

(3+1) 维 Jimbo-Miwa 方程的精确解及局域激发*

雷 军 马松华 方建平†

(丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2011 年 1 月 16 日收到; 2011 年 8 月 5 日收到修改稿)

在符号计算软件 Maple 的帮助下, 利用投射方程法和变量分离法, 得到了 (3+1) 维 Jimbo-Miwa (JM) 方程的新显式精确解. 根据得到的孤立波解, 研究了 JM 方程新颖的局域激发.

关键词: 投射方程法, Jimbo-Miwa 方程, 精确解, 局域激发

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge

1. 引言

随着科学技术的进步, 非线性科学得到了飞速的发展, 作为非线性科学重要分支的孤子理论也获得了快速发展, 并被广泛应用于量子场论、凝聚态物理、流体力学、非线性光学、等离子体物理等物理学领域内, 引起了很多物理学家和数学家的兴趣. 众多学者在研究 (1+1) 维、(2+1) 维可积模型的同时, 也在探索 (3+1) 维可积模型, 并取得了一定的成就. 一般情况下, 这些模型可以用非线性偏微分方程 (NPDE) 很好地描述. 所以, 对 NPDE 的求解就成了孤子理论的一个重要组成部分. 但由于高维可积模型的复杂性, 求得它的精确解非常困难. 很多学者提出了求解 NPDE 的新方法, 如齐次平衡法、Jacobi 椭圆函数展开法、同伦分析法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、(G'/G) 展开法、三角函数法和投射方程法^[1-16]等. 这些方法都可以借助近年发展起来的计算机代数系统得以部分甚至完全实现, 从而大大提高了工作效率. 此外, 许多学者利用计算机软件系统构造出了许多有意义的相干孤子结构, 诸如线孤子、半线孤子、紧致子、环孤子、方孤子、盘孤子、折叠子、泡孤子、钟状孤子和峰孤子等^[17-24]. 本文的工作是将投射方程法和变量分离法运用到 (3+1) 维 Jimbo-Miwa (JM) 方程

$$u_{xxx} + 3u_x u_{xy} + 3u_y u_{xx} + 2u_{yt} - 3u_{zx} = 0, \quad (1)$$

研究其局域孤子结构及孤子随时间的演化. 文献

[25] 利用相似平衡法研究了 JM 方程, 得到了该方程特殊的孤立波解. 文献 [26] 利用改进的 Riccati 方程映射法研究了 JM 方程, 得到了该方程的孤立波解、周期波解和变量分离解.

2. (3+1) 维 JM 方程的精确解

首先对投射方程法的基本思路做一简单描述. 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=0}^n \{A_i(x) \phi^i[q(x)]\}, \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma \phi + \phi^2. \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$ 和 $q(x)$, 再根据投射方程 (4) 如下形式的通解就可以确定所求方程的解:

$$\phi = \frac{-\sigma \exp(\sigma q + c\sigma)}{\exp(\sigma q + c\sigma) - 1} \quad (\sigma \neq 0). \quad (5)$$

对 (5) 式进行适当变换, 可以得到孤立波解

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & (\sigma \neq 0), \\ -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & (\sigma = 0). \end{cases} \quad (6)$$

将投射方程法用于 (1) 式, 并根据 (3) 式, 设

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140) 和丽水学院自然科学基金 (批准号: KZ201008) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zjlsfjp@yahoo.com.cn

解为

$$u = f(x, y, z, t) + g(x, y, z, t)\phi[q(x, y, z, t)]. \quad (7)$$

这里 f, g 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数. 将(7)式和

(4) 式代人(1) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 $\phi^i (i = 1, 2, \dots)$ 前的系数, 令其等于零后可得到一系列方程. 由这些方程可求得

$$f = -\frac{1}{3} \int \frac{-3q_x q_z + q_x^3 q_y \sigma^2 + 3q_x q_{xy} + q_y q_{xxx} + 2q_y q_t - 3q_{xy} q_{xx} + 3q_x^2 q_{xy} \sigma + 3q_x q_y q_{xx} \sigma}{q_x q_y} dx, \quad (8)$$

$$g = -2q_x.$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x, t) + ay + bz, \quad (9)$$

其中 $\chi \equiv \chi(x, t)$ 是关于 x, t 的任意函数.

