

# 基于区间系统理论的分数阶混沌系统同步\*

孙宁†

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

(2011年3月3日收到; 2011年7月1日收到修改稿)

通过设计一个非线性反馈控制器, 实现了分数阶混沌系统的同步. 与其他的分数阶混沌系统同步方法相比, 提出的控制器设计方法保留了部分误差系统中的非线性项, 而没有完全抵消同步误差系统的非线性项, 有效改善了误差系统的控制性能. 同时, 应用区间分数阶线性时不变系统稳定性原理和线性矩阵不等式技术, 得到了一个新的分数阶混沌系统同步的充分条件, 进而获得的控制器保证了混沌系统同步. 仿真结果验证了提出方法的有效性.

**关键词:** 区间分数阶时不变系统, 分数阶混沌系统, 混沌同步

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Gg

## 1. 引言

分数阶微积分理论已有 300 多年的研究历史. 近十几年来, 研究人员在黏滞系统、介质极化、有色噪声、管道边界层效应和电磁波等研究中发现, 许多物理过程也呈现分数阶动力学行为. 用分数阶系统描述更能反映这些真实系统呈现的物理现象. 同时, 随着研究的深入, 在由分数阶微分方程描述的非线性系统中发现了混沌现象, 如分数阶 Chua 电路<sup>[1]</sup>、分数阶 Chen 系统<sup>[2]</sup>、分数阶 Lü 系统<sup>[3]</sup>、分数阶超混沌 Rössler 系统<sup>[4]</sup>等.

1990 年, Pecora 和 Carroll<sup>[5]</sup> 成功地实现了混沌系统的同步. 由于混沌同步在保密通信领域巨大的潜在应用前景, 使其得到了广泛的关注和研究<sup>[6,7]</sup>. 而分数阶混沌系统因其系统模型阶数因素带来的复杂性, 从而比整数阶混沌系统具有更强抗破译能力, 保密性也更高. 因此, 分数阶混沌系统的同步研究具有重要的实际应用价值.

对整数阶混沌系统同步方法的研究有着相当多的成果, 但由于分数阶系统稳定性证明过程与整数阶系统并不一致, 不能直接将这些同步方法完全推广到分数阶系统. 很多研究者对分数阶混沌系统同步方法正在做各种尝试, 可是因为分数阶微积分

理论的复杂性, 分数阶混沌同步取得的成果还不是很多, 仍有很大研究空间. 目前采用的方法主要有主动控制法<sup>[8]</sup>、线性及非线性反馈法<sup>[9-11]</sup>、自适应法<sup>[12]</sup>、滑模控制法<sup>[13]</sup>等. 上述方法大都是在控制器中直接引入了一些项, 以抵消同步误差系统中的非线性项, 把同步误差系统化为线性系统, 然后应用分数阶线性系统的稳定性定理来判别同步误差系统的稳定性, 以实现分数阶混沌系统同步. 这样做导致局部控制量增大, 收敛速度慢. 因此, 如何在分数阶混沌同步误差系统仍保留或部分保留非线性项的情况下设计出有效的控制器, 是一项很有价值的研究工作.

基于以上分析, 本文在一类分数阶系统稳定性研究<sup>[14]</sup>的基础上, 应用区间系统理论并利用线性矩阵不等式技术, 针对分数阶混沌系统的同步问题提出一种新的非线性反馈控制方法, 所设计的控制器部分保留同步误差系统的非线性项信息, 提高了系统同步控制性能. 数值仿真通过比较验证了结果的有效性.

## 2. 分数阶微分定义及预备知识

不同领域的研究人员提出了多种分数阶微分的定义<sup>[15]</sup>. 由于 Caputo 的分数阶微分定义更容易

\* 国家自然科学基金(批准号:60804006, 50977008, 60821063, 61034005)、国家高技术研究发展计划(批准号:2009AA04Z127)和国家重点基础研究发展计划(批准号:2009CB320601)资助的课题.

† E-mail: qunrqn@126.com

给出分数阶微分方程的初值条件,且在工程中应用较广,故这里采用 Caputo 定义.

