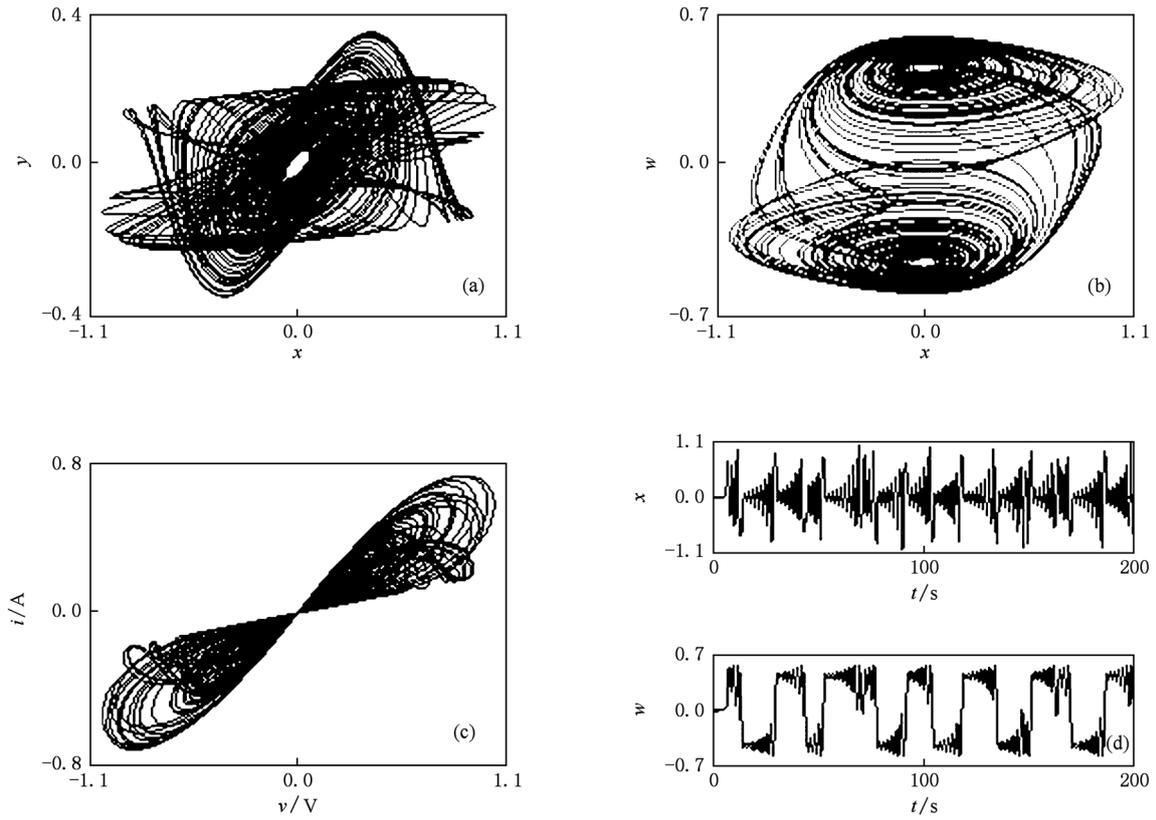


图4 混沌吸引子的投影和时域波形 (a) $x$ - $y$ 平面相轨, (b) $x$ - $w$ 平面相轨, (c) $v$ - $i$ 平面相轨, (d)时域波形

