

# 基于双树复小波与波原子的图像扩散滤波\*

刘金华<sup>†</sup> 余 堃

(电子科技大学计算机科学与工程学院, 成都 611731)

(2010年12月6日收到; 2011年8月12日收到修改稿)

图像的非线性扩散滤波来源于热方程的思想, 其关键在于计算适当的扩散系数和控制扩散方向. 在已有的扩散模型中, 由于扩散系数仅依赖于图像的梯度, 因而这类模型容易受噪声的干扰; 同时, 图像的细节信息(如纹理)容易被误认为是噪声而被去除. 为克服这些不足, 首先给出了一种采用双树复小波变换计算扩散系数的方法; 然后设计了一种用于图像滤波的非线性扩散模型, 最后提出了基于双树复小波变换和波原子阈值相结合的图像滤波算法. 仿真结果表明, 所提出的算法在对含噪图像滤波的同时, 能够较好地保持图像的边缘和纹理等细节信息.

**关键词:** 图像扩散滤波, 非线性扩散, 波原子, 双树复小波变换

**PACS:** 42.30.Va

## 1. 引言

基于偏微分方程的图像滤波算法已经得到了许多深入研究<sup>[1-3]</sup>. 该类算法是通过演化方程来推导一个最小能量泛函, 并在保持图像细节信息的基础上以实现图像滤波的目的. 该类算法大多数是依赖于图像的梯度、曲率等几何特征来处理. Perona 和 Malik<sup>[4]</sup>提出的各向异性扩散模型(即 PM 模型)在这个领域中影响深远. PM 模型能够针对图像的边缘和非边缘区域进行不同性质的处理, 但由于 PM 模型是一个病态的理论模型, 并且扩散系数仅依赖于图像的梯度, 因而 PM 模型在噪声的影响下容易造成图像的边缘模糊. 于是人们针对 PM 模型进行了很多的改进. Catté 等<sup>[5]</sup>提出了一种图像滤波模型, 该模型是以高斯函数作为扩散系数. 结果表明, 文献[5]的模型能够有效地克服噪声对扩散的干扰, 但是不能充分地提取图像中的边缘信息. 刘峰<sup>[6]</sup>提出了一种基于小波变换的图像扩散滤波模型, 采用小波变换模的平方值来代替 PM 模型中的梯度, 以此来改进 PM 模型. 仿真结果表明, 文献[6]的模型具有较高的计算效率.

人们已经知道小波变换是一种时域和频域

的局部变换, 这种变换具有良好的多尺度分析特点. 所以小波变换在信号的特征提取、数据压缩、奇异点检测等领域都获得了广泛的应用<sup>[7-11]</sup>. Donoho<sup>[12]</sup>提出的算法能够较好地估计噪声方差, 并去除图像中的噪声. 但是在采用文献[12]的算法时, 有可能将图像高频子带中的小波系数误认为是噪声系数而被去除, 这会导致图像的边缘、纹理等细节信息的丢失.

研究发现, 小波变换存在着一些缺陷<sup>[13]</sup>, 如缺乏平移不变性、分解的方向有限等, 主要原因是小波变换不能有效地描述高维信号的线状奇异性或面状奇异性. 当前, 已经涌现出许多新的多尺度几何分析技术, 如双树复小波变换<sup>[13]</sup>、轮廓波变换<sup>[14]</sup>、剪切波变换<sup>[15]</sup>、波原子变换<sup>[16]</sup>等. 这些多尺度几何分析技术兼容了小波变换的特点, 具有刻画图像线状奇异性的良好能力. Plonka 等<sup>[17]</sup>将波原子变换和曲线波变换相结合提出了一种图像滤波算法, 该算法利用了非线性扩散在图像滤波过程中的边缘保持优势以及两种变换的多尺度分析特点, 取得了较好的图像滤波效果.

本文主要利用波原子变换对图像的稀疏表示能力, 提出了一种基于双树复小波变换和波原子变换的图像扩散滤波算法. 该算法充分利用双树复小

\* 国家自然科学基金(批准号: 60873185, 60903074)和国家高技术研究发展计划(批准号: 2008AA04A107)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: liujinhua\_uestc@126.com

波变换<sup>[13]</sup>的完全重构、近似平移不变性和较好的方向选择性等特点,引入双树复小波变换模来计算扩散系数. 并且进一步结合波原子变换来选取扩散阈值,以便在非线性扩散过程中增强图像的方向纹理特征.