当 $\sigma \neq 0$ 时, 就可以得到方程(1) 的如下孤立波解:

$$u_1 = -\frac{1}{3} \int \frac{a\chi_x^3 \sigma^2 - 3b\chi_x + a\chi_{xxx} + 2a\chi_t + 3a\chi_x \chi_{xx} \sigma}{a\chi_x} dx + \chi_x \sigma \left(1 + \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + ay + bz) \right] \right), \quad (10)$$

$$u_2 = -\frac{1}{3} \int \frac{a\chi_x^3 \sigma^2 - 3b\chi_x + a\chi_{xxx} + 2a\chi_t + 3a\chi_x \chi_{xx} \sigma}{a\chi_x} dx + \chi_x \sigma \left(1 + \coth \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + ay + bz) \right] \right). \quad (11)$$

3. JM 方程的孤子结构

由于(10)和(11)式中都包含有任意函数 χ , 使系统的解变得相当丰富. 为简单起见, 下面以(10)式的势函数为例, 研究 JM 方程的特殊孤子局域激发.

$$V(x, y, z, t) = u_{1y} = \frac{a\sigma^2}{2} \chi_x \operatorname{sech}(\chi + ay + bz)^2, \quad (12)$$

这里 $V = u_{1y}$ 是 u_1 对 y 的一阶导数, 表示 u_1 的势函数.

图 1(a) 所示为 $a = 1, b = -1, \sigma = -1$ 时

$$V(x, 1, z, 0) = \frac{1}{2 \cosh(x)^2} \operatorname{sech}(2 + \tanh(x) - z)^2$$

图形(取 $\chi = 1 + \tanh(x + t)$), 这是一个钟状孤子(dromion).

图 1(b) 所示为 $a = 1, b = -1, \sigma = -1$ 时

$$V(x, 1, z, 0) = \frac{1}{2} \exp(x) \operatorname{sech}(2 + \exp(x) - z)^2$$

图形(取 $\chi = 1 + \exp(x + t)$), 这个解在区域趋向无穷大时在半条曲线(仅有一头延伸到无穷的曲线)

上有界不发散, 称为半包孤子(solitoff).

图 1(c) 所示为 $a = 1, b = -1, \sigma = -1$ 时

$$V(x, 1, z, -3) = x \sinh(x^2 + t)$$

$$\times \operatorname{sech} \left(2 + \frac{1}{\operatorname{sech}(x^2 + t)} - z \right)^2$$

图形(取 $\chi = 1 + \frac{1}{\operatorname{sech}(x^2 + t)}$), 这是一种新的孤子, 我们称它为 ω 形孤子.

4. 孤子的时间演化

以上我们得到了三种不同类型的孤子结构, 接下来研究 JM 方程的传播孤子(图 2)、湮没孤子(图 3)和聚合孤子(图 4).

4.1. 传播孤子

在(12)式中, 取

$$\chi = 1 + \exp(x + t), \quad (13)$$

当参数分别为 $a = 1, b = -1, y = 1, \sigma = -1$, 时间取 $t = -5, 0, 5$ 时, 可以得到如图 2 所示的传播孤子. 从图 2 可以看到, 随时间的增加孤子向 x 方向移动, 其传播速度、波幅和形状都保持不变.

