

# Sprott 系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌 锁定及其反同步\*

李春彪<sup>1)2)†</sup> 徐克生<sup>3)</sup> 胡文<sup>4)</sup>

1)(东南大学信息科学与工程学院,南京 210096)

2)(江苏经贸职业技术学院工程技术学院,南京 210007)

3)(广西师范大学物理科学与技术学院,桂林 541004)

4)(南京航空航天大学电子信息工程学院,南京 210016)

(2010年12月4日收到;2011年5月11日收到修改稿)

Sprott 系统通过单绝对值项的非线性作用实现混沌,引入新的控制参数,可实现对该系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定,锁定以后的混沌信号幅度与相位可以调节. 基于 Lyapunov 势函数法,构建了反同步系统,在响应系统中只引入一个控制项,实现了锁定系统的反同步.

**关键词:** Sprott 系统, Lyapunov 指数谱, 混沌锁定, 反同步

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.45.Xt

## 1. 引言

近年来,随着人们对混沌吸引子动力学行为的不断探索,以及对混沌系统的自适应同步、广义投影同步和反同步等同步技术的深入研究,混沌在工程领域的应用取得了重大进展,并在混沌加密、保密通信、混沌雷达等领域成为研究热点之一<sup>[1-11]</sup>. 文献[12,13]在 Colpitts 系统的基础上,提出一类恒 Lyapunov 指数谱混沌系统,这类系统存在特殊作用的调幅参数与倒相参数. 文献[12,13]提出的恒指数谱混沌系统的混沌鲁棒特性、输出信号的幅值同相可调与反相可调特性在很大程度上满足了工程应用的要求,同时也为混沌系统的设计提供了新的思路,对已有的混沌系统进行恒指数谱混沌锁定并对其进行同步研究,有助于发挥各个特殊的混沌系统的优势,使之满足工程需要.

美国学者 Sprott<sup>[14,15]</sup>于2000年前后提出的混沌系统同样采用绝对值项实现非线性,利用它产生螺旋混沌吸引子. 本文在该系统中引入新的参数,实现了该系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定;通过

引入新的变量,可方便地实现系统输出混沌信号的幅度和相位控制. 另外,通过 Lyapunov 势函数法进一步对锁定以后的混沌系统的反同步问题进行研究,通过在响应系统中引入一个控制因子,便实现了系统的反同步. 本文工作对系统的混沌状态稳定以及反同步研究具有重要的参考价值.

## 2. Sprott 混沌系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定

通过对 Sprott 混沌系统方程的系数关系进行锁定,可以实现系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌保持. 引入新的参数  $a, b, c, d$ , Sprott 混沌系统演变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ay, \\ \dot{y} &= \frac{1}{a}z, \\ \dot{z} &= -ay - bz + f(x), \end{aligned} \quad (1)$$

式中

$$f(x) = c|x| - d.$$

这里  $a, b, c, d$  为实常数. 当取  $a = c = d = 1, b = 0.6$  时,系统输出 Sprott 单层单螺旋混沌吸引子(图1).

\* 江苏省博士后科研计划(批准号:1002004C)、江苏省“青蓝”工程(批准号:200830)、中国博士后科学基金(批准号:2011M500838)、航空科学基金(批准号:2009ZC52038)和江苏经贸职业技术学院科研基金(批准号:JSJM2010002)资助的课题.

† E-mail: goontry@126.com

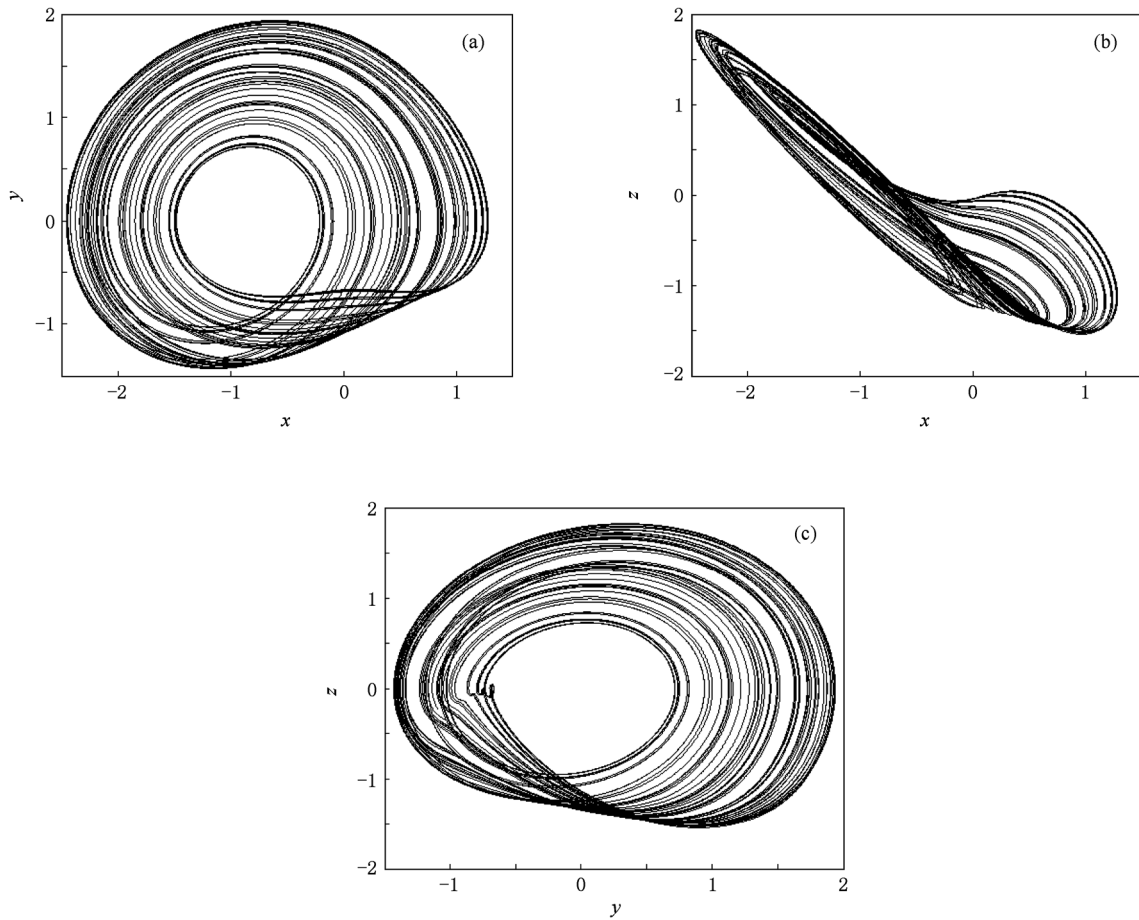


图1 奇怪吸引子在相平面上的投影 (a)x-y平面,(b)x-z平面,(c)y-z平面

### 2.1. 引入新参数以后的基本动力学特性分析

系统(1)存在

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -b,$$

当  $b > 0$  时,系统(1)耗散. 系统(1)的平衡点为  $S_1 = (d/c, 0, 0)$ ,  $S_2 = (-d/c, 0, 0)$ . 系统(1)在平衡点的 Jacobi 矩阵为

$$J_{S_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \\ c \operatorname{sgn}(x) & -a & -b \end{bmatrix}_{S_{1,2}}. \quad (2)$$

