

# 随机 Gauss 粗糙面上三维导体目标散射差场的 随机泛函解析计算方法\*

丁锐 金亚秋<sup>†</sup>

(复旦大学波散射与遥感信息教育部重点实验室, 上海 200433)

(2010年6月25日收到; 2011年8月19日收到修改稿)

提出一种解析的随机泛函方法(SFA), 计算导体 Gauss 粗糙面上三维导体目标的复合电磁散射. 推导粗糙面的随机 Green 函数, 用一种新的四路径模型描述面体复合散射机理, 用 SFA 求解双站差场雷达散射截面. 以导体球目标为算例, 与其他数值计算方法比较后验证了 SFA 的有效性, 同时讨论了粗糙度、体目标尺寸以及距离粗糙面高度等参量变化对结果的影响, 给出复杂形状体目标的双站差场雷达散射截面的空间角分布.

**关键词:** 随机泛函方法, 粗糙面随机 Green 函数, 差场雷达散射截面, 面体复合散射

**PACS:** 41.20.Jb, 92.60.Ta, 02.30.Sa

## 1. 引言

体目标与粗糙面复合电磁散射的理论建模是对地目标监测与遥感等技术中一个重要的研究课题<sup>[1]</sup>. 电磁散射包括体目标与粗糙面在相互作用条件下的多次耦合散射. 一般而言, 基于一定近似条件的解析理论计算方法难以处理这类问题, 往往要依靠数值计算方法, 如近年发展的广义前后向迭代法与谱加速法<sup>[2,3]</sup>、有限元区域分解法<sup>[4]</sup>、多层快速多极子方法<sup>[5]</sup>、高频电大目标的物理光学射线跟踪法<sup>[6]</sup>等. 也有利用解析理论方法的便利与数值方法的精确而发展的混合方法<sup>[7-10]</sup>等. 数值方法计算精度高, 往往可以处理复杂形状体目标, 但一旦目标电尺寸增大或建模复杂程度增加, 均会带来庞大的计算量, 使得快速运行计算及其物理特性的提取都会受到很大的限制<sup>[11-14]</sup>. 在数值计算方法与解析计算方法两者之间往往存在着如何取舍的选择. 文献[15]利用互易性定理的解析理论方法对微粗糙面上二维柱目标的电磁散射曾进行过研究, 但是由于该方法只纳入了面体之间的一阶相互作用, 因而计算精度不高. 发展散射机理清晰同时又能快速准确计算的体目标粗糙面复合电磁散射的解析理论求

解方法是一项十分有意义的工作.

本文提出一种基于随机泛函理论<sup>[16]</sup>的解析理论方法(SFA), 用一种新的四路径模型描述面体复合电磁散射机理, 用粗糙面随机 Green 函数求解 Gauss 粗糙面上方三维导体目标的复合电磁散射. 这一解析方法计算效率高, 散射机理清晰, 可适用于电大尺寸目标.

## 2. Gauss 粗糙面随机 Green 函数

粗糙面随机起伏高度记为  $z = f(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ , 其平均值  $\langle f(\boldsymbol{\rho}, \omega) \rangle = 0$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in R_2$ ,  $\omega \in \Omega$  表示随机介质的一个取样或实现,  $\Omega$  为概率样本空间. 在上半空间  $z > f(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ , 令源点  $P_0$  位于  $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)_p = (\boldsymbol{\rho}_0, z_0)_c$ , 观察点  $P$  位于  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)_p = (\boldsymbol{\rho}, z)_c$ , 下标  $p$  和  $c$  分别表示极坐标和柱坐标. 随机 Green 函数  $G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega)$  在柱坐标系下满足方程

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega) \\ &= -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)\delta(z - z_0) \\ & \quad (z > 0, z_0 > 0). \end{aligned} \quad (1)$$

同时,  $G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega)$  满足粗糙表面的 Dirichlet 或 Neumann 边界条件. 当源点  $P_0$  位于  $z$  轴上时, 其坐标为  $(0, z)$ . (1)式变为

\* 国家自然科学基金(批准号:60971091, 40637033)和复旦大学研究生创新基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: yqjin@fudan.ac.cn

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) = -\delta(\boldsymbol{\rho})\delta(z - z_0) \quad (z > 0). \quad (2)$$

对于  $R_2 \times \Omega$  空间上的任意随机函数  $\Psi(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ , 引入平移算子  $D^a$ , 定义为<sup>[16]</sup>

$$D^a \Psi(\boldsymbol{\rho}, \omega) = \Psi(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}, T^{-a}\omega) \quad (\boldsymbol{\rho} \in R_2, \mathbf{a} \in R_2), \quad (3)$$

其中  $T^{-a}$  为  $\Omega$  空间上保测变换. 对(1)式两端分别作用算子  $D^{-\rho_0}$  可得

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2)D^{-\rho_0}G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= -D^{-\rho_0}\delta(\boldsymbol{\rho})\delta(z - z_0) \\ &= -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)\delta(z - z_0). \end{aligned} \quad (4)$$

对比(1), (4)式, 即可得到

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega) \\ &= D^{-\rho_0}G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z | 0, z_0; T^{\rho_0}\omega). \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 在以下讨论中将源点置于  $z$  轴上, 求解 Green 函数  $G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega)$ , 再通过(4)式的变换特性可得到  $G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega)$ .

由一维 Green 函数<sup>[17]</sup>, 粗糙面的随机泛函可将二维随机 Green 函数  $G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega)$  表示为

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= \int_{R_2} \exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})u(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho) d\mathbf{k}_\rho \\ & \quad (z > 0, z_0 > 0), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $u(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho)$  为  $D^a$  不变的均匀随机函数, 即<sup>[18]</sup>  $D^a u = u$ ;  $k_\rho$  为  $\boldsymbol{\rho}$  平面上的波矢, 即波矢  $\mathbf{k}$  在  $\boldsymbol{\rho}$  平面上的投影. 又考虑到当平面波入射到随机粗糙面时, 其总场也可表示为指数函数与一个  $D^a$  不变均匀随机函数的乘积<sup>[19]</sup>,

$$\begin{aligned} & \psi(\boldsymbol{\rho}, z; \omega | \mathbf{k}_\rho) \\ &= \exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) [\exp(-ik_z z) \\ & \quad \mp \exp(ik_z z) \mp U(T^\rho\omega, z | \mathbf{k}_\rho)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\mp$  分别对应 Dirichlet 和 Neumann 边界条件,  $U(z; T^\rho\omega | \mathbf{k}_\rho)$  为  $D^a$  不变的均匀随机函数. 因此, 令

$$\begin{aligned} & u(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho) \\ &= w(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho) [\exp(-ik_z z) \\ & \quad \mp \exp(ik_z z) \mp U(T^\rho\omega, z | \mathbf{k}_\rho)], \end{aligned} \quad (8)$$