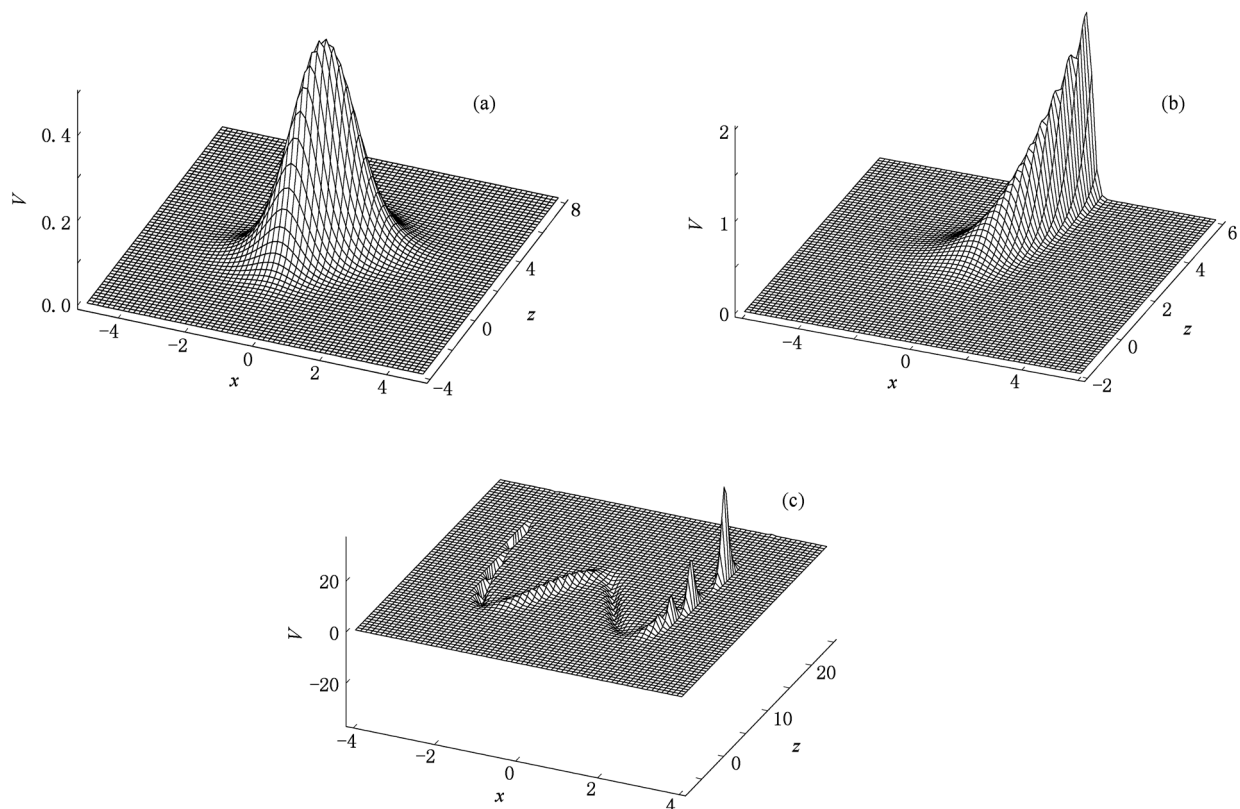


图1 当(12)式选取不同 χ 时得到的三种孤子解 (a) $\chi = 1 + \tanh(x+t)$, (b) $\chi = 1 + \exp(x+t)$, (c) $\chi = 1 + \frac{1}{\text{sech}(x^2+t)}$