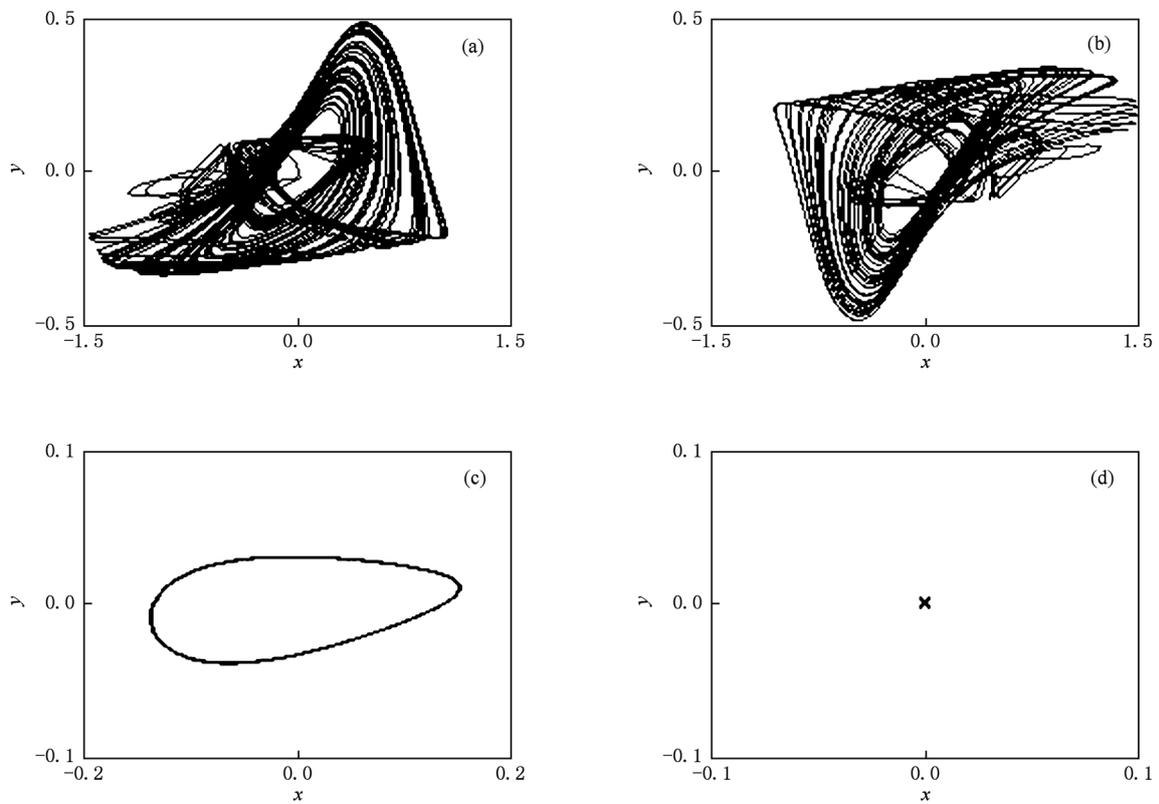


图5 不同初始状态时在 $x$ - $y$ 平面上的相轨图 (a) $w(0) = 0.4$ , (b) $w(0) = -0.4$ , (c) $w(0) = 0.2$ , (d) $w(0) = 0.28$

### 4. 有源忆阻器的等效电路实现

借助于具有三次非线性特性曲线的蔡氏二极管等效电路实现方法<sup>[19]</sup>,可以给出图3电路中AA'端右边的有源忆阻器的等效电路实现<sup>[20]</sup>,如图6所示. 图中运算放大器  $U_1$  的反向输入端与输出端相连组成了电压跟随器电路,起到了有源忆阻器与图3左边电路的隔离作用; $U_2$  与  $R_1C$  构成了一个积分电路,其输出经过后面两级模拟乘法器实现了有源忆阻器的非线性运算; $U_3$  与  $R_3, R_4$  一起组成的电路使得  $R_2$  的阻值变成了负阻值.

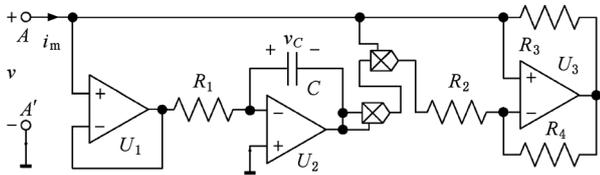


图6 有源忆阻器的等效电路实现

选择  $R_3 = R_4$ , 对于 AA' 端, 其流入的电流  $i_m$  与电压  $v$  之间有如下关系:

$$i_m = \frac{-v}{R_2} + \left( \frac{1}{R_1 C} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \right)^2 \frac{v}{R_2}, \quad (13)$$