则(6)式变为

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= \int_{R_2} w(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho)\psi(\boldsymbol{\rho}, z; \omega | \mathbf{k}_\rho) d\mathbf{k}_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{R_2} w(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho) \exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) \\ & \quad \times [\exp(-ik_z z) \mp \exp(ik_z z) \\ & \quad \mp U(T^\rho\omega, z | \mathbf{k}_\rho)] d\mathbf{k}_\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式的物理意义是随机 Green 函数表示成当平面波入射到随机粗糙面上所有波场  $\psi(\boldsymbol{\rho}, z; \omega | \mathbf{k}_\rho)$  以权重函数  $w(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho)$  的线性叠加.

粗糙表面的随机 Green 函数包括代表入射和镜面反射的  $G_0(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0)$  以及由随机粗糙表面漫散射产生的随机部分  $G_s(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega)$  两部分, 即

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= G_0(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0) \mp G_s(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ & \quad (z > 0, z_0 > 0). \end{aligned} \quad (10)$$

利用自由空间 Green 函数的积分表达式<sup>[20]</sup>, 易得

$$\begin{aligned} & G_0(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0) \\ &= \frac{ik}{4\pi} [h_0^{(1)}(kr) \mp h_0^{(1)}(kr')] \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} \frac{\exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})}{k_z} \{ \exp(ik_z |z - z_0|) \\ & \quad \mp \exp[ik_z(z + z_0)] \} d\mathbf{k}_\rho \\ & \quad (z > 0, z_0 > 0), \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $k_z = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\rho|^2}$ ,  $h_0^{(1)}$  表示第一类零阶球 Bessel 函数,  $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$  和  $r' = \sqrt{\rho^2 + (z + z_0)^2}$  分别表示观察点到源点  $P_0$  和镜像源点  $P'_0$  的距离. 当  $z < z_0$  时, (11)式变为

$$\begin{aligned} & G_0(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0) \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} \frac{\exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})}{k_z} [\exp(ik_z z_0) \\ & \quad \mp \exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho} - ik_z z)] d\mathbf{k}_\rho. \end{aligned} \quad (12)$$

将(9), (10), (12)式对比可得权重函数为

$$w(T^\rho\omega; z, z_0 | \mathbf{k}_\rho) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{\exp(ik_z z_0)}{k_z}. \quad (13)$$

因此, 由(9)式可以得到当  $z < z_0$  时的随机 Green 函数为

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} d\mathbf{k}_\rho \frac{\exp(ik_z z_0)}{k_z} \exp(i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) \\ & \quad \times [\exp(-ik_z z) \mp \exp(ik_z z) \\ & \quad \mp U(T^\rho\omega, z | \mathbf{k}_\rho)] \quad (z < z_0). \end{aligned} \quad (14)$$

当  $z > z_0$  时, 类似于(11)式, 只需将(14)式中第一项的  $\exp[ik_z(z_0 - z)]$  替换为  $\exp[ik_z(z - z_0)]$ , 即可得到粗糙面的随机 Green 函数为

$$\begin{aligned}
 & G(\boldsymbol{\rho}, z | 0, z_0; \omega) \\
 &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} d\mathbf{k}_\rho \frac{\exp(i \mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho})}{k_z} \\
 & \times [\exp(i k_z |z - z_0|) \mp \exp[i k_z(z + z_0)]] \\
 & \mp \exp(i k_z z_0) U(T^\rho \omega, z | \mathbf{k}_\rho) \\
 & (z > 0, z_0 > 0). \tag{15}
 \end{aligned}$$

再由(4)式的平移变换特性,将源点由  $z$  轴移至空间任意一点,Green 函数相应地变为

$$\begin{aligned}
 & G(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega) \\
 &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} d\mathbf{k}_\rho \frac{\exp[i \mathbf{k}_\rho \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)]}{k_z} \\
 & \times [\exp(i k_z |z - z_0|) \mp \exp[i k_z(z + z_0)]] \\
 & \mp \exp(i k_z z_0) U(T^\rho \omega, z | \mathbf{k}_\rho) \\
 & (z > 0, z_0 > 0). \tag{16}
 \end{aligned}$$

(7)式中的  $U$  为无穷级数,  $\exp(i \mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) U$  表示随机粗糙面的漫散射. 对于 Gauss 随机粗糙面,  $\exp(i \mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) U$  可以展开为如下 Wiener-Ito 展开式<sup>[19]</sup>:

$$\begin{aligned}
 & \exp(i \mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) U \\
 &= A_0(\mathbf{k}_\rho) \exp(i \mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}) \exp(ik_z z) \\
 & + \int_{R_2} \exp[i(\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \\
 & \times \exp[ik_{z(k_\rho + k_{\rho_1})} z] \\
 & \times A_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho) dB(\mathbf{k}_{\rho_1}, \omega) \\
 & + \int_{R_2} \int_{R_2} \exp[i(\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1} + \mathbf{k}_{\rho_2}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \\
 & \times \exp[ik_{z(k_\rho + k_{\rho_1} + k_{\rho_2})} z] \\
 & \times A_2(\mathbf{k}_{\rho_1}, \mathbf{k}_{\rho_2} | \mathbf{k}_\rho) h_2 \\
 & \times [dB(\mathbf{k}_{\rho_1}, \omega), dB(\mathbf{k}_{\rho_2}, \omega)], \tag{17}
 \end{aligned}$$

其中  $dB(\mathbf{k}_\rho, \omega)$  为复 Gauss 随机测度;  $h_n[\cdot]$  为 Wiener-Hermite 微分;  $A_n(\cdot)$  为  $n$  阶 Wiener 核,由文献[17]给出;  $\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1} + \dots + \mathbf{k}_{\rho_n}$  为  $k$  在  $\boldsymbol{\rho}$  平面上的投影;  $k_{z(\cdot)}$  可表示为

$$\begin{aligned}
 & k_{z(k_\rho + k_{\rho_1} + \dots + k_{\rho_n})} \\
 &= \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1} + \dots + \mathbf{k}_{\rho_n}|^2}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$k^2 \geq |\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1} + \dots + \mathbf{k}_{\rho_n}|^2.$$

应当注意,

$$\begin{aligned}
 & \exp[i(\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1} + \dots + \mathbf{k}_{\rho_n}) \cdot \boldsymbol{\rho}] \\
 & \times \exp[ik_{z(k_\rho + k_{\rho_1} + \dots + k_{\rho_n})} z] = \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

由数值验证能量守恒定律可知,(17)式中  $n \geq 2$  的高阶项可以略去<sup>[19]</sup>.