对平衡点  $S_1$ , 有特征方程

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda - c = 0. \quad (3)$$

对平衡点  $S_2$ , 有特征方程:

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda + c = 0. \quad (4)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 当  $b > 0, c < 0$  且满足  $b > -c$  时, 平衡点  $S_1$  是稳定的; 当  $b > 0, c > 0$  且满

足  $b > c$  时, 平衡点  $S_2$  是稳定的. 也就是当  $b > 0, c < 0, b \leq -c$  时, 或者当  $b > 0, c > 0, b \leq c$  时, 系统的平衡点  $S_1, S_2$  都不稳定, 可产生混沌. 当  $a = c = d = 1, b = 0.6$  时, 系统的两个平衡点分别为  $(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$ . 平衡点  $(1, 0, 0)$  对应的特征根为  $\lambda_1 = -0.5942 + i 1.1603, \lambda_2 = -0.5942 - i 1.1603, \lambda_3 = 0.5885$ , 为三维空间的鞍点; 平衡点  $(-1, 0, 0)$  对应的特征根为  $\lambda_1 = 0.1178 + i 1.0876, \lambda_2 = 0.1178 - i 1.0876, \lambda_3 = -0.8356$ , 为不稳定鞍焦点.

### 2.2. 恒定的 Lyapunov 指数谱

正如文献[12]指出的那样, 根据系统方程(1)的 Jacobi 矩阵, 得到特征方程(3), (4), 对应的特征值与  $a, d$  无关, 因而  $a, d$  不影响相空间上各点处的动力学特性, 当参数  $a, d$  变化时, 系统(1)将保持相同的 Lyapunov 指数谱. 由此可知, Sprott 混沌系统实现了恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定. 在系统

初始值设定为(0,0,0)时,固定参数  $b = 0.6, c = d = 1$  不变,改变参数  $a$  时的 Lyapunov 指数谱与固定参数  $b = 0.6, a = c = 1$ , 改变参数  $d$  时的 Lyapunov 指数谱如图 2 所示. 由图 2 可以看出:当参数  $a$  从小到大调整时,锁定的混沌系统(1)一直处于混沌状态,系统的 Lyapunov 指数谱保持恒定,分别维持在  $\lambda_1 = 0.035, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.635$  附近;参数  $d$  从小到大调整时,锁定混沌系统(1)同

样处于混沌状态,系统的 Lyapunov 指数谱保持在上述同样恒定的水平. 实际数值仿真结果中的 Lyapunov 指数波动性较大,是由于 Sprott 混沌系统的平衡点有别于恒 Lyapunov 指数谱混沌系统<sup>[12,13]</sup>,后者平衡点的  $x$  和  $y$  皆不为零且对称,能很好地稳定系统相轨的演变趋势,而系统(1)的平衡点  $y$  也为零. 另外,计算精度和计算噪声也会导致 Lyapunov 指数谱的波动.

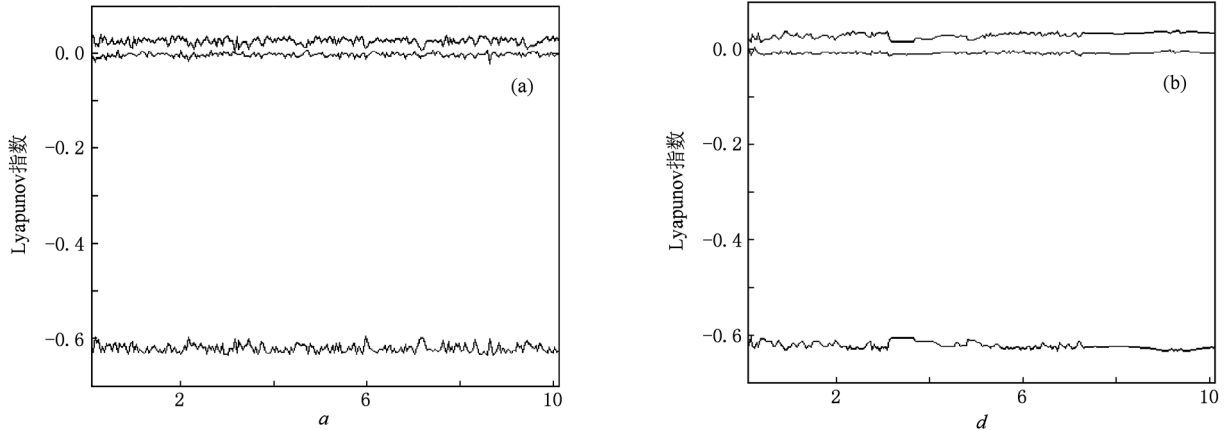


图 2 锁定混沌系统(1)的恒 Lyapunov 指数谱 (a)参数  $a$  变化下的 Lyapunov 指数谱,考察区间为  $a \in [0.1, 10.1]$ ; (b)参数  $d$  变化下的 Lyapunov 指数谱,考察区间为  $d \in [0.1, 10.1]$

### 2.3. 线性与非线性调幅

对于锁定混沌系统(1),如文献[12,13]所指出的那样,同样存在全局线性调幅参数与局部调幅参数,参数  $d$  是全局线性调幅参数,系统参数  $a$  是局部调幅参数.

**定理 1** 系统参数  $d$  是全局线性调幅参数,参数  $a$  是局部调幅参数.

**证明** 令  $x = kx^*, y = ky^*, z = kz^* (k > 0)$ , 系统(1)变成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= ay^*, \\ \dot{y}^* &= \frac{1}{a}z^*, \\ \dot{z}^* &= -ay^* - bz^* + c|x^*| - \frac{d}{k}. \end{aligned} \quad (5)$$

由此可知,混沌系统的三个状态变量的线性调整等价于参数  $d$  的尺度变化,也就是  $d$  是全局线性调幅参数. 另外,设非零实数  $\beta$ , 存在

$$\begin{aligned} a &= \beta a', \\ y &= \frac{1}{\beta} y'. \end{aligned} \quad (6)$$

对于系统(1)的第一维和第三维而言,由于参数  $a$

与状态变量  $y$  成对出现,即有  $ay$  项,所以  $a$  与  $y$  的对应尺度变化(如(6)式)不会改变乘积项  $ay$  的值,故而对系统动力学行为没有影响;而对于系统方程的第二维,由于  $1/a$  与  $y$  分立在方程的两边,方程同样保持相等. 所以,采用(6)式的变换以后,不影响系统(1)的动力学行为,也就是参数  $a$  是局部调幅参数,可实现对状态变量  $y$  实施非线性调幅,甚至能实现倒相控制( $\beta = -1$ ). 定理 1 得证.