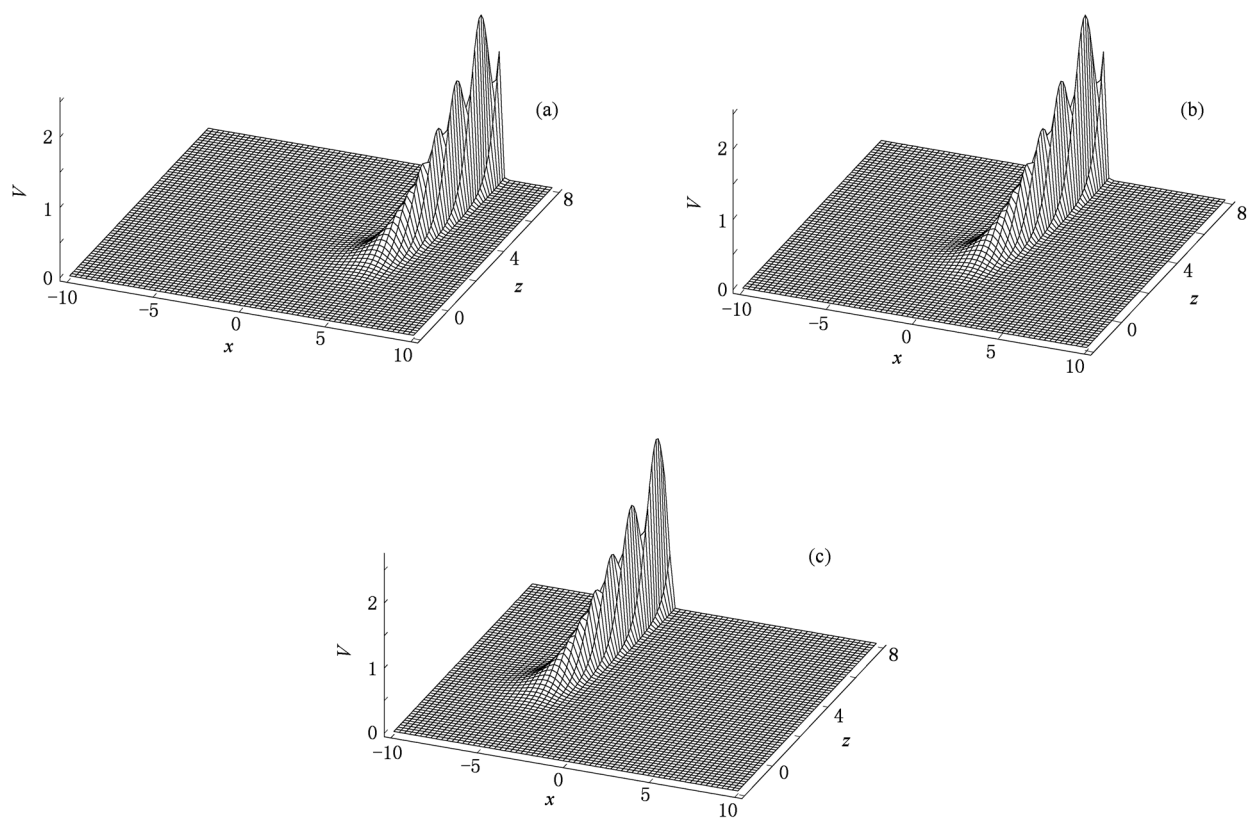


图2 (12)式利用(13)式得到的传播孤子 (a) $t = -5$, (b) $t = 0$, (c) $t = 5$

4.2. 湮没孤子

在(12)式中,如果取

$$\chi = 1 + \tanh(x^2 + t), \quad (14)$$

当参数分别为 $a = 1, b = -1, \gamma = 1, \sigma = -1$, 时间

取 $t = -8, -3, -1, 0, 3$ 时,可以得到如图3所示的湮没孤子. 从图3可以清楚看到, 两个钟状孤子以相同的速率随时间相向运动,相遇后产生叠加. 由于一个是亮孤子,一个是暗孤子,其波幅的大小和形状完全一样,叠加后波幅为零,两个钟状孤子最后消失.