将(17)式代入(16)式可得随机 Green 函数的相干部分  $G_c$  和非相干部分  $G_{ic}$  分别为

$$\begin{aligned}
 & G_c(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0) \\
 &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} d\mathbf{k}_\rho \frac{\exp[i \mathbf{k}_\rho \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)]}{k_z} \\
 & \times \{ \exp(i k_z |z - z_0|) \mp [1 + A_0(\mathbf{k}_\rho)] \\
 & \times \exp[i k_z(z + z_0)] \}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & G_{ic}(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega) \\
 &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} \int_{R_2} \exp[i \mathbf{k}_\rho \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) \\
 & + i k_z z + i k_{z(k_\rho - k_{\rho_1})} z_0] \\
 & \times a_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho - \mathbf{k}_{\rho_1}) dB(\mathbf{k}_{\rho_1}, \omega) d\mathbf{k}_\rho, \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & k_{z(k_\rho - k_{\rho_1})} = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\rho - \mathbf{k}_{\rho_1}|^2}, \\
 & a_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho) = A_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho) / k_z.
 \end{aligned}$$

由积分变量  $\mathbf{k}_\rho \rightarrow \mathbf{k}_\rho - \mathbf{k}_{\rho_1}$  的变换,得到

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_2} \exp[i(\mathbf{k}_\rho + \mathbf{k}_{\rho_1}) \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) \\
 & + i k_{z(k_\rho + k_{\rho_1})} z + i k_z z_0] a_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho) d\mathbf{k}_\rho \\
 &= \int_{R_2} \exp[i \mathbf{k}_\rho \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) + i k_z z + i k_{z(k_\rho - k_{\rho_1})} z_0] \\
 & \times a_1(\mathbf{k}_{\rho_1} | \mathbf{k}_\rho - \mathbf{k}_{\rho_1}) d\mathbf{k}_\rho. \tag{21}
 \end{aligned}$$

考虑远场区域随机 Green 函数. 由于源点  $P_0$  位于距离粗糙面不太远的高度,由鞍点法<sup>[21]</sup>易得,当  $kr \rightarrow \infty$  时,(19),(20)式变为

$$\begin{aligned}
 & G_c(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0) \\
 &= \frac{\exp(i kr)}{4\pi r} \exp(-i \mathbf{k}_{\rho_s} \cdot \boldsymbol{\rho}_0) \\
 & \times [\exp(-i k z_0 \cos\theta) \\
 & \mp [1 + A_0(\mathbf{k}_{\rho_s})] \\
 & \times \exp(i k z_0 \cos\theta)], \tag{22a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & G_{ic}(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}_0, z_0; \omega) \\
 &= \frac{k \cos\theta}{4\pi^2} \frac{\exp(i kr)}{r} \exp(-i \mathbf{k}_{\rho_s} \cdot \boldsymbol{\rho}_0) \\
 & \times \int_{R_2} \exp[i k_{z(k_{\rho_s} - k_\rho)} z_0] \\
 & \times a_1(\mathbf{k}_\rho | \mathbf{k}_{\rho_s} - \mathbf{k}_\rho) dB(\mathbf{k}_\rho, \omega), \tag{22b}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_{\rho_s} = k \sin\theta, \\
 & k_{z(k_{\rho_s} - k_\rho)} = \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_{\rho_s} - \mathbf{k}_\rho|^2}.
 \end{aligned}$$

(22)式即为 Gauss 粗糙面随机 Green 函数的远场渐近表达式. 此 Green 函数满足波动方程和粗糙面的

边界条件,已经包括了粗糙面对上方体目标所有阶的散射作用.

### 3. 新的四路径模型

图 1 所示为新的四路径模型,图中  $S$  为粗糙面,  $S_t$  为目标表面,虚线表示入射波经面体之间若干次散射的相互作用而最终到达目标表面的总入射场.

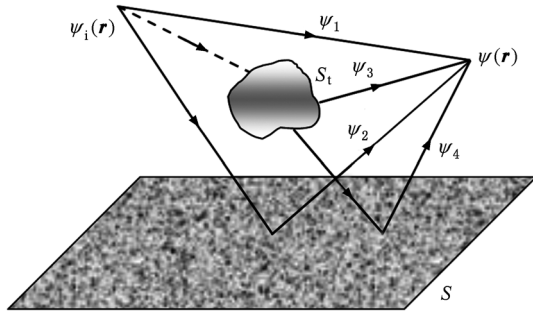


图 1 新的四路径模型

空间总场  $\psi(\mathbf{r})$  由图 1 所示四部分构成,即

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4. \quad (23)$$

这里  $\psi_1$  为入射场,  $\psi_2$  为无体目标时粗糙面单独散射场,  $\psi_3$  为体目标与粗糙面同时存在时来自体目标的散射场,  $\psi_4$  为体目标与粗糙面同时存在时来自粗糙面的散射场,且有

$$\psi_3 = \int_{S_t} \left[ G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_t, \omega)}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}_t, \omega) \frac{\partial G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t)}{\partial n} \right] dS_t, \quad (24a)$$

$$\psi_4 = \int_{S_t} \left[ G_s(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_t, \omega)}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}_t, \omega) \frac{\partial G_s(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)}{\partial n} \right] dS_t, \quad (24b)$$

其中  $\mathbf{r}_t \in S_t$ ,  $\hat{n}$  为目标表面内法向. 为了去除粗糙面截断以及照明光束宽度对结果的影响,通常计算差场散射,即粗糙面上有目标时与无目标时散射场的差值<sup>[22]</sup>. 由图 1 容易看出,无体目标时空间总场  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , 因此差场散射  $\psi_{ds}$  为

$$\begin{aligned} \psi_{ds}(\mathbf{r}, \omega) &= \psi_3 + \psi_4 \\ &= \int_{S_t} \left[ G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_t, \omega)}{\partial n} - \psi(\mathbf{r}_t, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)}{\partial n} \right] dS_t, \quad (25) \end{aligned}$$