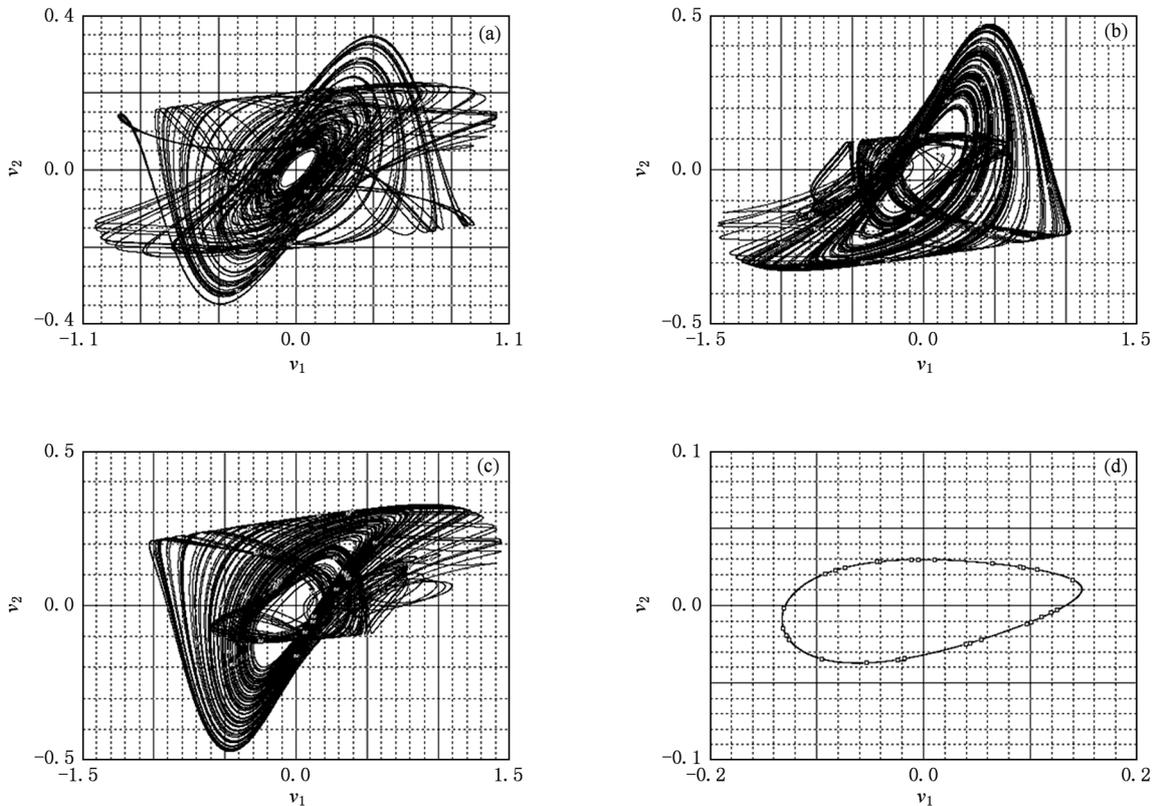


图7 忆阻振荡器的等效电路实现输出 (a)  $v_c(0) = 0$ , (b)  $v_c(0) = -0.6324$ , (c)  $v_c(0) = 0.6324$ , (d)  $v_c(0) = -0.3162$

式中

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau,$$

且有

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_{-\infty}^0 v(\tau) d\tau \\ &= -v_c(0)R_1C. \end{aligned} \quad (14)$$

这里  $v_c(0)$  为  $U_2$  积分电路中电容  $C$  两端的初始电压. 比较(5)式与(13)式,并考虑到  $\xi = G$ , 则有

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{\xi - a}, \\ R_1C &= \sqrt{\frac{\xi - a}{3b}}. \end{aligned} \quad (15)$$

当  $\xi = 2.2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ , 且选择  $C = 1$  时, 可得到  $R_1 = 0.6325$ ,  $R_2 = 0.833$ .

设定三个运算放大器为理想运算放大器, 并设定  $C_1, C_2$  和  $L$  的初始状态为  $(0, -10^{-10}, 0)$ , 在上述典型电路参数条件下, 利用 PSpice 电路仿真软件对图3所示电路的瞬态特性进行仿真分析.

依次选择数值仿真时忆阻器的初始状态  $w(0)$ , 即  $\varphi(0)$  为  $0, 0.4, -0.4$  和  $0.2$ , 由(14)式可确定图6等效电路中电容  $C$  的初始值分别对应为  $0, -0.6324, 0.6324$  和  $-0.3162$ , PSpice 电路仿真输出的电容  $C_1$  和  $C_2$  的端电压的相轨图如图7所示.