锁定混沌系统(1),信号幅值随参数  $d$  的变化情况如图 3 所示,锁定混沌系统(1),信号幅值随参数  $a$  的变化情况如图 4 所示,图中  $S_{\min}$  和  $S_{\max}$  分别为状态变量演变达到的最小值和最大值. 图 3、图 4 中的分岔图和信号幅值演变曲线证明了参数  $d$  对系统状态变量  $x, y, z$  的线性调节作用和参数  $a$  对系统状态变量  $y$  的非线性调节作用(此时系统状态变量  $x, z$  保持幅值不变).

### 2.4. 倒相控制

以上已经证明,将锁定混沌系统(1)作变换,  $(x, y, z, a, b, c, d) \rightarrow (x, -y, z, -a, b, c, d)$ , 系统具有不变性,即系统(1)的状态变量  $y$  将随着

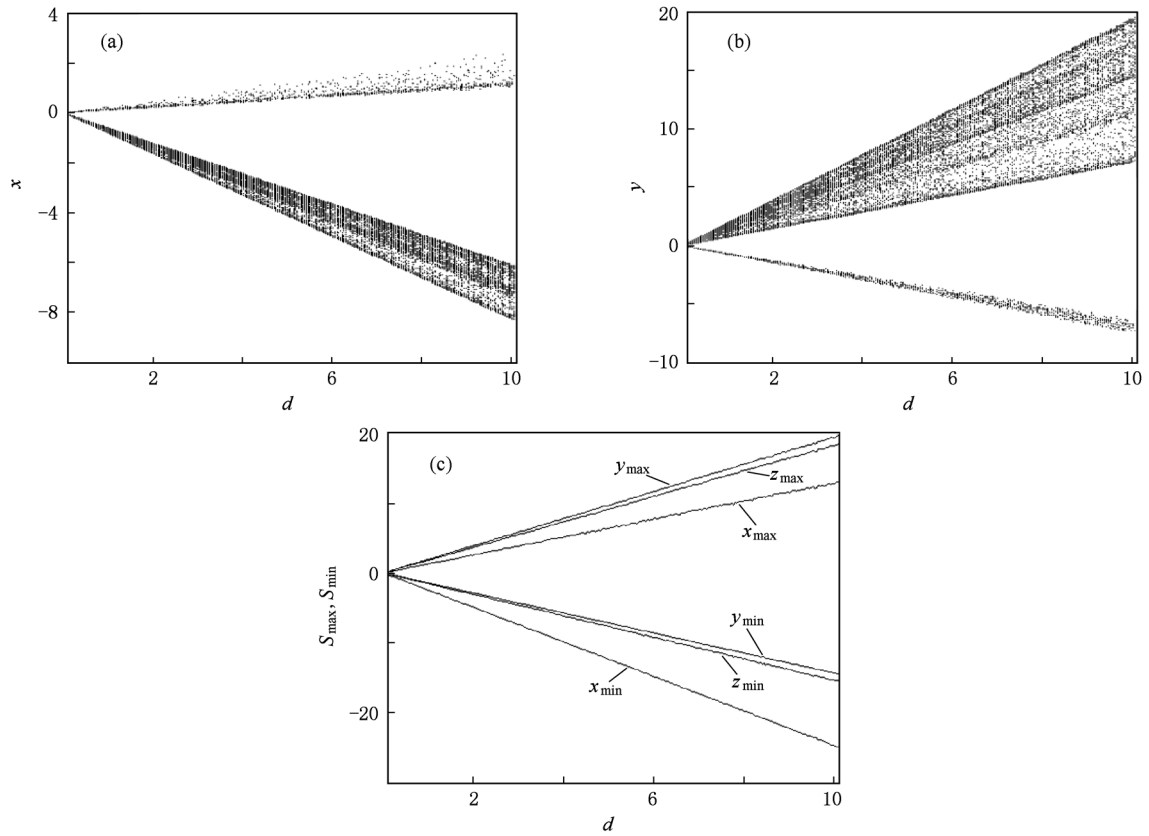


图3 锁定混沌系统(1),信号幅值随参数  $d$  的变化情况 (a)  $x$ - $d$  分岔图(Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (b)  $y$ - $d$  分岔图(Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (c) 参数  $d$  变化下的信号幅值变化曲线

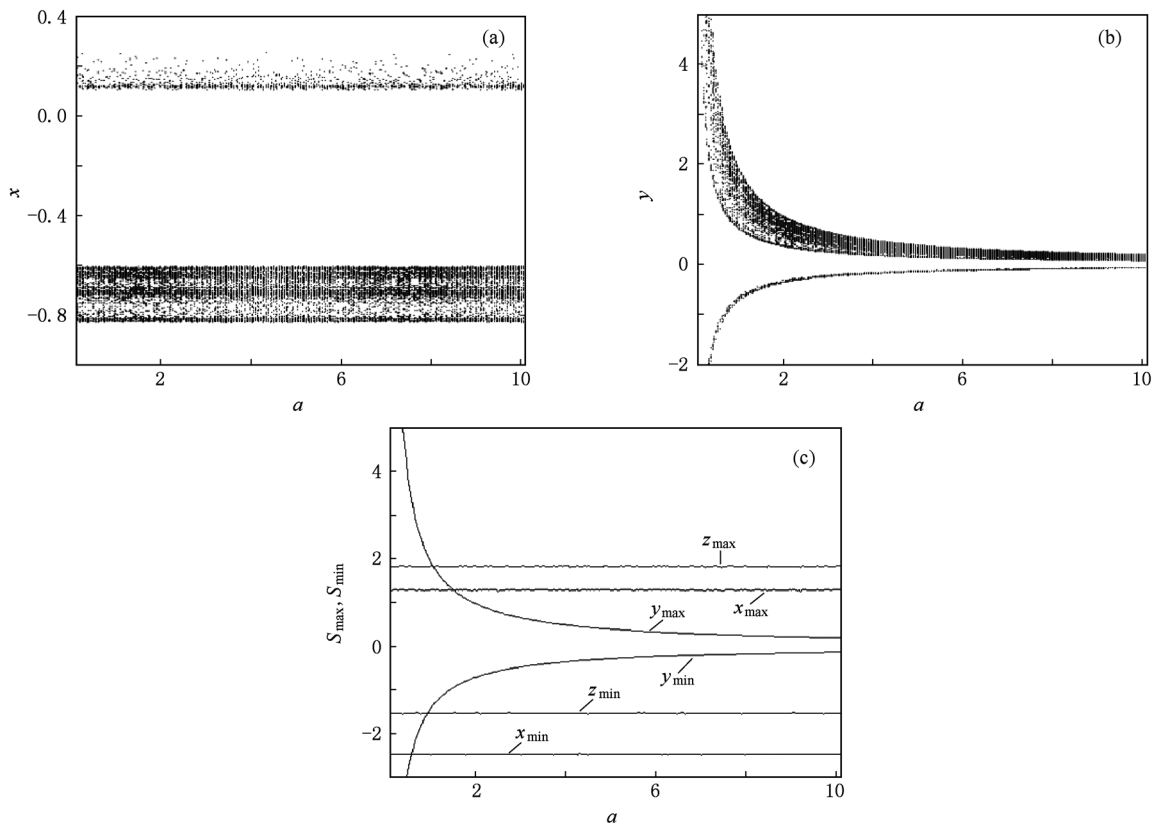


图4 锁定混沌系统(1),信号幅值随参数  $a$  的变化情况 (a)  $x$ - $a$  分岔图(Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (b)  $y$ - $a$  分岔图(Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (c) 参数  $a$  变化下的信号幅值变化曲线