其中随机 Green 函数  $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)$  由(9)式给出. 对

于 Dirichlet 边界条件, (25)式化简为

$$\psi_{ds}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{S_t} \left[ G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_t, \omega)}{\partial n} \right] dS_t. \quad (26a)$$

对于 Neumann 边界条件, (25)式化简为

$$\psi_{ds} = - \int_{S_t} \left[ \psi(\mathbf{r}_t, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)}{\partial n} \right] dS_t. \quad (26b)$$

(26)式的差场散射包括粗糙面随机 Green 函数作用下的体目标表面感应场的面积分. 为了与文献[7]中的差场散射表达式进行对比, 现将其转换成自由空间 Green 函数作用下的体目标与粗糙面感应场方程. 以 Dirichlet 边界条件(26a)式为例, 假定体目标表面感应电流密度为  $J_t(\mathbf{r}_t, \omega)$ , 则有  $\partial \psi(\mathbf{r}_t, \omega) / \partial n = ik_0 \eta_0 J_t(\mathbf{r}_t, \omega)$ <sup>[1]</sup>, 于是(26a)式变为

$$\begin{aligned} \psi_{ds}(\mathbf{r}, \omega) &= ik_0 \eta_0 \int_{S_t} [J_t(\mathbf{r}_t, \omega) G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)] dS_t \\ &= ik_0 \eta_0 \int_{S_t} [J_t(\mathbf{r}_t, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)] dS_t \\ &\quad + ik_0 \eta_0 \int_{S_t} [J_t(\mathbf{r}_t, \omega) \\ &\quad \times G_s(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)] dS_t. \quad (27) \end{aligned}$$

(27)式等号右端第一项表示目标感应电流密度  $J_t$  经平表面的镜向反射场; 第二项表示  $J_t$  经粗糙面的漫散射场, 体现了粗糙面对散射场的影响. 由 Huygens 等效原理<sup>[23]</sup>可知, 漫散射场可以等效成交界面上的差值感应电流  $J_{fd}(\mathbf{r}_s, \omega)$  ( $\mathbf{r}_s \in S$ ) 的贡献, 即

$$\begin{aligned} ik_0 \eta_0 \int_{S_t} [J_t(\mathbf{r}_t, \omega) G_s(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)] dS_t \\ = ik_0 \eta_0 \int_S [J_{fd}(\mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s)] dS. \quad (28) \end{aligned}$$

将(28)式代入(27)式得到

$$\begin{aligned} \psi_{ds}(\mathbf{r}, \omega) \\ = ik_0 \eta_0 \int_{S_t} [J_t(\mathbf{r}_t, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_t; \omega)] dS_t \\ + ik_0 \eta_0 \int_S [J_{fd}(\mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s)] dS. \quad (29) \end{aligned}$$

(29)式即为自由空间 Green 函数作用下的体目标面  $S_t$  和粗糙面  $S$  上感应电流产生的差场散射, 与文献[7]一致. 但是, 与(26)式不同, (29)式需要对目标面  $S_t$  及粗糙面  $S$  分别积分, 求解较困难一些. 本文采用(26)式计算差场散射.

这里的四路径模型与 Johnson 无限大平板与上方目标的复合散射机理<sup>[24]</sup>的四路径模型不同, 后者只包含了面体之间的一阶散射.

### 4. 差场散射计算

将(23)式代入(26)式,利用迭代法求解面体差场散射  $\psi_{ds}$ ,  $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1;\omega)$  由(22)式给出,迭代初值取为  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ ,  $\psi_2$  由文献[21]给出,其相干部分为

$$\begin{aligned} \psi_{0c}(\boldsymbol{\rho}, z) = & \exp(i\mathbf{k}_{\rho 0} \cdot \boldsymbol{\rho}) \{ \exp(-i k_{0z} z) \\ & \mp [1 + A_0(\mathbf{k}_{\rho 0})] \\ & \times \exp(i k_{0z} z) \}, \end{aligned} \quad (30a)$$

非相干部分为

$$\begin{aligned} \psi_{0ic}(\boldsymbol{\rho}, z; \omega) \\ = \int_{R_2} \exp[i(\mathbf{k}_{\rho 0} + \mathbf{k}_{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} + i k_{z(\mathbf{k}_{\rho 0} + \mathbf{k}_{\rho})} z] \\ \times A_1(\mathbf{k}_{\rho} | \mathbf{k}_{\rho 0}) d\mathbf{B}(\mathbf{k}_{\rho}). \end{aligned} \quad (30b)$$

由(26)式给出的差场散射  $\psi_{ds}$  可以计算粗糙面上半空间双站差场雷达散射截面 (Bi-DRCS)

$$\sigma_d = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi R^2 \langle |\psi_{ds}|^2 \rangle, \quad (31)$$

其中  $R$  表示远场观察点到坐标原点的距离. 将差场散射  $\psi_{ds}$  分为相干部分  $\psi_{dsc}$  和非相干部分  $\psi_{dsic}$ , 有

$$\begin{aligned} \langle |\psi_{ds}|^2 \rangle &= \langle (\psi_{dsc} + \psi_{dsic})(\psi_{dsc} + \psi_{dsic})^* \rangle \\ &= \langle |\psi_{dsc}|^2 \rangle + \langle |\psi_{dsic}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

以 Dirichlet 边界条件为例,由(26a)式可推得

$$\begin{aligned} \psi_{ds} &= \int_{S_t} \left( G \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS_t \\ &= \int_{S_t} \left[ (G_c + G_{ic}) \frac{\partial (\psi_c + \psi_{ic})}{\partial n} \right] dS_t \\ &= \int_{S_t} \left( G_c \frac{\partial \psi_c}{\partial n} + G_{ic} \frac{\partial \psi_{ic}}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + G_c \frac{\partial \psi_{ic}}{\partial n} + G_{ic} \frac{\partial \psi_c}{\partial n} \right) dS_t. \end{aligned} \quad (33)$$

对(33)式两端取统计平均易得

$$\psi_{dsc} = \int_{S_t} \left( G_c \frac{\partial \psi_c}{\partial n} + \left\langle G_{ic} \frac{\partial \psi_{ic}}{\partial n} \right\rangle \right) dS_t, \quad (34a)$$

$$\psi_{dsic} = \int_{S_t} \left( G_c \frac{\partial \psi_{ic}}{\partial n} + G_{ic} \frac{\partial \psi_c}{\partial n} \right) dS_t, \quad (34b)$$

其中

$$\psi_c = \psi_1 + \psi_{0c} + \psi_{dsc}, \quad (35a)$$

$$\psi_{ic} = \psi_{0ic} + \psi_{dsic}. \quad (35b)$$

将(35)式代入(34)式后迭代求解可得差场散射强度  $\psi_{ds}$ .