Caputo 分数阶微分定义用 Riemann-Liouville 分数阶积分算子  ${}_0I_t^q$  来描述. Riemann-Liouville 分数阶积分算子  ${}_0I_t^q$  [15] 表示为

$${}_0I_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-q}} d\tau,$$

其中  $q > 0, f: R \rightarrow R, \Gamma(\cdot)$  为伽玛函数. Caputo 分数阶微分定义 [15] 为

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^q f(t) &= {}_0I_t^{n-q} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-n}} d\tau, \end{aligned}$$

其中  $n-1 \leq q < n \in N, f(t) \in C^n(R, R)$ . 为简便起见,下面使用  $D^q$  来表示 Caputo 分数阶微分  ${}_0^C D_t^q$ .

文献 [14, 16, 17] 研究了分数阶线性系统的稳定性问题并给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

**定理 1** [16] 考虑自治系统

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $1 < q < 2, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{A} \in R^{n \times n}, D^q \mathbf{x} = (D^q x_1, \dots, D^q x_n)^T$ . 系统是渐近稳定的充要条件是对矩阵  $\mathbf{A}$  的任意特征值,  $|\arg(\text{spec}(\mathbf{A}))| > q\pi/2$  成立, 其中  $\text{spec}(\mathbf{A})$  为  $\mathbf{A}$  的谱.

**定理 2** [14] 令  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  是一个实数矩阵, 当  $1 \leq q < 2$  时,  $|\arg(\text{spec}(\mathbf{A}))| > \frac{q\pi}{2}$  成立的充分必要条件是存在矩阵  $\mathbf{P} > 0$  使下式成立:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{A}) & \cos\theta(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{A}) \\ -\cos\theta(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{A}) & \sin\theta(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{A}) \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

其中

$$\theta = \pi - q \frac{\pi}{2}.$$

**定理 3** [18] 对于适当维数的矩阵  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$ , 有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \leq \varepsilon \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}. \quad (3)$$

在下面的分析中,用  $\text{Sym}(\mathbf{X})$  来表示矩阵  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{X}$  转置的和,即

$$\text{Sym}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}^T.$$

用  $*$  来表示矩阵表达式中的对称结构,例如,如果给定矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}^T, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}^T, \end{aligned}$$

有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & * \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

### 3. 基于区间理论的分数阶混沌同步

考虑如下  $q$  阶分数阶混沌系统作为驱动系统:

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + f(\mathbf{x}), \quad (4)$$

其中  $1 < q < 2, \mathbf{x} \in R^n$  为  $n$  维驱动系统的状态矢量,  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}, f: R^n \rightarrow R^n$  分别表示动态系统的线性部分系数矩阵和非线性部分.

加入控制器  $\mathbf{u} \in R^n$  的响应系统为

$$D^q \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + f(\mathbf{y}) + \mathbf{u}, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{y} \in R^n$  为  $n$  维响应系统的状态矢量.

假设所考虑的系统中的非线性项  $f(\mathbf{x})$  和  $f(\mathbf{y})$  满足如下条件:

$$f(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}) \mathbf{x}, \quad (6)$$

$$f(\mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{y}) \mathbf{y}, \quad (7)$$

其中  $\Delta(\mathbf{x})$  和  $\Delta(\mathbf{y})$  分别为关于  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的连续函数矩阵, 且当  $\mathbf{x} = 0$  或  $\mathbf{y} = 0$  时,  $\Delta(0)$  的每个元素都是有界的.

值得注意的是,目前存在的大部分混沌系统都满足 (6), (7) 式, 如分数阶统一系统、分数阶 Rössler 系统等. 同时,这里  $f(\mathbf{x})$  和  $f(\mathbf{y})$  可以用多组不同的  $\Delta(\mathbf{x})$  和  $\Delta(\mathbf{y})$  来表示, 亦即  $\Delta(\mathbf{x})$  和  $\Delta(\mathbf{y})$  不是唯一的.