参数  $a$  的极性改变而改变, 参数  $a$  对于状态变量  $y$  具有倒相作用, 如图 5 所示. 从图 5 可以看出, 在改变  $a$  的极性条件下, 图中吸引子正好沿  $y$  方向颠倒

了一下. 由此可知, 参数  $a$  的大小改变可以实现对状态变量  $y$  的局部调幅, 极性改变可以实现  $y$  的倒相控制.

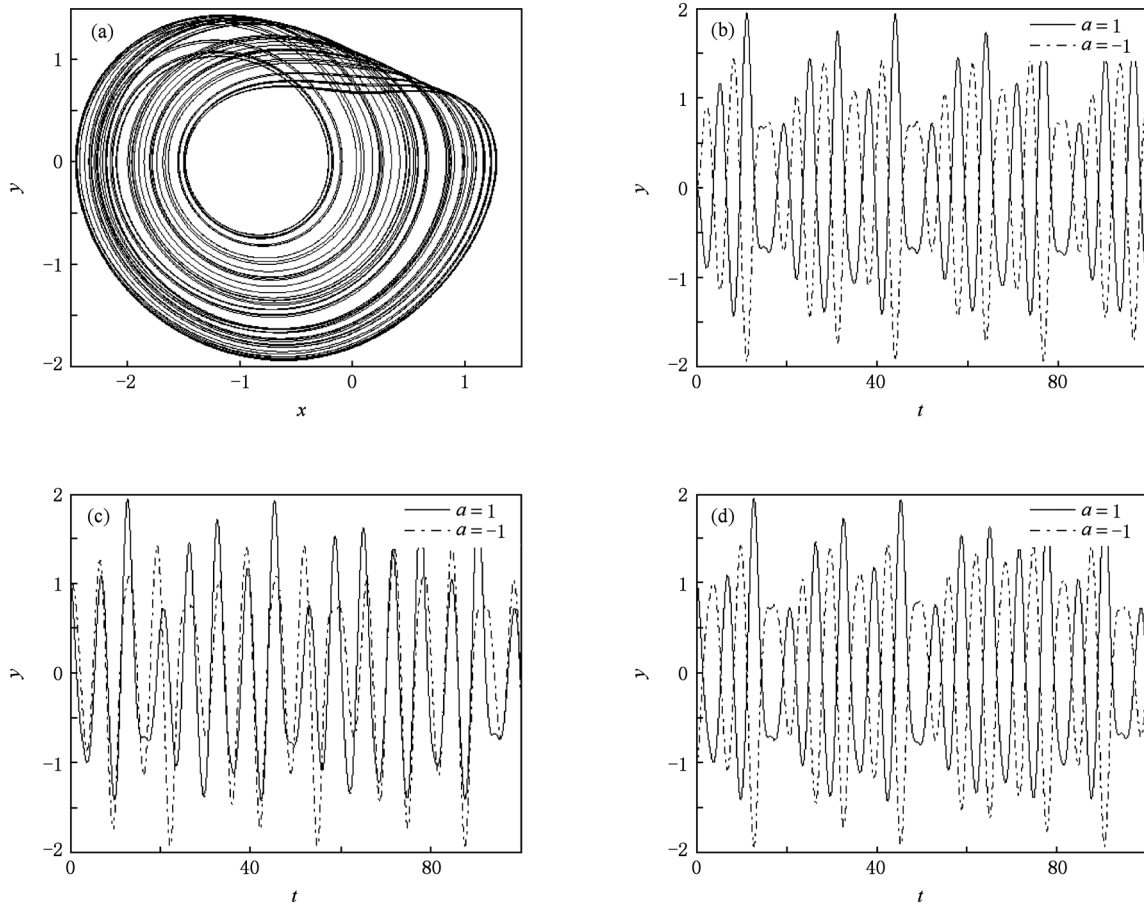


图 5 当  $b = 0.6, c = d = 1$  时, 参数  $a$  对系统状态变量  $y(t)$  的作用 (a) 奇怪吸引子在  $x$ - $y$  相平面上的投影 ( $a = -1$ ), (b) 初始值为  $(0, 0, 0)$ ; (c) 初始值为  $(0, 1, 0)$ ; (d) 初始值为  $(0, 1, 0)$ , 且在  $a$  的极性改变的同时也相应将初始值修正为  $(0, -1, 0)$  的情况

设定系统的初始值, 并使系统振荡始于初始值. 为观测  $a$  的倒相控制作用, 需将系统初始值设定为  $(x_0, 0, z_0)$ , 或者在改变  $a$  的极性的同时, 将系统初始值中  $y_0$  的坐标也设定为原来的相反数  $-y_0$ , 否则倒相作用将由于初始值  $y_0$  坐标的强迫作用而受到干扰, 如图 5(c) 所示. 系统的倒相使得参数  $a$  的演变区间延伸到整个非零区间, 当  $a$  在负区间演变时, 系统 (1) 的 Lyapunov 指数谱同样保持恒定, 如图 6(a) 所示; 在负区间,  $a$  同样可非线性调整信号  $y$  的幅值, 而信号  $x, z$  的幅值保持不变, 如图 6(b)–(d) 所示.

另外, 对于恒指数谱混沌系统, 将非线性函数部分  $f(x)$  变为  $-f(x)$ , 可实现对系统输出三维状态变量的倒相控制, 也就是将混沌系统中的  $(c|x| -$

$d)$  变为  $-(c|x| - d)$ , 可实现三维倒相. 此时对系统方程作如下变换:  $(x, y, z, a, b, c, d) \rightarrow (-x, -y, -z, a, b, -c, -d)$ , 系统具有不变性, 即对系统参数  $c$  与  $d$  作同步极性颠倒时可实现对系统三个状态变量的同步倒相控制 (系统初始值设置为  $(0, 0, 0)$ ), 混沌吸引子如图 7 所示, 倒相的状态变量如图 8 所示.