### 5. 数值模拟

以导体球目标为例,因文献[8]的基尔霍夫-矩

量法 (KA-MoM) 混合方法计算效率较高,故本文选取该方法的计算结果作为对比来验证本文 SFA 的结果. 图 2(a) 为 Gauss 随机粗糙面上导体球的 SFA 计算结果与 KA-MoM 方法计算得到的 50 次随机粗糙面的平均值对比,为使计算结果对比清晰,对所得 Bi-DRCS 取对数作图. 粗糙面均方根高度  $\sigma = 0.3/k$ , 相关长度  $l = 2/k$ , 球半径  $a = 20/k$ , 球心距离粗糙面平均高度  $h = 80/k$ , 入射角 ( $\theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$ ). 从图 2(a) 可以看出,除去在 KA 不适用的大观测角 ( $\theta > 80^\circ$ ), 两者数值结果符合较好.

令  $k\sigma = 0$ , 采用 SFA 方法计算平表面上一个球目标的差场散射,所得结果如图 2(b) 所示,图中同时还给出了计算精度较高的 MoM 方法所得结果. 从图 2(b) 可以看出,两种方法所得结果符合很好. 由于球体关于入射平面对称,图 2(b) 中仅给出入射平面内的数值结果. 计算结果均以照

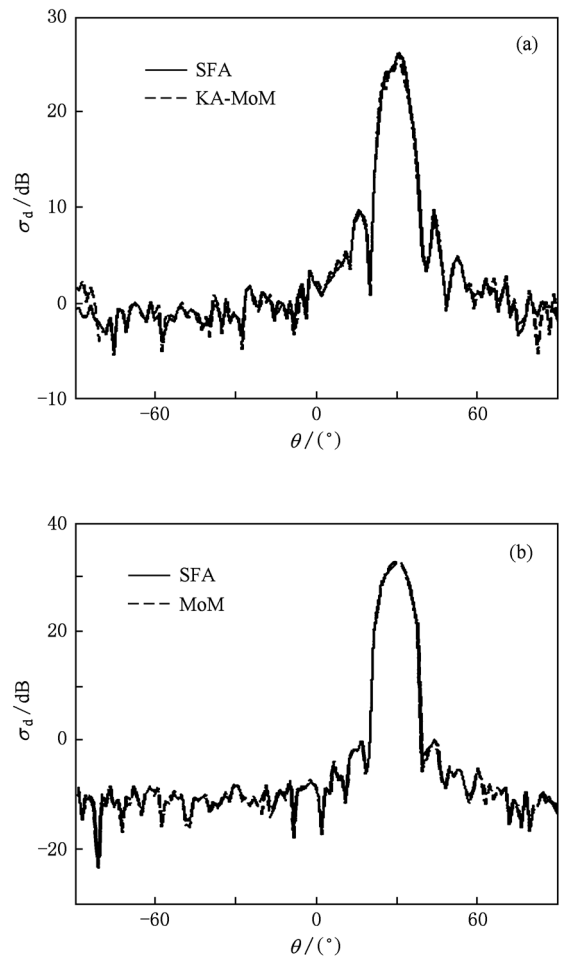


图 2 粗糙面和平表面上导体球的差场散射 (a) 粗糙面上导体球的差场散射, (b) 平表面上导体球的差场散射

射面积归一化.

在上述计算方法中, SFA 计算速度远快于 MoM, KA-MoM 的计算速度. 用普通 Dell OPTIPLEX 745 (CPU 速度为 3.2 GHz) 个人计算机对图 2(a) 所示结果进行一次计算比较, 空间角度分辨率为  $R_\theta = 0.5^\circ$ , KA-MoM 一次计算需要约 52 min, 而 SFA 仅需要 3 min. 且 SFA 仅需对目标表面一次面积分, 其复杂度仅与目标的几何结构有关, 而与其电尺寸无关.

现仍以 Gauss 随机粗糙面上—导体球目标为例, 改变粗糙度、目标大小及其距离粗糙面高度等参数, 分别计算 Bi-DRCS 空间角分布.

图 3 所示为采用 SFA 计算得到的平表面和不同粗糙表面上球目标的 Bi-DRCS 计算结果. 从图 3 可以看出, Bi-DRCS 在镜像方向 ( $\theta = 30^\circ, \varphi = 0^\circ$ ) 有明显峰值, 这是由自由空间中 Mie 球粒子前向散射峰值造成的. 此外, 随着粗糙度增大, 粗糙面镜面反射逐渐减小, 而漫散射逐渐增大, 使得 Bi-DRCS 的镜像峰值逐渐减小, 曲线抖动毛刺峰值也逐渐减小, 趋于平缓.

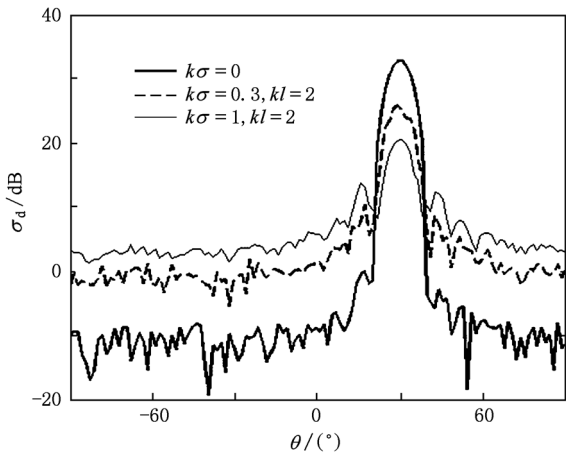


图 3 不同粗糙度表面上球目标的 Bi-DRCS

图 4 所示为不同大小球目标的 Bi-DRCS 计算结果, 入射角  $\theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$ , 球心距离粗糙面高度  $kh = 80$ . 从图 4 可以看出, 随着目标增大, 镜像峰值逐渐增大、变窄. 这可以由自由空间中 Mie 球粒子的前向散射峰值随半径的变化规律解释. 作为比较, 图 5 给出了自由空间中不同大小 Mie 球粒子的归一化 Bi-RCS, 其前向峰值随球半径增大而变大变窄.