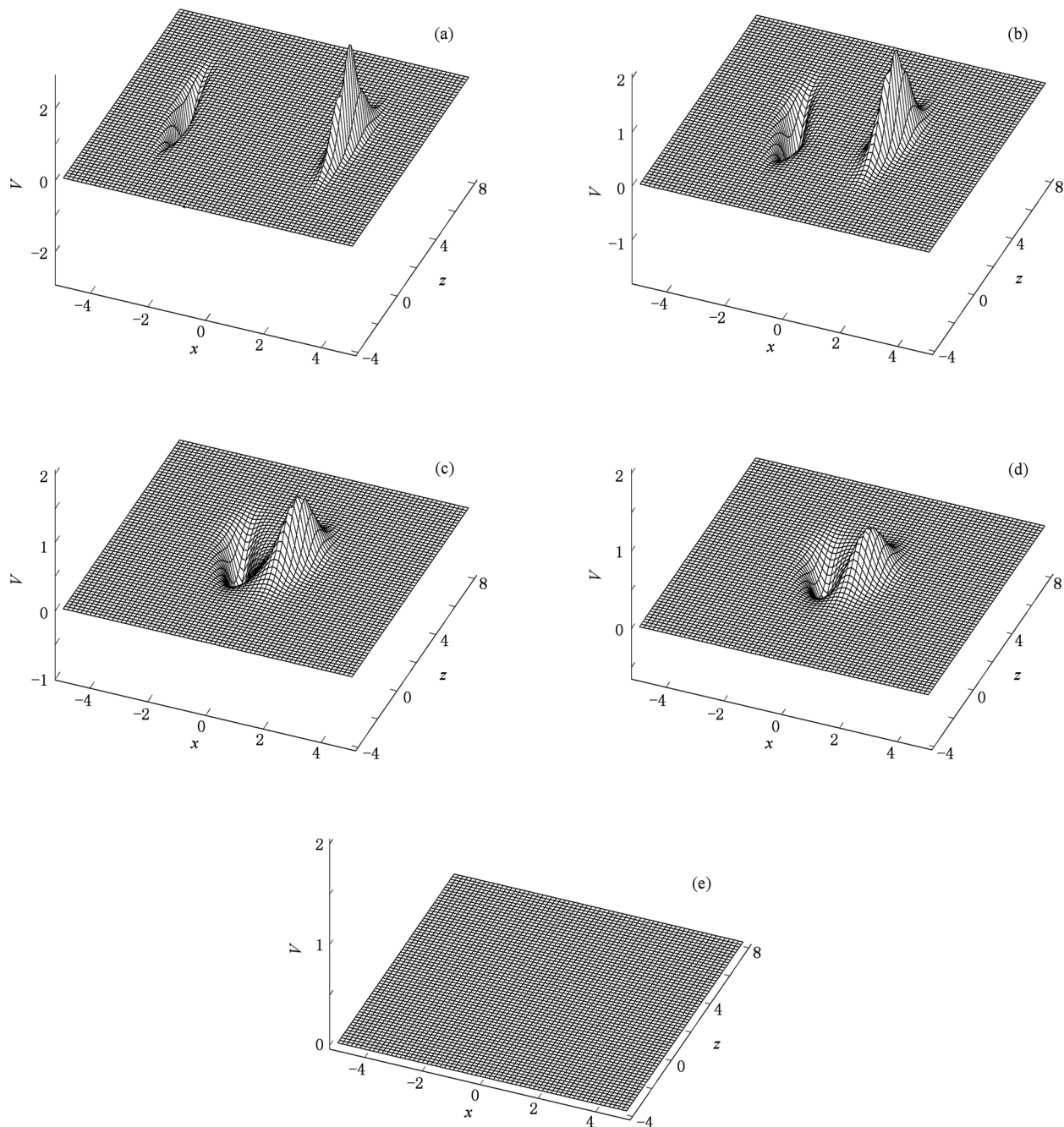


图3 (12)式利用(14)式得到的湮没孤子 (a) $t = -8$, (b) $t = -3$, (c) $t = -1$, (d) $t = 0$, (e) $t = 3$

4.3. 聚合孤子

在(12)式中,如果取

$$\chi = 1 + \operatorname{sech}(x - t) + \exp(x + t), \quad (15)$$

当参数分别为 $a = 1, b = -1, \gamma = 1, \sigma = -1$, 时间取 $t = -8, -4, 0, 7, 12$ 时,可以得到如图4所示的聚合孤子. 从图4可以看到, 两个孤子随时间相向运动,相遇后聚合为一个孤子,沿着 x 负方向运动.