由 (6) 和 (7) 式, 驱动系统 (4) 和响应系统 (5) 分别写为

$$D^q \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \Delta(\mathbf{x})) \mathbf{x}, \quad (8)$$

$$D^q \mathbf{y} = (\mathbf{A} + \Delta(\mathbf{y})) \mathbf{y} + \mathbf{u}. \quad (9)$$

定义同步误差

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x},$$

那么可得同步误差方程如下:

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{e} &= D^q (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{A} + \Delta(\mathbf{y})) \mathbf{y} - (\mathbf{A} + \Delta(\mathbf{x})) \mathbf{x} + \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{e} + \Delta(\mathbf{y}) \mathbf{e} + (\Delta(\mathbf{y}) - \Delta(\mathbf{x})) \mathbf{x} + \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{e} - [\Delta(\mathbf{y}) - \Delta(\mathbf{x})] \mathbf{x}, \quad (11)$$

误差系统写为

$$D^q \mathbf{e} = (\mathbf{A} + \Delta(\mathbf{y}) + \mathbf{K}) \mathbf{e}. \quad (12)$$

这里  $\mathbf{K}$  为反馈增益, 并记

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta(\mathbf{y}) + \mathbf{K}.$$

目标是为响应系统 (9) 设计一个适当的控制器  $\mathbf{u}$ , 使得误差系统 (12) 渐进稳定, 进而实现驱动系统 (8) 和响应系统 (9) 的同步, 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y - x\| = 0.$$

由于混沌系统的状态有界,且  $\Delta(y)$  为状态的连续函数,因此也是有界的,所以这里可以把  $\Delta(y)$  看成是区间不确定性,写为如下形式:

$$\begin{aligned} \Delta(y) \in Y_t \triangleq [\underline{\Delta}(y), \overline{\Delta}(y)] &= [\underline{Y}, \overline{Y}] \\ &= \{Y \mid \underline{Y} \leq Y \leq \overline{Y}\} \\ &= \{Y \in R^{n \times n} \mid \underline{y}_{ij} \leq y_{ij} \leq \overline{y}_{ij}, \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (13)$$

此时就有

$$\begin{aligned} \tilde{A} \in \tilde{A}_t \triangleq [\tilde{A}, \overline{\tilde{A}}] &= \{\tilde{A} \mid \tilde{A} \leq \tilde{A} \leq \overline{\tilde{A}}\} \\ &= \{\tilde{A} \in R^{n \times n} \mid a_{ij} + k_{ij} + \underline{y}_{ij} \leq a_{ij} + k_{ij} + y_{ij} \\ & \leq a_{ij} + k_{ij} + \overline{y}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + K + \underline{Y}, \\ \overline{\tilde{A}} &= A + K + \overline{Y}. \end{aligned}$$

针对(12)式中的非线性不确定项,引入如下记号:

$$\begin{aligned} A_0 &= A + \frac{1}{2}(\underline{Y} + \overline{Y}) + K, \\ \Delta Y &= \frac{1}{2}(\overline{Y} - \underline{Y}) = \{\gamma_{ij}\}_{n \times n}. \end{aligned}$$

由(13)式可知,所有的  $\Delta Y$  的列向量都是非负的,所以进一步定义

$$\begin{aligned} D_Y &= [\sqrt{\gamma_{11}}e_1^n, \dots, \sqrt{\gamma_{11}}e_1^n, \dots, \\ & \quad \sqrt{\gamma_{n1}}e_n^n, \dots, \sqrt{\gamma_{nn}}e_n^n]_{n \times n^2}, \\ E_Y &= [\sqrt{\gamma_{11}}e_1^n, \dots, \sqrt{\gamma_{11}}e_n^n, \dots, \\ & \quad \sqrt{\gamma_{n1}}e_1^n, \dots, \sqrt{\gamma_{nn}}e_n^n]_{n^2 \times n}^T, \end{aligned}$$

其中  $e_k^n \in R^n$  表示第  $k$  个元素为 1 而其余元素为 0 的列向量.再令

$$H_Y = \{\text{diag}(\delta_{11}, \dots, \delta_{1n}, \dots, \delta_{n1}, \dots, \delta_{nn}) \in R^{n^2 \times n^2}, |\delta_{ij}| \leq 1, i, j = 1, \dots, n\},$$

就可以得出关于  $\tilde{A}_t$  的定理 4.