图 6(a) 所示为球目标距离粗糙面不同高度时的计算结果, 入射角  $\theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$ , 球半径  $ka = 20$ .

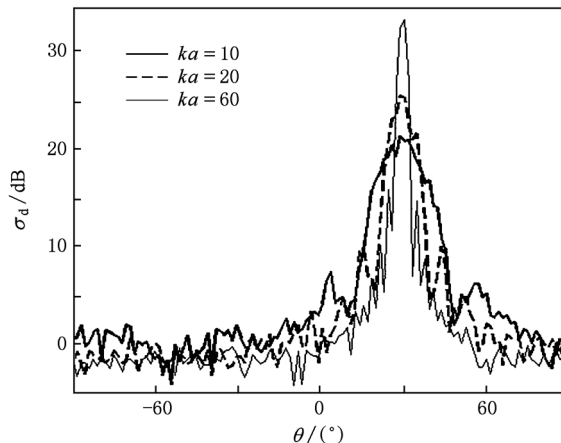


图 4 不同大小球目标的 Bi-DRCS

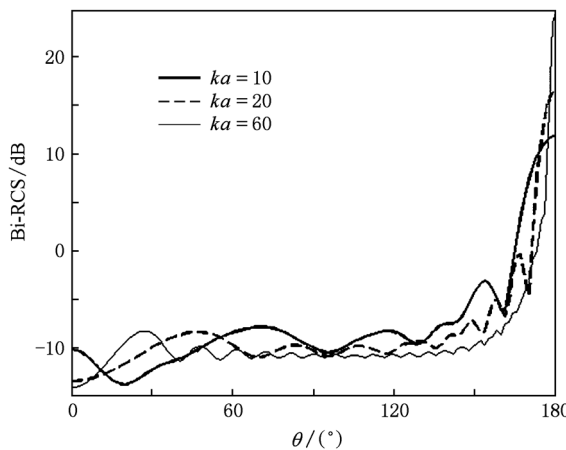


图 5 自由空间导体球目标的 Bi-RCS

从图 6(a) 可以看出, 随着高度的增大, 差场散射减小. 在 SFA 计算中, 粗糙面均为无穷大, 因此由于粗糙面照射面积变化的因素不用考虑. 目标上的感应电流密度  $J_i$  与粗糙面上的差值感应电流密度  $J_{fd}$  是相互耦合的. 由于自由空间 Green 函数随着源点和场点之间距离的增加而减小, 则当高度增大时, 目标电流  $J_i$  在粗糙面上产生的场减弱, 使得粗糙面差值感应电流  $J_{fd}$  减小, 反过来又导致  $J_i$  减小, 因而造成面体之间相互作用减弱.

此外, 由图 6(a) 还可以看出, 当高度增大到无穷大时, 镜像峰值消失, 曲线趋于平缓. 这是因为当高度增大到无穷大时面体作用趋于零, 由新的四路径模型易知, 此时面体差场散射退化为自由空间中球目标的单独散射. 图 6(b) 所示为高度无穷大时的差场散射与自由空间中导体球 Bi-RCS, 两者符合较好.

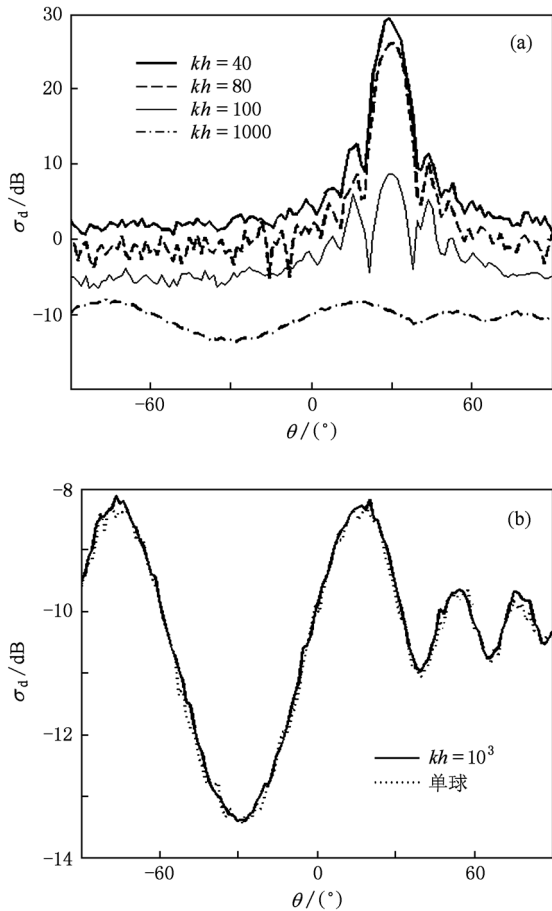


图6 球目标距离粗糙面不同高度时的 Bi-DRCS (a) 不同高度球目标的 Bi-DRCS, (b) 高度无穷大时目标的 Bi-DRCS 和自由空间单球的 Bi-RCS

下面考虑图 7 所示的粗糙面上复杂形状目标模型. 下垫面  $k\sigma = 0.3$ ,  $kl = 2$ , 入射角  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$ , 导体目标由半球、圆柱以及圆台三部分组成, 各部分尺寸如图 8 所示,  $ka = 20$ ,  $kb = 80$ ,  $kc = 20$ ,  $kd = 31.5$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$ , 体目标中轴线距离粗糙面高度  $kh = 80$ .