## 2. 波原子变换

波原子变换由 Demanet 等<sup>[16]</sup>提出,该项研究工作开拓了波原子变换在图像稀疏逼近方面的新方向. 可以将波原子变换看成是二维小波包变换的变体,它的振动周期和支撑长度服从类似抛物线形状的尺度(parabolic scaling)关系. 文献[16]指出:对于具有振荡性的函数或具有丰富方向纹理特征的函数,对它们采用波原子变换进行表示将比采用小波变换、Gabor 变换或曲线波变换等已有变换进行表示具有更稀疏的扩展能力.

Demanet 等<sup>[16]</sup>详细地描述了波原子变换. 考虑一维小波包函数  $\psi_{m,n}^j(x)$ , 其中  $j \geq 0, m \geq 0, n \in \mathbb{N}$ . 该函数的中心频率位置为  $\pm \omega_{j,m} = \pm \pi 2^j m$ , 其中  $\pm \omega_{j,m} = \pm \pi 2^j m, c_1 2^j \leq m \leq c_2 2^j$ ,  $c_1$  和  $c_2$  都是大于零的常数.  $\psi_{m,n}^j(x)$  的空域中心位置为  $x_{j,n} = 2^{-j}n$ . 设  $f$  是实值、无穷光滑的冲击函数,其紧支撑区间为  $[-7\pi/6, 5\pi/6]$ . 当  $|\omega| \leq \pi/3$  时,  $f$  满足

$$f(\pi/2 - \omega)^2 + f(\pi/2 + \omega)^2 = 1$$

和

$$f(-\pi/2 - 2\omega) = f(\pi/2 + \omega).$$

那么函数  $\hat{\psi}_m^0$  可以定义为

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_m^0 = & \exp(-i\omega/2) [\exp(i\alpha_m) \\ & \times f(\varepsilon_m(\omega - \pi(m + 1/2))) \\ & + \exp(-i\alpha_m)f(\varepsilon_{m+1}(\omega \\ & + \pi(m + 1/2)))] , \end{aligned} \quad (1)$$

并且函数  $\hat{\psi}_m^0$  满足  $\sum_{m=0}^{\infty} |\hat{\psi}_m^0(\omega)|^2 = 1$ . 在(1)式中,  $\varepsilon_m = (-1)^m, \alpha_m = \pi(m + 1/2)/2$ . 函数  $\psi_m^0$  的平移  $\{\psi_m^0(x - n)\}$  构成了平方可积函数空间  $L^2(\mathbb{R})$  的一组正交基,其基函数的定义为

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^j = & \psi_m^j(x - 2^{-j}n) \\ = & 2^j \psi_m^0(2^j x - n). \end{aligned} \quad (2)$$

根据文献[16],波原子变换系数可定义为

$$c_{j,m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{m,n}^j(x) dx$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2^{-j}n\omega) \\ & \times \widehat{\hat{\psi}_m^j(\omega)} \widehat{f(\omega)} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

在二维波原子变换情况下,二维波包函数是通过张量积的形式来实现的. 设

$$\mu = (j, \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

其中

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2),$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

这里  $\mu = (j, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  是对应于相空间的一个点  $(x_\mu, \omega_\mu)$ , 其中

$$x_\mu = 2^{-j}v,$$

$$\omega_\mu = \pi 2^j u.$$

考虑基于张量积的分解和基于二维小波包函数的希尔伯特变换为

$$\varphi_\mu^+(x_1, x_2) = \psi_{u_1, v_1}^j(x_1) \psi_{u_2, v_2}^j(x_2), \quad (4)$$

$$\varphi_\mu^-(x_1, x_2) = H\psi_{u_1, v_1}^j(x_1) H\psi_{u_2, v_2}^j(x_2), \quad (5)$$

其中  $\varphi_\mu^+(x_1, x_2)$  和  $\varphi_\mu^-(x_1, x_2)$  构成了一对波原子变换的规范正交基. 所以  $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_\mu^+ + \varphi_\mu^-)$  和  $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_\mu^+ - \varphi_\mu^-)$  就形成了冗余度为 2 的波原子紧框架. 其详细的推导可参见文献[16].