**定理 4**<sup>[14]</sup> 令

$$\tilde{A}_t = \{\tilde{A} = A_0 + D_Y F_Y E_Y \mid F_Y \in H_Y\},$$

就有

$$\text{Sym} \begin{bmatrix} \sin\theta(D_Y F_Y E_Y P) & \cos\theta(D_Y F_Y E_Y P) \\ -\cos\theta(D_Y F_Y E_Y P) & \sin\theta(D_Y F_Y E_Y P) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_j = \tilde{A}_t.$$

定理 4 的证明参见文献[14].

因为这里讨论的分数阶系统的阶数满足  $1 < q < 2$ , 此时系统的稳定域为凸集,所以可以使用线性矩阵不等式方法.

定理 5 给出误差系统稳定的充分条件,满足定理的分数阶混沌驱动系统(8)与响应系统(9)可实现同步.

**定理 5** 当  $1 < q < 2$  时,由分数阶驱动系统(8)和响应系统(9)得到的误差系统(10)在非线形反馈控制器  $u$  的作用下可渐近镇定的充分条件是矩阵  $X \in R^{n \times n}$ 、对角正定阵  $P \in R^{n \times n}$  和正常数  $\varepsilon$  满足

$$G = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * & * & * \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & * & * \\ P & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ 0 & P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

这里

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Gamma_{22} = \sin\theta \text{Sym} \left( AP + \frac{1}{2}(\underline{Y} + \overline{Y})P \right. \\ & \quad \left. + AX \right) + \varepsilon D_Y D_Y^T, \\ \Gamma_{21} &= -\cos\theta \left[ \left( PA^T + \frac{1}{2}P(\underline{Y} + \overline{Y}) + X^T A^T \right) \right. \\ & \quad \left. - \left( AP + \frac{1}{2}(\underline{Y} + \overline{Y})P + AX^T \right) \right]. \end{aligned}$$

非线性状态反馈控制器为

$$u = Ke - [\Delta(y) - \Delta(x)]x,$$

增益矩阵为

$$K = XP^{-1}.$$

**证明** 假设存在正定对称阵  $P \in R^{n \times n}$  和正常数  $\varepsilon$  使得(15)式成立.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sin\theta(\tilde{A}P + P\tilde{A}^T) & \cos\theta(\tilde{A}P - P\tilde{A}^T) \\ -\cos\theta(\tilde{A}P - P\tilde{A}^T) & \sin\theta(\tilde{A}P + P\tilde{A}^T) \end{bmatrix} \\ &= \text{Sym} \begin{bmatrix} \sin\theta(A_0 P) & \cos\theta(A_0 P) \\ -\cos\theta(A_0 P) & \sin\theta(A_0 P) \end{bmatrix} \\ & \quad + \text{Sym} \begin{bmatrix} \sin\theta(D_Y F_Y E_Y P) & \cos\theta(D_Y F_Y E_Y P) \\ -\cos\theta(D_Y F_Y E_Y P) & \sin\theta(D_Y F_Y E_Y P) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

由定理 3, (16)式等号右端第二个矩阵可得

$$\leq \varepsilon \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{D}_Y) & \cos\theta(\mathbf{D}_Y) \\ -\cos\theta(\mathbf{D}_Y) & \sin\theta(\mathbf{D}_Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{D}_Y) & \cos\theta(\mathbf{D}_Y) \\ -\cos\theta(\mathbf{D}_Y) & \sin\theta(\mathbf{D}_Y) \end{bmatrix}^T + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式,可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sin\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) & \cos\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} - \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) \\ -\cos\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} - \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) & \sin\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) \end{bmatrix} \\ & \leq \text{Sym} \begin{bmatrix} \sin\theta\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{K}\right)\mathbf{P} & \cos\theta\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{K}\right)\mathbf{P} \\ -\cos\theta\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{K}\right)\mathbf{P} & \sin\theta\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{K}\right)\mathbf{P} \end{bmatrix} \\ & + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{D}_Y) & \cos\theta(\mathbf{D}_Y) \\ -\cos\theta(\mathbf{D}_Y) & \sin\theta(\mathbf{D}_Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{D}_Y) & \cos\theta(\mathbf{D}_Y) \\ -\cos\theta(\mathbf{D}_Y) & \sin\theta(\mathbf{D}_Y) \end{bmatrix}^T \\ & = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_Y \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_Y \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (18) \end{aligned}$$