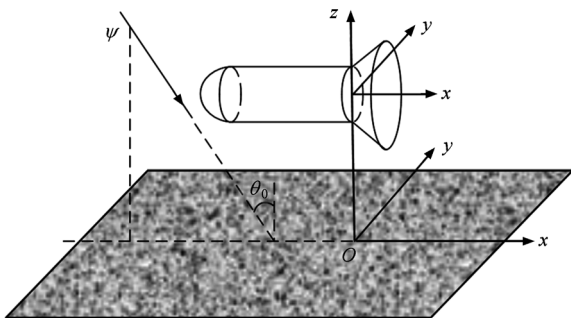


图7 粗糙面上复杂形状目标模型

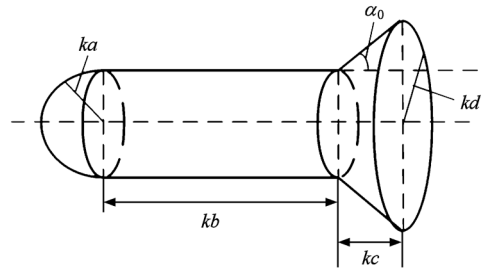


图8 目标尺寸

图 9 所示为有下垫面和无下垫面两种情形的入射平面内 Bi-DRCS 对比. 从图 9 可以看出, 在前向 ( $\theta = 30^\circ, \varphi = 0^\circ$ ) 与后向 ( $\theta = 30^\circ, \varphi = 180^\circ$ ) 上有明显峰值, 这主要是由目标表面在这些角度上所产生的镜面反射造成的. 此外, 无下垫面时差场散射减小, 尤其后向的减小更为显著. 这是由于目标特定几何结构及其摆放方位使得面体相互作用主要对后向散射作贡献. 图 10 所示为三维 Bi-DRCS 空间立体角分布.

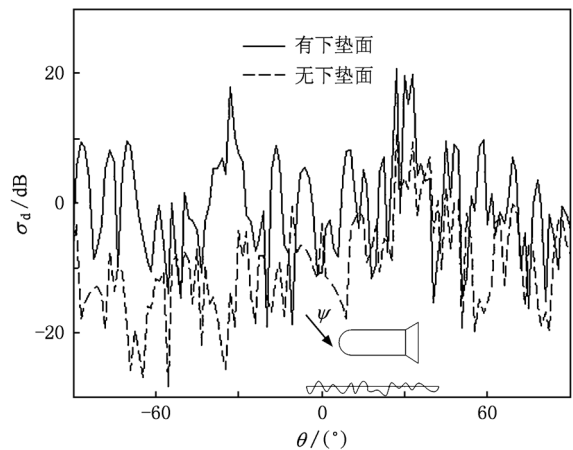


图9 有下垫面和无下垫面情形下入射平面内 Bi-DRCS 对比

改变入射角为  $\theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = -90^\circ$ , 目标尺寸及距离粗糙面高度不变. 图 11 所示为 Bi-DRCS 在入射平面内的二维及三维空间角分布. 对于有下垫面的情形, 体目标中的柱体部分与下垫面相互作用会导致差场散射的镜像峰值, 如图 11(a) 所示. 类似地, 改变目标摆放方位使其半球朝向  $z$  轴正方向, 计算所得结果示于图 12. 由此可以看出, 相对于有下垫面的情形, 无下垫面时的差场散射较小.

在空间角度分辨率为  $R_\theta = 0.5^\circ$ ,  $R_\varphi = 1^\circ$  的条

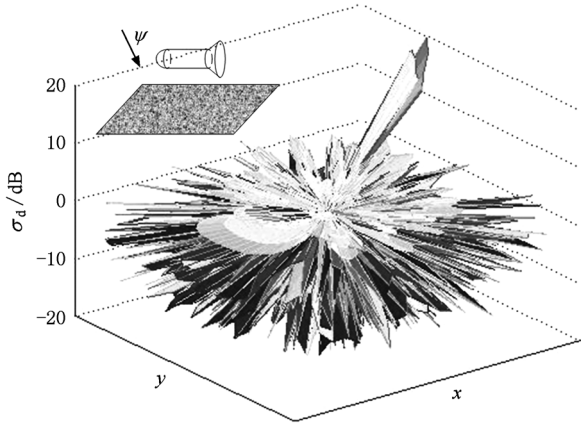


图 10  $x$  轴朝向的复杂形状目标模型的 Bi-DRCS 三维分布

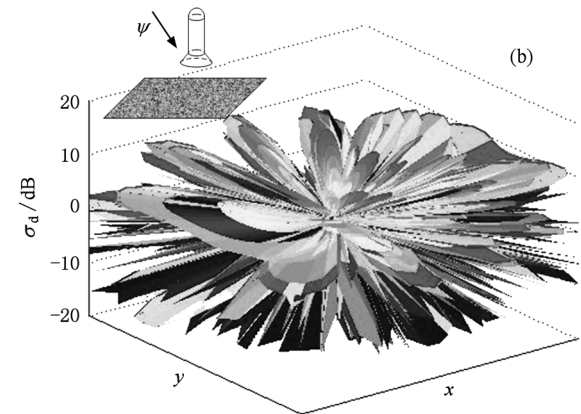
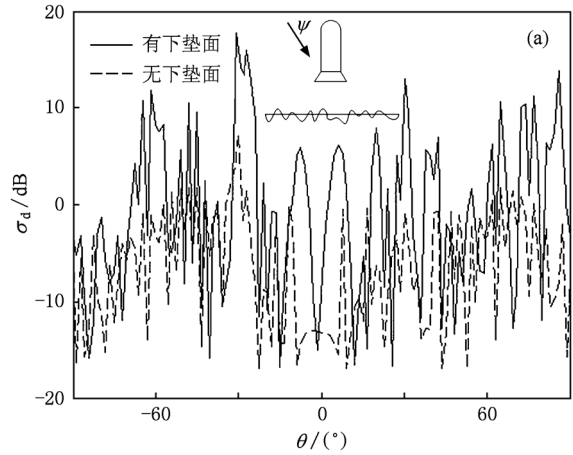