下面简要讨论混沌系统的 Lyapunov 指数谱锁定的方法. 在本文研究的动力学系统中, 为了锁定而增设的参数  $a$  巧妙地在特征方程中相消, 获得了调控相轨、不调控指数谱的效果; 另一放缩相轨而指数谱不变的参数  $d$  也没有在特征方程中出现. 但是, 值得指出的是, 在特征方程中消失的系统参数并不总是独立在指数谱控制之外. 实践证明, 当常

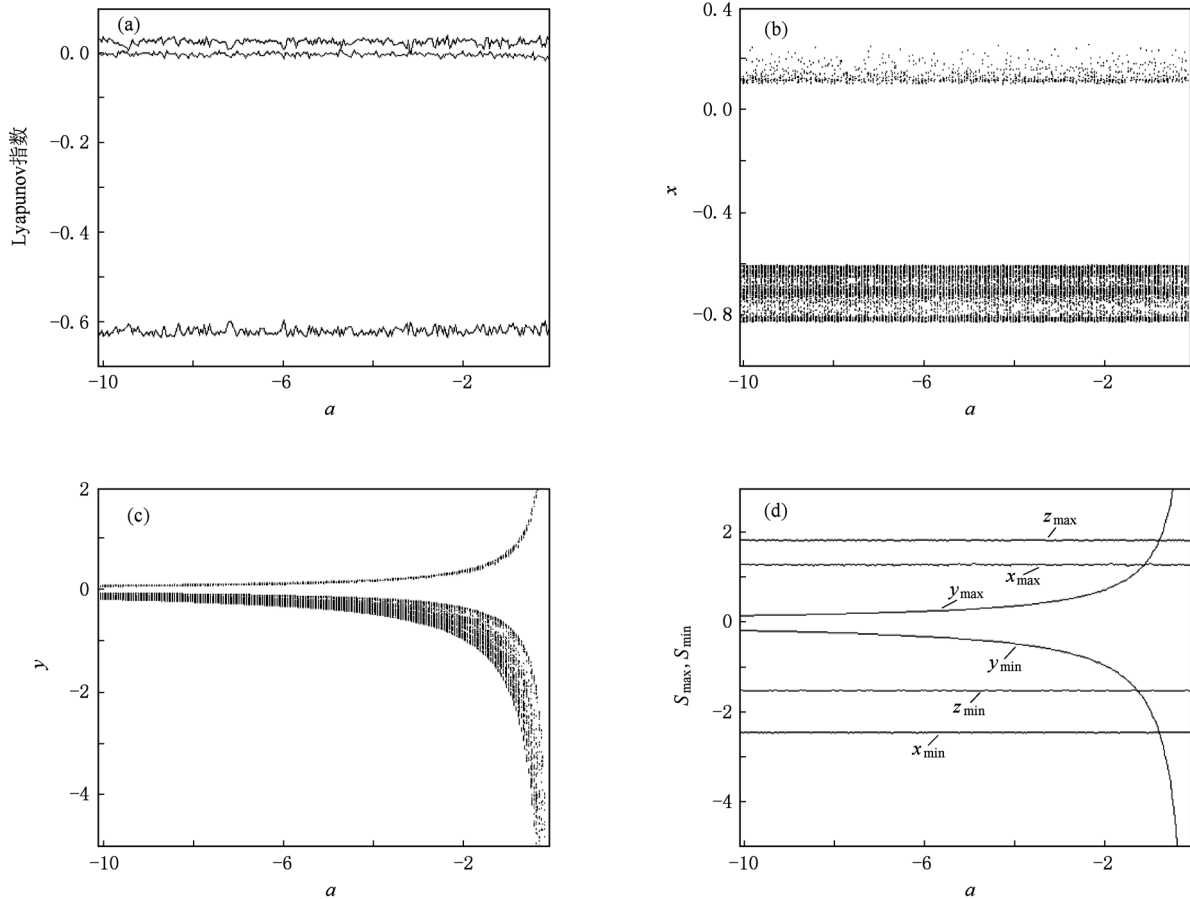


图6 参数  $a$  变化时混沌系统(1)的系统特性 (a) 参数  $a$  变化下的恒 Lyapunov 指数谱特性, (b)  $x$ - $a$  分岔图 (Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (c)  $y$ - $a$  分岔图 (Poincaré 截面为  $z = 0$ ), (d) 负区间上参数  $a$  变化下的信号幅值变化曲线

数项参数作用于类 Lorenz 混沌系统时,它改变了相轨的结构(不仅仅放缩),也改变了系统的 Lyapunov 指数谱. 因此,要取得 Lyapunov 指数谱锁定的效果,可行的做法是使系统相轨或系统某几维状态变量在参数的调控下具有尺度变化的自由度,而相轨结构与复杂度保持不变. 上述恒 Lyapunov 指数谱锁定方法普遍适用于非线性项仅为绝对值项的分段线性混沌系统中. 对于具有二次交叉项或者平方项的混沌系统,依然可以借鉴本文提出的尺度变换(包含部分维度或者全部维度尺度变换,也包含单一或者多尺度变换等)方法,去研究发现系统中存在的(或者设置新的)锁定参数,可使系统相轨变形而其结构、复杂度不变,进而维持恒定的指数谱.

### 3. 一维反馈信号注入实现反同步

混沌同步以及反同步控制的方法很多,如驱动-响应同步、线性与非线性反馈、自适应控制同步等,

这里研究两个锁定混沌系统之间的反同步.

**定理 2** 设驱动系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ay_1, \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{a}z_1, \\ \dot{z}_1 &= f(x_1) - ay_1 - bz_1, \end{aligned} \quad (7)$$

响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= ay_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{a}z_2, \\ \dot{z}_2 &= f(x_2) - ay_2 - bz_2 + u, \end{aligned} \quad (8)$$

当

$$\begin{aligned} u &= -a(a+2)e_1 - a(a+1)^2e_2 \\ &\quad - (a+2-b)e_3 - f(x_1) - f(x_2) \end{aligned}$$

时,两系统可实现反同步.