通过 Schur 补引理<sup>[19]</sup>和条件(15)式,可推出(18)式应满足

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) & \cos\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} - \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) \\ -\cos\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} - \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) & \sin\theta(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

当(19)式成立,则由定理2可推出此时  $|\arg(\text{spec}(\tilde{\mathbf{A}}))| > \frac{q\pi}{2}$  也成立. 由分数阶系统稳定性定理(定理1)可知,加入非线性反馈控制器的分数阶混沌误差系统(12)渐近镇定,即驱动系统(8)和响应系统(9)实现同步. 证毕.

#### 4. 数值仿真

为了验证所提出方法的有效性,在下面的仿真例子中对所提出的方法进行验证.

分数阶四维 Chen 系统描述为

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= \alpha(x_2 - x_1) + x_4, \\ D^q x_2 &= \beta x_1 - x_1 x_3 + \gamma x_2, \\ D^q x_3 &= x_1 x_2 - \delta x_3, \\ D^q x_4 &= x_2 x_3 + \lambda x_4, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  和  $\lambda$  为正常数,  $1 < q < 2$ . 参数取  $\alpha = 35, \beta = 7, \gamma = 12, \delta = 3$  和  $\lambda = 0.5$ . 当  $q = 1.03$  时,

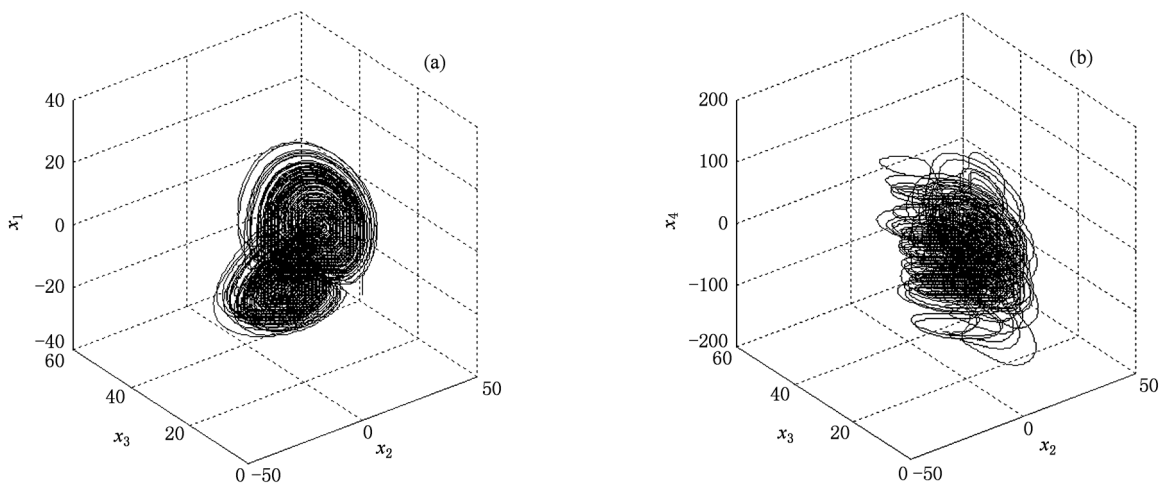


图1 当  $q = 1.03$  时,分数阶四维 Chen 系统(20)的混沌吸引子 (a)混沌吸引子在  $x_1-x_2-x_3$  下的投影,(b)混沌吸引子在  $x_2-x_3-x_4$  下的投影

分数阶四维 Chen 系统的最大 Lyapunov 指数为 0.9335, 存在混沌吸引子, 其相图示于图 1.