从图 7 可观察到,利用图 6 所示的等效电路替换图 3 中的有源忆阻器,可以获得与数值仿真结果完全一致的电路仿真结果,并且电路仿真结果因等效电路中电容  $C$  的初始值不同而有着完全不同的动力学行为.

## 5. 结 论

本文提出了由  $\varphi$ - $q$  平面上光滑三次单调上升的非线性特性曲线描述的磁控忆阻器,该磁控忆阻器是一个二端无源元件,具有由元件内部状态变量决定的斜“8”字形的类紧磁滞回线的伏安特性. 利用光滑磁控忆阻器和负电导构成的有源忆阻器替换

蔡氏电路中的蔡氏二极管,导出了一个基于忆阻器的混沌电路. 此电路具有一个平衡点集,其稳定性随忆阻器内部状态初始值的不同而不同. 因此从理论分析结果可知,本文提出的忆阻混沌电路不同于一般的混沌系统,其动力学行为除了与电路参数有关外,还极端依赖于电路的初始状态. 数值仿真结果表明,在不同的初始状态下,光滑忆阻混沌电路存在混沌振荡、周期振荡或稳定的汇等不同的运行轨道. 此外,利用常规的运算放大器和模拟乘法器等元器件构成的电路等效实现了所提出的有源忆阻器,电路仿真结果与数值仿真结果完全一致,并验证了光滑忆阻混沌电路依赖于忆阻器初始状态的独特的动力学特性.

- 
- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** 507
- [2] Chua L O, Kang S M 1976 *Proc. IEEE* **64** 209
- [3] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [4] Tour J M, He T 2008 *Nature* **453** 42
- [5] Wey T A, Benderli S 2009 *Electron. Lett.* **45** 1103
- [6] Witralsal K 2009 *Electron. Lett.* **45** 713
- [7] Birolek Z, Birolek D, Biroleková V 2009 *Radioengineering* **18** 210
- [8] Joglekar Y N, Wolf S J 2009 *Eur. J. Phys.* **30** 661
- [9] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3183
- [10] Muthuswamy B 2009 *IETE Techn. Rev.* **26** 415
- [11] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Electron. Lett.* **46** 228
- [12] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030510
- [13] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3785 (in Chinese) [包伯成、刘中、许建平 2010 物理学报 **59** 3785]
- [14] Barboza R, Chua L O 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 943
- [15] Bao B C, Li C B, Xu J P, Liu Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4022
- [16] Li C B, Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese) [李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [17] Wang X, Chen Y, Xi H, Dimitrov D 2009 *IEEE Electron Device Lett.* **30** 294
- [18] Pershin Y V, Ventra M D 2008 *Phys. Rev. B* **78** 113309
- [19] Zhong G 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **41** 934
- [20] Muthuswamy B 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 1335

## Analysis and implementation of memristor chaotic circuit<sup>\*</sup>

Bao Bo-Cheng<sup>1)†</sup> Hu Wen<sup>2)</sup> Xu Jian-Ping<sup>3)</sup> Liu Zhong<sup>4)</sup> Zou Ling<sup>1)</sup>

1) (School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

2) (College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

3) (School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

4) (Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 5 October 2010; revised manuscript received 18 April 2011)

### Abstract

Memristor with memory function is the fourth fundamental two-terminal circuit element, besides resistor, capacitor and inductor. In this paper, a smooth flux-controlled memristor is described by a monotone-increasing nonlinearity curve in the  $\varphi$ - $q$  plane, and it has an italic type “8” like voltage current relation curve that looks like a pinched hysteresis loop characteristics. By replacing Chua’s diode with an active memristor consisting of a smooth flux-controlled memristor and a negative conductance, a memristor based chaotic oscillation is derived from Chua’s circuit. Furthermore, the equivalent circuit implementation form for the active memristor is designed by utilizing conventional components such as operational amplifiers and multipliers. The results from theoretical analysis, numerical simulations and circuit simulations are completely identical with each other, and demonstrate that the dynamical behaviors of the memristor chaotic circuit are dependent on the memristor initial state, showing different orbits such as chaotic oscillation, periodic oscillation and stable sink under different initial states.

**Keywords:** memristor, chaotic circuit, initial state, equivalent circuit

**PACS:** 05.45.-a

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60971090), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2009105), and the Aeronautical Science Foundation of China (Grant No. 2009ZC52038).

<sup>†</sup> E-mail: mervinbao@126.com