**证明** 不妨设两个系统的同步误差为

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 + x_1, \\ e_2 &= y_2 + y_1, \end{aligned}$$

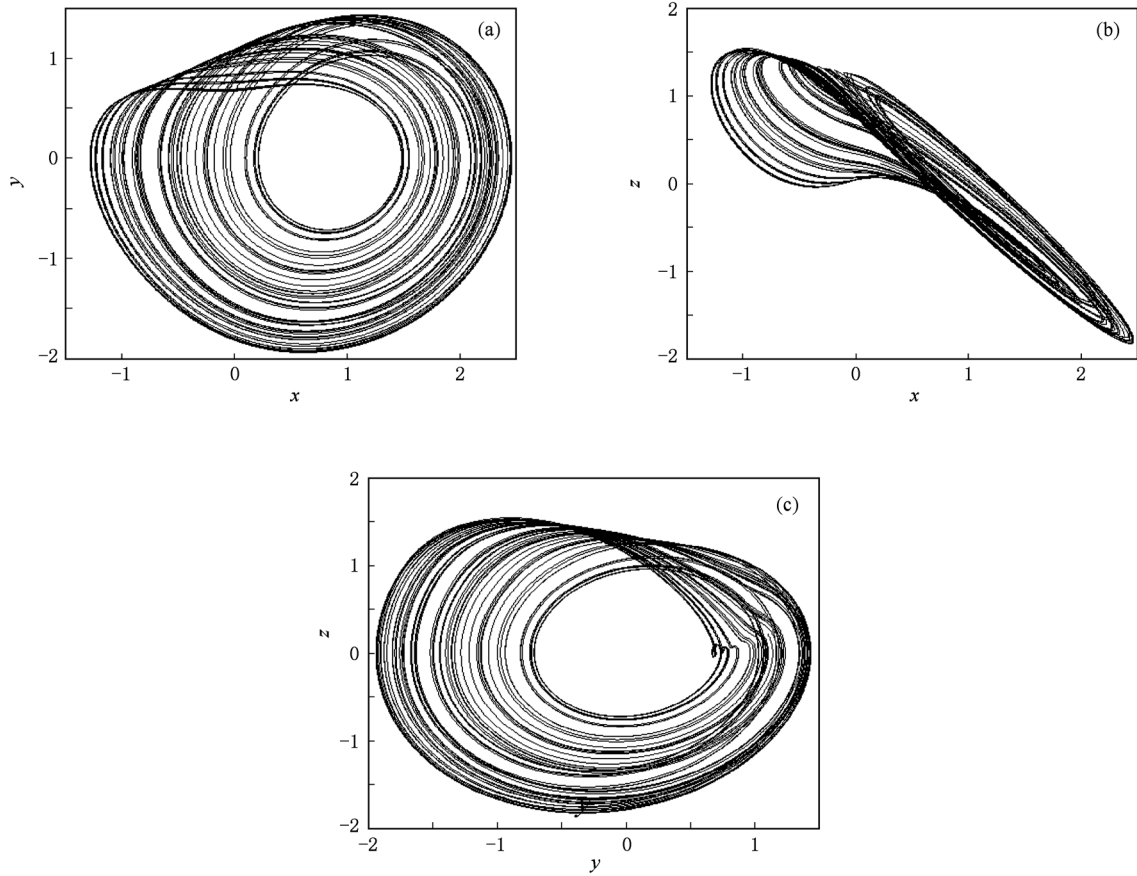


图7 倒相控制后的奇怪吸引子在相平面上的投影 (a)x-y平面,(b)x-z平面,(c)y-z平面

$$e_3 = z_2 + z_1, \quad (9)$$

则同步误差随时间的演化为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= ae_2, \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{a}e_3, \\ \dot{e}_3 &= -ae_2 - be_3 + (f(x_2) + f(x_1)) + u. \end{aligned} \quad (10)$$

构造 Lyapunov 势函数

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2 + \frac{1}{2} \left( (a+1)e_1 \right. \\ &\quad \left. + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式对时间求导后代入(10)式,可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e_1\dot{e}_1 + (e_1 + e_2)(\dot{e}_1 + \dot{e}_2) + \\ &\quad \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \\ &\quad \left[ (a+1)\dot{e}_1 + (a+1)\dot{e}_2 + \frac{1}{a}\dot{e}_3 \right] \\ &= -ae_1^2 + ae_1(e_1 + e_2) + (e_1 + e_2)(\dot{e}_1 + \dot{e}_2) \\ &\quad + \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left[ (a+1)\dot{e}_1 + (a+1)\dot{e}_2 + \frac{1}{a}\dot{e}_3 \right] \\ &= -ae_1^2 - (e_1 + e_2)^2 + (e_1 + e_2) \\ &\quad \times \left[ (e_1 + e_2) + ae_1 + (\dot{e}_1 + \dot{e}_2) \right] \\ &\quad + \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \\ &\quad \times \left[ (a+1)\dot{e}_1 + (a+1)\dot{e}_2 + \frac{1}{a}\dot{e}_3 \right] \\ &= -ae_1^2 - (e_1 + e_2)^2 + (e_1 + e_2) \\ &\quad \times \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \\ &\quad + \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \\ &\quad \times \left[ (a+1)\dot{e}_1 + (a+1)\dot{e}_2 + \frac{1}{a}\dot{e}_3 \right] \\ &= -ae_1^2 - (e_1 + e_2)^2 - \left( (a+1)e_1 \right. \\ &\quad \left. + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right)^2 \\ &\quad + \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \end{aligned}$$