构建如下响应系统:

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= \alpha(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ D^q y_2 &= \beta y_1 - y_1 y_3 + \gamma y_2 + u_2, \\ D^q y_3 &= y_1 y_2 - \delta y_3 + u_3, \\ D^q y_4 &= y_2 y_3 + \lambda y_4 + u_4, \end{aligned} \quad (21)$$

在驱动系统和响应系统中, 线性系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 1 \\ 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

相应的连续函数矩阵

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

由  $\Delta(y) \in Y_l = [Y, \bar{Y}]$  选择控制器参数, 同时由图 1 可得出  $y_1 \in [-25, 25], y_2 \in [-25, 25], y_3 \in [0, 45]$ . 因而有

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

系统(20)和(21)的初值分别选为  $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}) = [5, 4, 3, 2], (y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}) = [3, -4, 6, -2]$ . 对驱动系统(20)和响应系统(21)求其误差系统, 使用定理 5, 并用 Matlab 的线性矩阵不等式工具箱求得渐近镇定状态反馈增益  $K$  为

$$K = \begin{bmatrix} 1.4493 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13.3819 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.0026 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14.7878 \end{bmatrix}.$$

将  $K$  代入(11)式求得控制器为

$$u_1 = 1.4493e_1,$$

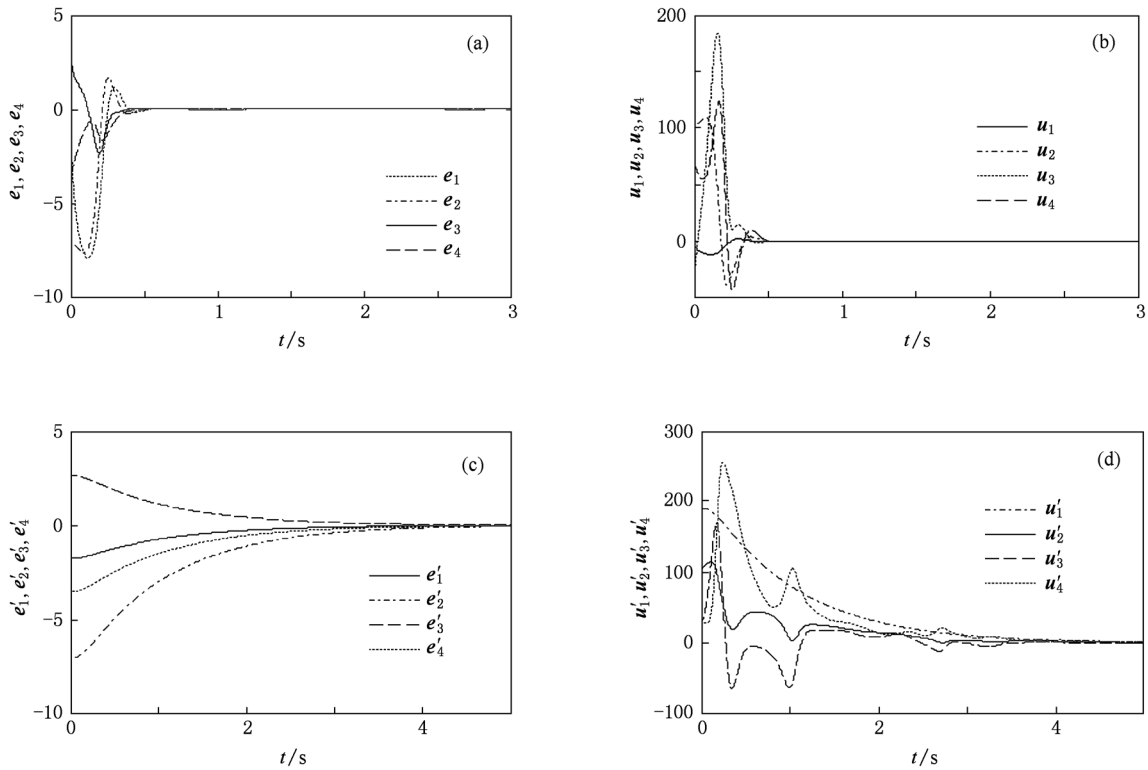


图 2  $q = 1.03$  阶的两个分数阶四维 Chen 系统不同方法同步曲线比较 (a) 采用本文方法得到的误差  $e$  的曲线, (b) 采用本文方法的控制器  $u$  的输入曲线, (c) 采用文献[8]方法得到的误差  $e'$  的曲线, (d) 采用文献[8]方法的控制器  $u'$  的输入曲线