图 12  $z$  轴朝向的复杂形状目标模型的 Bi-DRCS 的二维和三维分布 (a) 入射平面内的二维分布, (b) 三维分布

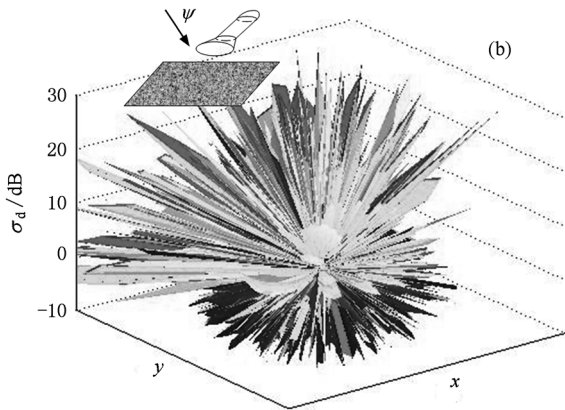
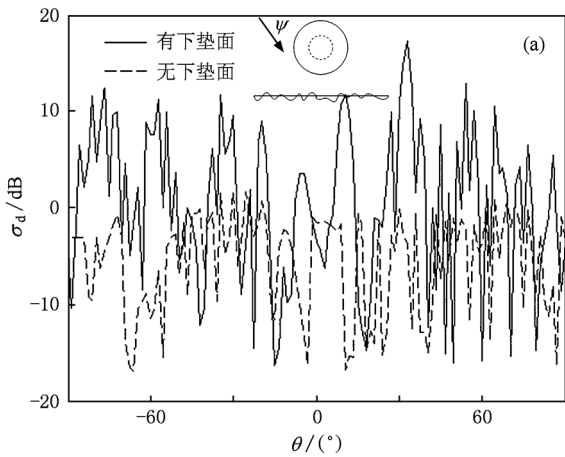


图 11  $y$  轴朝向的复杂形状目标模型的 Bi-DRCS 二维和三维分布 (a) 入射平面内的二维分布, (b) 三维分布

件下,用普通个人计算机 Dell OPTIPLEX 745 (CPU 速度为 3.2 GHz) 对图 10 所示模型的 Bi-DRCS 进行一次计算, SFA 仍只需约 3 min.

## 6. 结 论

本文利用 SFA 推导得到二维 Gauss 粗糙面随机 Green 函数,用一种新的四路径模型描述面体之间的复合散射机理, SFA 计算了面体 Bi-DRCS. 以导体球目标为例,数值验证并讨论了粗糙度、目标尺寸以及距离粗糙面高度等参量变化对计算结果的影响. 同时给出了复杂形状目标的计算结果. 本文的 SFA 要求粗糙面参数满足一定的限制条件<sup>[25]</sup>,对粗糙面散射计算均通过能量守恒定律验证. 与依靠对大量未知量矩阵计算或多次迭代计算的数值方法不同, SFA 对于每一次粗糙面的实现可以直接得到散射场,大大提高了计算效率. 此外,该方法计算复杂度与目标电尺寸无关,可以用来快速计算三维电大尺寸体目标与粗糙面的复合散射.



- [1] Jin Y Q, Liu P, Ye H X 2008 *Theory and Method of Numerical Simulation of Composite Scattering From the Object and Randomly Rough Surface* (Beijing: Science Press) pp35, 66, 106—108, 121 (in Chinese) [金亚秋、刘鹏、叶红霞 2008 随机粗糙面与目标复合散射数值模拟理论与方法 (北京:科学出版社) 第 35, 66, 106—108, 121 页]
- [2] Li Z X, Jin Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 797 (in Chinese) [李中新、金亚秋 2001 物理学报 **50** 797]
- [3] Li Z X, Jin Y Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1403 (in Chinese) [李中新、金亚秋 2002 物理学报 **51** 1403]
- [4] Liu P, Jin Y Q 2004 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **42** 950
- [5] Li L, He J Q, Liu Z J, Carin L 2003 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **51** 810
- [6] Xu F, Jin Y Q 2009 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **57** 1495
- [7] Ye H X, Jin Y Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 839 (in Chinese) [叶红霞、金亚秋 2008 物理学报 **57** 839]
- [8] Ye H X, Jin Y Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4579 (in Chinese) [叶红霞、金亚秋 2009 物理学报 **58** 4579]
- [9] Guan B, Zhang J F, Zhou X Y, Cui T J 2009 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **47** 3399
- [10] Wang R, Guo L X, Ma J, Wu Z S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1503
- [11] Li Z M, Hao Y, Zhang J C, Xu S R, Ni J Y, Zhou X W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5072
- [12] Xie T, He C, William P, Kuang H L, Zou G H, Chen W 2010 *Chin. Phys. B* **19** 024101
- [13] Li J, Guo L X, Zeng H, Han X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2757
- [14] Li J B, Wang X S, Wang T 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3174
- [15] Chiu T, Sarabandi K 1999 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **47** 902
- [16] Ogura H 1975 *Phys. Rev. A* **11** 942
- [17] Ogura H, Takahashi N 1985 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 2208
- [18] Ding R, Jin Y Q, Ogura H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3674 (in Chinese) [丁锐、金亚秋、小仓久直 2010 物理学报 **59** 3674]
- [19] Nakayama J, Ogura H, Sakata M 1981 *J. Math. Phys.* **22** 471
- [20] Ishimaru A, Rockway J D, Kuga Y 2000 *Waves Rand. Compl. Med.* **10** 17
- [21] Ishimaru A 1978 *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (New York: Academic) p389
- [22] Johnson J T 2002 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **50** 1361
- [23] Jin Y Q 1994 *Electromagnetic Scattering Modeling for Quantitative Remote Sensing* (Singapore: World Scientific) p43
- [24] Johnson J T 2001 *Microwave Opt. Techn. Lett.* **30** 130
- [25] Nakayama J 1982 *Radio Sci.* **17** 558

# A stochastic functional approach to difference scattering from a three-dimensional perfect electric conductor target on randomly rough surface<sup>\*</sup>

Ding Rui Jin Ya-Qiu<sup>†</sup>

(Key Laboratory of Wave Scattering and Remote Sensing Information of Ministry of Education, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(Received 25 June 2010; revised manuscript received 19 August 2011)

## Abstract

A stochastic functional approach (SFA) is developed to calculate electromagnetic composite scattering from a three-dimensional perfectly electric conducting (PEC) target on a randomly rough PEC surface. The stochastic Green's function for randomly rough surface is derived, and a novel four-path model is presented to describe the scattering mechanism of target-surface interactions. The SFA is used to obtain the difference scattering cross section due to the rough surface of target. As a simple example of a spherical target with rough surface, the SFA is numerically compared with other numerical approaches, showing its accuracy and effectiveness. Finally, the difference bistatic scattering from a complex electric large target with rough surface and its functional dependence on the parameters are discussed.

**Keywords:** stochastic functional approach, stochastic Green's function of rough surface, difference radar cross section, composite scattering of target/surface

**PACS:** 41. 20. Jb, 92. 60. Ta, 02. 30. Sa

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60971091, 40637033) and the Innovation Foundation for Graduate Students of Fudan University, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yqjin@fudan.ac.cn