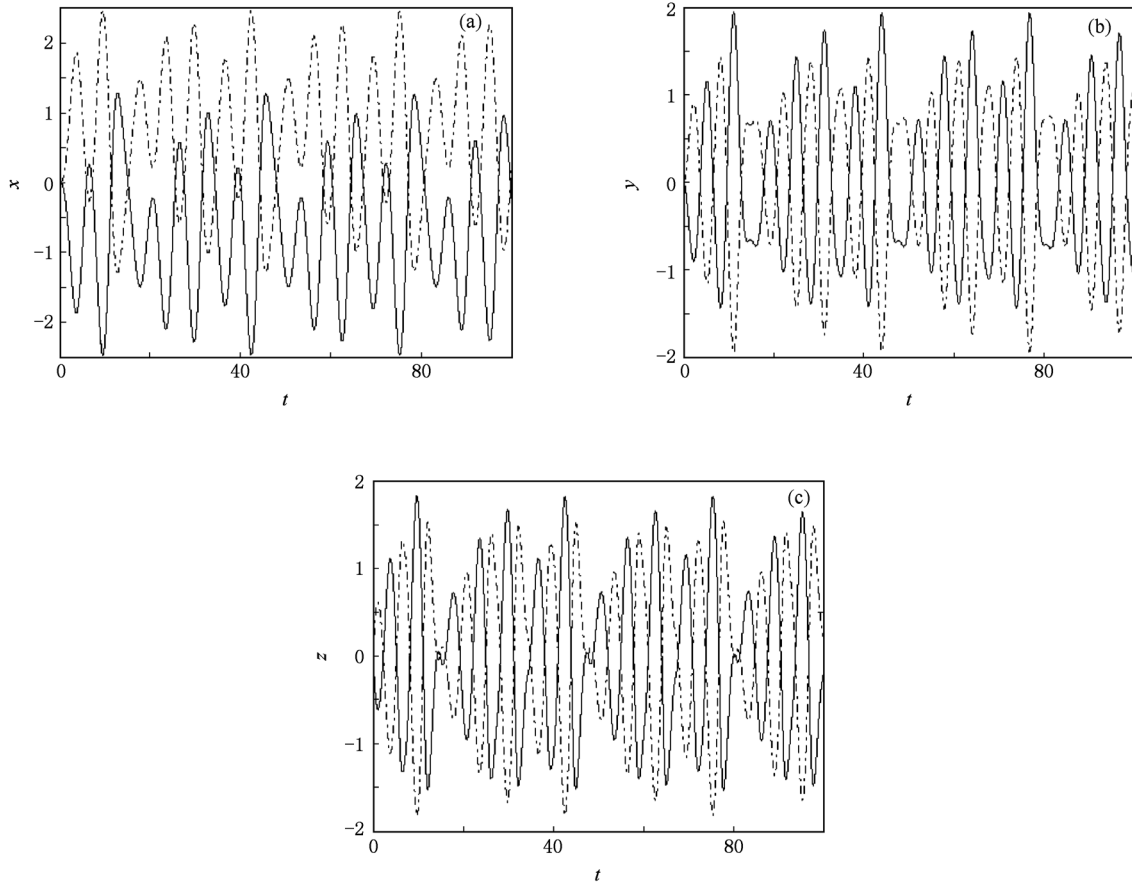


图8 非线性函数用  $-f(x)$  取代  $f(x)$  后实现对状态变量的倒相控制 实线代表  $f(x)$ , 虚线代表  $-f(x)$ . (a) 系统输出信号  $x$ , (b) 系统输出信号  $y$ , (c) 系统输出信号  $z$

$$\times \left[ (a+2)e_1 + (a+1)^2 e_2 + \frac{a+2-b}{a} e_3 + \frac{f(x_1) + f(x_2) + u}{a} \right].$$

当选取

$$u = -a(a+2)e_1 - a(a+1)^2 e_2 - (a+2-b)e_3 - f(x_1) - f(x_2),$$

便有

$$\begin{aligned} & \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \\ & \times \left[ (a+2)e_1 + (a+1)^2 e_2 + \frac{a+2-b}{a} e_3 + \frac{f(x_1) + f(x_2) + u}{a} \right] = 0. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -ae_1^2 - (e_1 + e_2)^2 - \left( (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right)^2 \\ & + \left[ (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + \frac{1}{a}e_3 \right] \end{aligned}$$

$$\times \left[ (a+2)e_1 + (a+1)^2 e_2 + \frac{a+2-b}{a} e_3 + \frac{f(x_1) + f(x_2) + u}{a} \right] \leq 0.$$

故

$$\frac{dV}{dt} \leq 0,$$

从而在两个系统之间建立其反同步. 定理2得证.

为了说明上述理论证明的正确性,采用四阶龙格-库塔法进行数值仿真,驱动系统初始状态设置为  $(0,0,0)$ ,响应系统初始状态设置为  $(2,1,-2)$ ,图9和图10所示分别为反同步信号曲线和反同步误差曲线,数值仿真结果显示,在响应系统的第三维注入反馈控制信号  $u$  的作用下,两个系统之间很快建立了反同步.

值得一提的是,虽然通过 Lyapunov 势函数构造同步系统是常用方法,但是对于不同的动力学系统, Lyapunov 势函数的构造难度却不一样,有时候几乎不能构造得到合适的 Lyapunov 势函数. 本文为了获得反同步的控制因子,从 Lyapunov 势函数构