## 3. 图像扩散模型

### 3.1. Perona-Malik 各向异性扩散

Perona 和 Malik 提出的 PM 模型<sup>[4]</sup>为

$$\mathbf{I} = \text{div}(c(\nabla \mathbf{I}) \nabla \mathbf{I}), \quad (6)$$

其中  $\mathbf{I}$  表示图像(即由图像的灰度值所形成的矩阵),  $\nabla$  是梯度算子,  $c$  是扩散系数. 在时间  $t = 0$  时刻的原始图像为  $\mathbf{I}(x, y, 0) = \mathbf{I}(x, y)$ . 随着时间尺度  $t$  的演化将变为图像  $\mathbf{I}(x, y, t)$ , 即为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = & \nabla \cdot (c(x, y, t) \nabla \mathbf{I}) \quad (x, y, t) \in \Omega(0, \infty), \\ \mathbf{I}(x, y, 0) = & \mathbf{I}(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial n} = & 0 \quad (x, y, t) \in \partial\Omega(0, \infty), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\Omega$  表示图像区域,  $\mathbf{n}$  是  $\Omega$  边界的单位外法向量,  $c(x, y, t)$  是非负单调递减函数,其函数值表示扩散强度. 扩散系数的两种计算方式分

别为

$$c(\|\nabla I\|) = (1 + (\|\nabla I\|/k)^2)^{-1}, \quad (8)$$

$$c(\|\nabla I\|) = \exp(-(\|\nabla I\|/k)^2), \quad (9)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示范数,  $k$  是控制图像扩散的梯度阈值参数. PM 模型是对不同的区域进行相应的滤波处理. 在梯度较小的内部区域, 扩散系数相对较大, 扩散强度也较强. 因此, 它能较有效地去除噪声. 随着扩散沿时间向前推进, 这些图像区域的梯度值趋于无穷大, 从(8)和(9)式可以看出扩散系数将趋于零, 扩散最终将趋于停止状态.

### 3.2. 扩散系数的计算

#### 3.2.1. 基于双树复小波变换的扩散系数计算方法

由于小波变换不能有效地刻画图像或高维信号的线状奇异性或面状奇异性, 所以本文采用双树复小波变换来计算扩散系数. 下面根据文献[18]对线状奇异性进行介绍.

**定义 1 (线状奇异性<sup>[18]</sup>)** 假设  $f(x)$  是定义在  $[0, 1]^2$  上的二元函数, 并且沿着空间  $C^2$  的曲线  $\Gamma$  不连续. 设  $\psi_{s, k_1, k_2} = \varphi_{s, k_1} \varphi_{s, k_2}$  是尺度为  $s$  的位置  $k_1$  和  $k_2$  处的二维小波函数,  $\varphi_{s, k_1}$  和  $\varphi_{s, k_2}$  为一维小波函数, 并通过张量积算法来构造二维小波函数. 把  $[0, 1]^2$  划分成  $2^{-s} \times 2^{-s}$  的  $2^s$  个正方形, 它与曲线  $\Gamma$  相交. 在第  $s$  个尺度的二维小波分解中, 每一个小波局部化于一个相应的边长为  $2^{-s} \times 2^{-s}$  的正方形附近. 因此, 就有阶数为  $O(2^s)$  个小波捕获到沿曲线  $\Gamma$  的奇异性, 且小波系数满足

$$|\langle f, \psi_{s, k_1, k_2} \rangle| \leq \|f\|_\infty \|\psi_{s, k_1, k_2}\| \leq C2^{-s}. \quad (10)$$

由于  $f(x)$  在  $\psi_{s, k_1, k_2}$  的支持区间内不光滑, 因而上述速率控制是最优的, 所以约有  $2^s$  个大小约为  $2^{-s}$  的小波系数. 第  $N$  个最大的小波系数大小约为  $1/N$ , 由最优的  $N$  个小波系数构造的逼近  $\hat{f}_N$  满足

$$\|f - \hat{f}_N\|_2^2 = O(N^{-1}). \quad (11)$$

根据文献[18], 在二维情况下由于图像边缘的不连续性是基于空间分布, 这种不连续性表现在与小波级数展开的许多项“相交”. 因此, 在二维情况下小波系数的表示不再稀疏.