$$u_2 = -13.3819e_2 + (x_3 - y_3)x_1,$$

$$u_3 = -14.0026e_3 - (x_1 - y_1)x_2,$$

$$u_4 = -14.7878e_4 - (x_2 - y_2)x_3.$$

用 Matlab 对加入非线性反馈控制器的两个分数阶混沌 Chen 系统进行同步仿真,得到同步误差  $e$  的曲线和控制器  $u$  输入曲线如图 2(a), (b) 所示. 采用同样的驱动系统和响应系统以及初始值时,使用文献[8]中主动同步方法得到同步误差  $e'$  的曲线和控制器  $u'$  的输入曲线如图 2(c), (d) 所示. 从仿真对比可以看出,与文献[8]中控制方法效果相比,本文方法的控制器输入更小,并且误差  $e$  收敛更快,即系统同步控制性能得到提高.

## 5. 结 论

本文通过设计一个非线性反馈控制器,应用区间分数阶线性时不变系统稳定性原理和线性矩阵不等式技术,实现了分数阶混沌系统的同步. 使用的同步控制方法保留了误差系统中的部分非线性项,没有把同步误差系统化为线性系统,并且得到了一个新的分数阶混沌系统同步的充分条件. 数值仿真采用分数阶四维 Chen 系统的同步,仿真结果验证了本文提出方法的有效性.

- [1] Zhu H, Zhou S, Zhang J 2009 *Chaos Soliton Fract.* **39** 1595
- [2] Li C, Peng G 2004 *Chaos Soliton Fract.* **22** 443
- [3] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [4] Xu C, Feng J W, Austin F, Zhang W Q 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **10** 1517
- [5] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [6] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3742
- [7] Zhang H G, Liu D R, Wang Z L 2009 *Controlling Chaos: Suppression, Synchronization and Chaotification* (New York: Springer Verlag) p38
- [8] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V 2010 *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **15** 3536
- [9] Zhang R X, Yang S P, Liu Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵、杨世平、刘永利 2010 物理学报 **59** 1549]
- [10] Zhou P, Kuang F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6851 (in Chinese) [周平、邝菲 2010 物理学报 **59** 6851]
- [11] Jia L X, Dai H, Hui M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110509
- [12] Zhang R X, Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6039 (in Chinese) [张若洵、杨洋、杨世平 2009 物理学报 **58** 6039]
- [13] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050511 (in Chinese) [孙宁、张化光、王智良 2011 物理学报 **60** 050511]
- [14] Lu J G, Chen G R 2009 *IEEE Trans. Aut. Contr.* **54** 1294
- [15] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) p18
- [16] Matignon D 1996 *Computational Engineering in System Application* (Lille: IEEE) p963
- [17] Moze M, Sabatier J, Oustaloup A 2005 *Proceedings of International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (Long Beach: ASME) p1611
- [18] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K 1990 *IEEE Trans. Autom. Control* **35** 356
- [19] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V 1994 *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (Philadelphia: SIAM) p7

# Synchronization of fractional chaotic systems based on fractional-order interval systems<sup>\*</sup>

Sun Ning<sup>†</sup>

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

(Received 3 March 2011; revised manuscript received 1 July 2011)

## Abstract

Synchronization of fractional-order chaotic systems is investigated by designing a novel nonlinear feedback controller. Compared with the previous reports, the controlled synchronization error system does not need to turn into a linear system and the performance is improved effectively. Furthermore, a novel sufficient stabilization criterion for fractional-order chaotic systems is proposed by introducing a stabilization criterion of an interval fractional-order linear time-invariant system and using the linear matrix inequality technique. Consequently, the chaotic synchronization is ensured. The simulation result verifies the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** interval fractional-order time-invariant system, fractional-order chaotic system, chaotic synchronization

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.Gg

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60804006, 50977008, 60821063, 61034005), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2009AA04Z127), and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2009CB320601).

<sup>†</sup> E-mail: qunrqunr@126.com