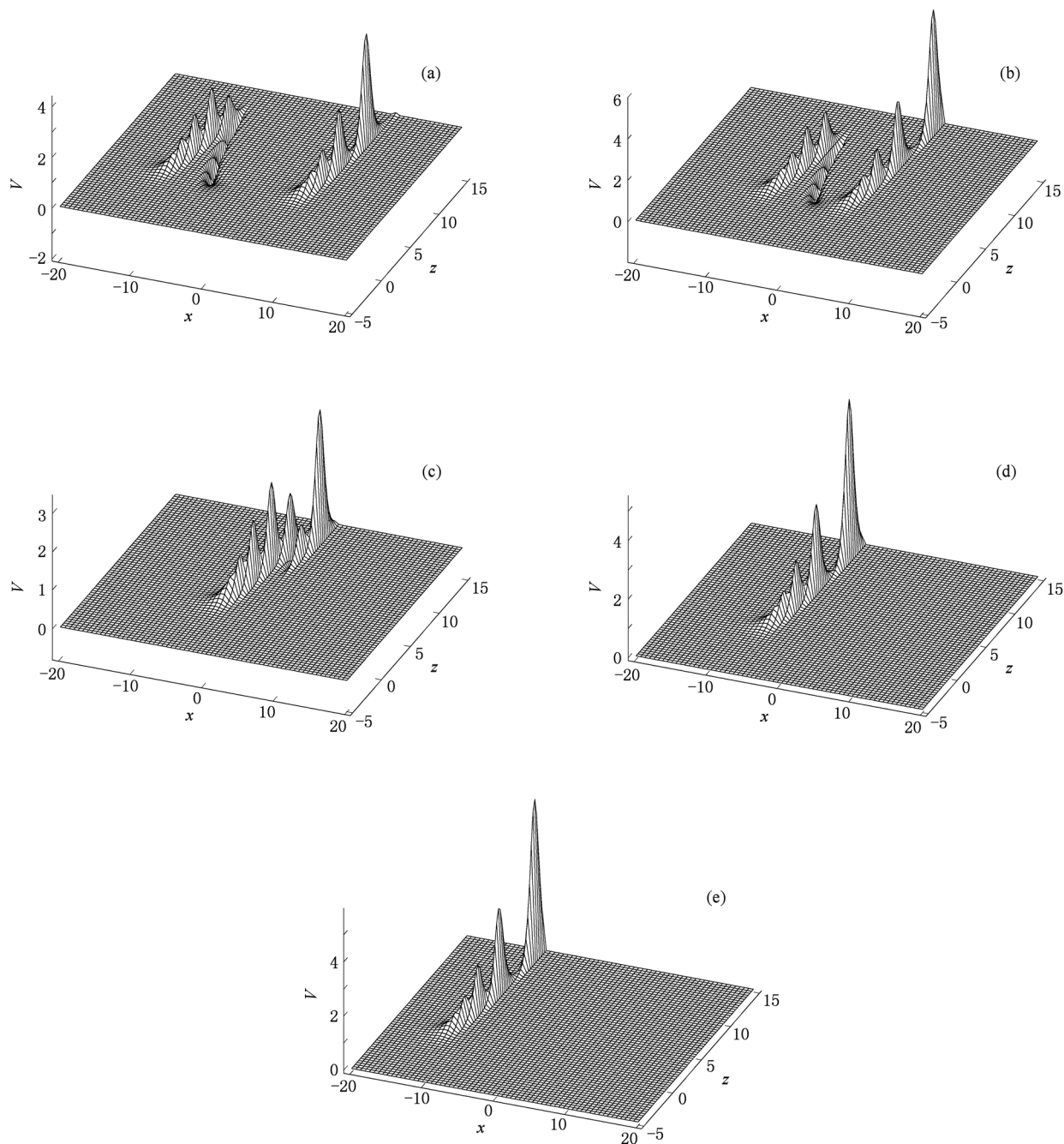


图4 (12)式利用(15)式得到的聚合孤子 (a) $t = -8$, (b) $t = -4$, (c) $t = 0$, (d) $t = 7$, (e) $t = 12$

5. 结 论

求解非线性偏微分方程的精确解,研究其局域激发模式一直是非线性理论工作者研究的重要课题. 本文利用投射方程法结合变量分离方法,借助符号计算软件 Maple 系统,得到了 $(3+1)$ 维 JM 方程的精确解. 根据孤立波解(10)式的势函数 V ,得

到了三种不同类型的孤子解,研究了孤子的传播、湮没和聚合等有趣现象. 投射方程法是一种经典、有效的求解非线性偏微分方程的好方法,已经得到了广泛的应用,本文进一步拓展了它的应用. 这种方法对其他高维非线性物理模型的应用也值得深入研究.

感谢张解放教授对本文工作的指导和有益建议.

- [1] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512
- [2] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰、徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
- [3] Dai C Q, Wang Y Y, Zhang J F 2010 *Opt. Lett.* **35** 1437
- [4] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [5] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [6] Dai C Q, Wang Y Y, Yan C J 2010 *Opt. Commun.* **283** 1489
- [7] Dai C Q, Zhou G Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 1201
- [8] Dai C Q, Zhang J F 2006 *Opt. Commun.* **263** 309
- [9] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [10] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [11] Dai C Q, Yan C J, Zhang J F 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 389
- [12] Lai D W C, Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847
- [13] Lai D W C, Chow K W 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 666
- [14] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [15] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]
- [16] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [17] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch. A* **61** 249
- [18] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [19] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [20] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 611]
- [21] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [22] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch. A* **63** 121
- [23] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys.* **17** 2767
- [24] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [25] Bai C L, Zhao H 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 875
- [26] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos Solitons Fract.* **40** 1352

Exact solutions and localized excitations of (3 + 1)-dimensional Jimbo-Miwa equation^{*}

Lei Jun Ma Song-Hua Fang Jian-Ping[†]

(Department of Physics, Lishui University, Lishui 323000, China)

(Received 16 January 2011; revised manuscript received 5 August 2011)

Abstract

With the help of the symbolic computation system Maple and a projective equation and a linear variable separation method, new exact solutions of the (3 + 1)-dimensional Jimbo-Miwa equation are derived. Based on the derived solitary wave solution, some novel localized excitations are investigated.

Keywords: projective equation, Jimbo-Miwa equation, exact solutions, localized excitations

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140) and the Natural Science Foundation of Lishui University, China (Grant No. KZ201008).

[†] Corresponding author. E-mail: zjlsfjp@yahoo.com.cn