由于图像经双树复小波变换后将获得两个低频子带图像和六个方向上的高频子带图像, 其中低频子带图像集中了图像的主要能量, 而六个方向上的高频子带图像中大部分系数的绝对值较小, 只有在图像的边缘等跳变位置处所对应的系数才有较

大的值. 因此, 双树复小波变换也同样具有“变焦”特性, 它对信号跳变点位置的确定应该是有效的.

**定义 2** 函数  $\theta(x) = O\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$  为光滑函数, 应满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1. \quad (12)$$

一个光滑函数可以认为是低通滤波器的冲激响应. 在机器视觉的应用中, 常用的一个函数为高斯函数. 令

$$\theta_s(x) = \frac{1}{s} \theta\left(\frac{x}{s}\right),$$

则  $L^2(R)$  中的一个信号  $f(x)$  在尺度  $s$  的边缘定义为  $f(x)$  被  $\theta_s(x)$  光滑化之后的跳变点. 假设双树复小波函数  $\psi(x)$  是光滑函数  $\theta(x)$  的一阶导数, 即

$$\psi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}.$$

令

$$\psi_s(x) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x}{s}\right),$$

则  $f(x)$  的卷积型双树复小波变换可定义为

$$T_{DW}(s, x) = f * \psi_s(x) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{x-t}{s}\right) dt. \quad (13)$$

由  $\psi_s(x)$  的定义可得

$$\begin{aligned} T_{DW}(s, x) &= f * \psi_s(x) \\ &= f * \left( \frac{d\theta_s}{dx} \right)(x) \\ &= s \frac{d}{dx} (f * \theta_s)(x). \end{aligned} \quad (14)$$

双树复小波变换  $T_{DW}(s, x)$  与  $f(x)$  被  $\theta_s(x)$  光滑化之后的一阶导数成正比. 对一个固定的尺度  $s$ ,  $T_{DW}(s, x)$  沿  $x$  变量的局部极值点对应着  $f(x) * \theta_s(x)$  的拐点, 即  $f(x)$  的跳变点. 因此, 若选择双树复小波为光滑函数的一阶导数, 则由其双树复小波变换的模极大值点可以检测到信号  $f(x)$  的跳变点. 这样就可以采用双树复小波变换来提取图像的边缘, 并用于计算扩散系数.

#### 3.2.2. 扩散系数的计算

图像经一层双树复小波分解后, 选取  $15^\circ, 45^\circ$  和  $75^\circ$  (或  $-15^\circ, -45^\circ$  和  $-75^\circ$ ) 三个方向的子带图像复小波系数的模来计算扩散系数. 考虑到另外三个方向 (如  $-15^\circ, -45^\circ$  和  $-75^\circ$ ) 的子带图像复小波系数的模也反映了图像在相应位置上的灰度变化情况. 所以在计算双树复小波模时应求它们和的平

均. 双树复小波变换可表示为  $T_{DW} = \langle I(x, y), \psi_{s,i,j}(x, y) \rangle$ , 其中  $s$  表示分解尺度.  $w_d^s(x, y)$  ( $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 分别表示  $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, -15^\circ, -45^\circ, -75^\circ$  方向上的子带图像在尺度  $s$  上的复小波系数. 双树复小波变换模可表示为

$$\|M(x, y)\| = \frac{\sqrt{\sum_{d=1}^6 \|w_d^s(x, y)\|^2}}{2}. \quad (15)$$

扩散系数的计算采用(8)式. 将  $\|M(x, y)\|$  代入(8)式, 可得扩散系数为

$$c(\|M(x, y)\|) = (1 + (\|M(x, y)\|/k)^2)^{-1}, \quad (16)$$

其中  $k$  可按照文献[19]中的  $p$  范数估计法进行计算. 对一个像素数为  $x \times y$  的图像  $I$ , 在时间  $m\Delta t$  时的  $p$  范数  $\|I(m\Delta t)\|_p$  定义和对  $k$  的估计可分别表示为

$$\|I(m\Delta t)\|_p = \sum_{(x,y) \in I} (I(x, y, m\Delta t)^p)^{1/p}, \quad (17)$$

$$k = \frac{\sigma \|I(m\Delta t)\|_p}{xy}, \quad (18)$$

其中  $\sigma$  为成正比于图像的平均灰度值.