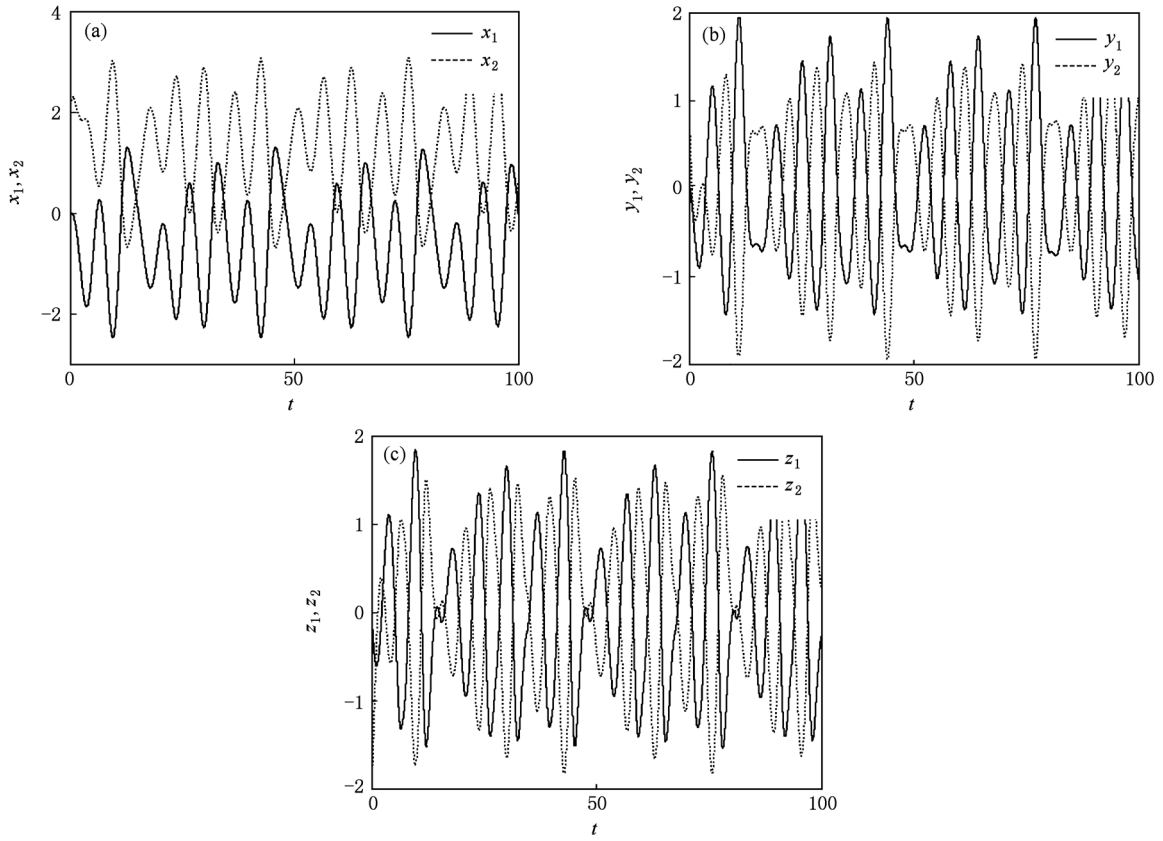


图9 系统(7)和(8)的反同步信号曲线 (a) $x(t)$ , (b) $y(t)$ , (c) $z(t)$

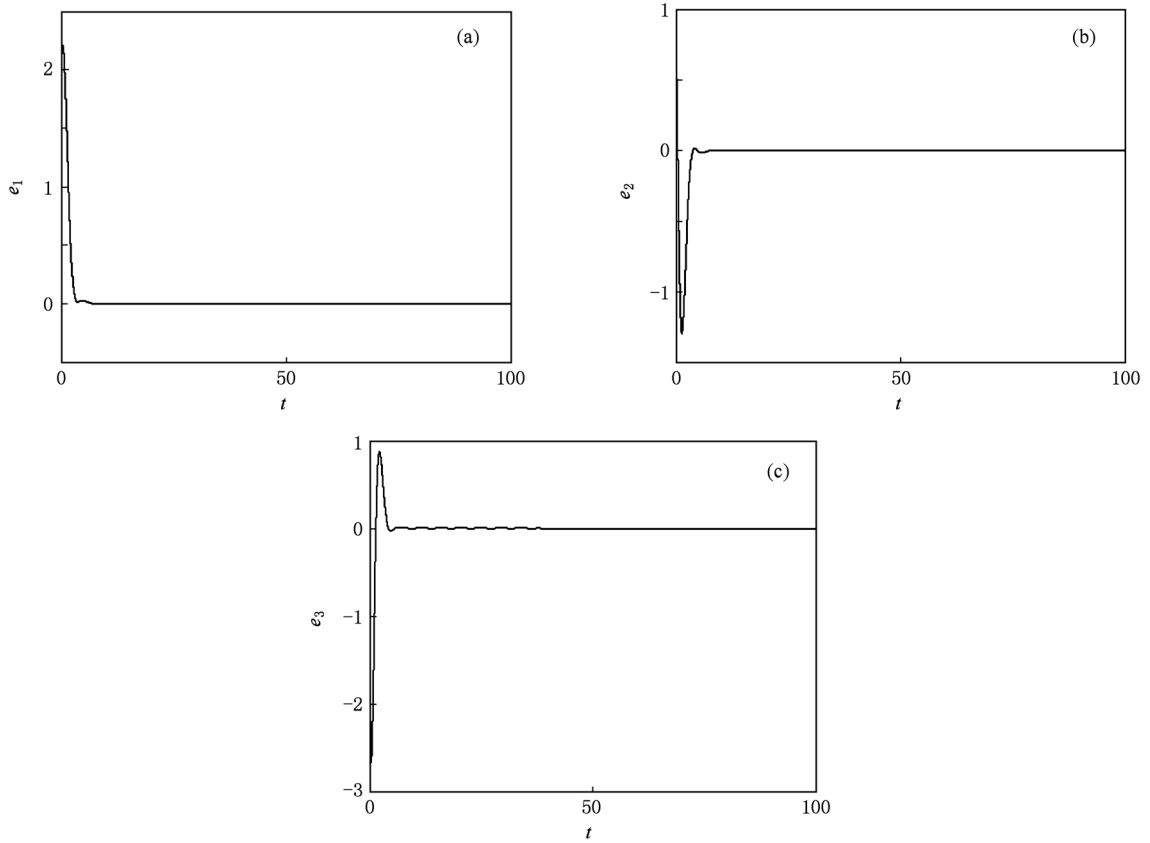


图10 系统(7)和(8)的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ , (b) $e_2(t)$ , (c) $e_3(t)$

造观点出发,先是基于某一维度的误差二次函数,然后逐渐扩充、增设其他维度(或者多维度组合)误差的二次函数项,最终构造出完全的 Lyapunov 势函数,并析出控制因子. 这一方法对于其他动力系统的 Lyapunov 函数构造具有指导意义.

#### 4. 结 论

Sprott 混沌系统以绝对值项作为非线性项,可以通过在系统方程中引入新参数,对此混沌系统实

施恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定,使之相对于部分参数保持鲁棒的混沌状态,从而获得幅度与相位调节的自由度,以满足通信等领域的工程需要. 理论分析并结合 Lyapunov 指数谱、分岔图、系统状态变量演变幅值分析,揭示了该锁定混沌系统的恒指数谱特性、线性调幅与非线性调幅特性,并说明了锁定混沌系统的局部信号倒相控制方法和全部信号倒相控制方法. 通过构造 Lyapunov 势函数,获得了实现该系统反同步的有效控制律. 数值仿真结果验证了反同步效果.

- 
- [1] Hu W, Liu Z, Li C B 2008 *IEEE Trans. Aeros. Electron. Syst.* **44** 367
- [2] Liu Z, Zhu X H, Hu W 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 1735
- [3] Kolumban G, Kennedy M P, Chua L O 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 1129
- [4] Pecora L M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [5] Zhong G Q, Tang K S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1423
- [6] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [7] Lü J, Chen G, Zhang S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1001
- [8] Lü J, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1507
- [9] Li N, Li J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6093 (in Chinese)[李农、李建芬 2008 物理学报 **57** 6093]
- [10] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese)[王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]
- [11] Liu D, Xu W, Guo P R, Ni F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5934 (in Chinese)[刘迪、徐伟、郭培荣、倪菲 2010 物理学报 **59** 5934]
- [12] Li C B, Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese)[李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [13] Li C B, Chen S, Zhu H Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese)[李春彪、陈谥、朱焕强 2009 物理学报 **58** 2255]
- [14] Sprott J C 2000 *Am. J. Phys.* **68** 758
- [15] Sprott J C 2000 *Phys. Lett. A* **266** 19

# Sprott system locked on chaos with constant Lyapunov exponent spectrum and its anti-synchronization\*

Li Chun-Biao<sup>1)2)†</sup> Xu Ke-Sheng<sup>3)</sup> Hu Wen<sup>4)</sup>

1) (*School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China*)

2) (*School of Engineering Technology, Jiangsu Institute of Economic and Trade Technology, Nanjing 210007, China*)

3) (*School of Physical Science and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China*)

4) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

(Received 4 December 2010; revised manuscript received 11 May 2011)

## Abstract

Chaos realization in Sprott system depends on the nonlinear function of single absolute term. Under this condition, the chaos in the system is locked with constant Lyapunov exponent spectrum by introducing new control parameters. So the amplitude and the phase of the signal output in the system can be controlled and modulated. Anti-synchronization system is constructed, and anti-synchronization is obtained by introducing only one control term in the response system based on Lyapunov potential function method.

**Keywords:** Sprott system, Lyapunov exponent spectrum, chaos lock, anti-synchronization

**PACS:** 05. 45. Ac, 05. 45. Pq, 05. 45. Xt

---

\* Project supported by the Scientific Research Program for Postdoctor of Jiangsu Province, China (Grant No. 1002004C), the "Qing Lan" Program of Jiangsu Province, China (Grant No. 200830), the Science Foundation for Postdoctor of China (Grant No. 2011M500838), the Aeronautical Science Foundation of China (Grant No. 2009ZC52038), and the Scientific Research Foundation of Jiangsu Institute of Economic and Trade Technology, China (Grant No. JSJM2010002).

† E-mail: goontry@126.com