图1给出了测试图像(Lena)分别采用小波变换和双树复小波变换的变换模关系曲线, 其中小波变换模是根据水平和垂直两个方向上的子带系数进行计算, 而双树复小波变换模是根据六个方向的子带系数进行计算. 从图1可以看出, 经两种变换后图像大部分的系数值较小, 相应的变换模值也较小. 较大的变换模反映了图像的边缘信息特征. 从图1还可以看出, 当变换模值超过5时, 基于双树复小波变换计算的变换模数比小波变换计算的模数要多, 意味着采用双树复小波变换能够检测到更多的图像边缘信息.

图2给出了不同扩散阈值下扩散系数与双树复小波变换模之间的关系曲线. 从图2可以看出, 在采用双树复小波模来区分图像的边缘和非边缘区域过程中, 接近边缘区域附近的扩散系数趋于零, 图像不再平滑, 而非边缘区域的扩散系数远离零, 图像可以平滑.

### 3.3. 改进的对流-扩散模型

在图像滤波中, 一般可假定滤波模型为

$$I(x) = I_0(x) + n(x), \quad (19)$$

其中  $n(x)$  为加性高斯白噪声, 其均值为零, 方差为  $\sigma^2$ ;  $I$  为观测图像;  $I_0$  为原始图像. 借鉴文献[17]中的对流-扩散算法思想, 改进的 PM 模型为

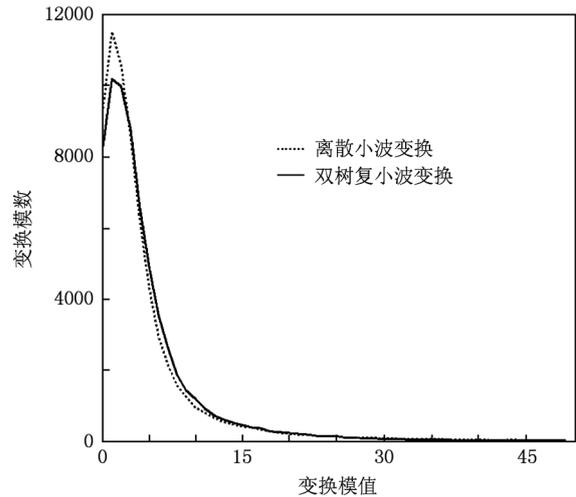


图1 变换模曲线

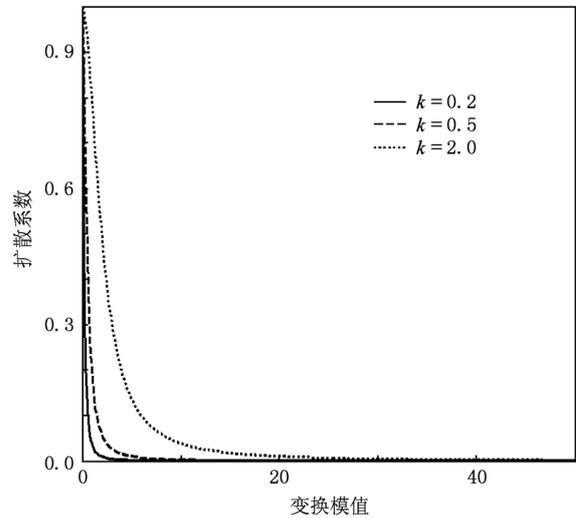


图2 扩散系数与变换模的关系

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (c(\|M(x, y)\|) \nabla I) + \lambda(AI_0 - I), \quad (20)$$

其中  $\lambda$  是控制对流项的强度因子. (20)式等号右端第一项是扩散项, 第二项是对流项. 在对第一项的扩散系数计算中, 采用双树复小波变换模  $\|M(x, y)\|$  来代替图像的梯度模. 第二项采用波原子阈值技术来增强图像的方向纹理特征. 对(20)式等号右端第二项采用波原子变换可得

$$AI_0 = W^{-1}\theta_\alpha W(I_0), \quad (21)$$

则有

$$\lambda(AI_0 - I) = \lambda(W^{-1}\theta_\alpha W(I_0) - I). \quad (22)$$

这里  $A$  为一个非线性算子, 用来保持图像边缘, 突出图像的特征;  $W$  表示波原子变换;  $\theta_\alpha$  为阈值函

数;  $\alpha$  为阈值.  $\theta_\alpha$  采用软阈值函数, 可表示为

$$\theta_\alpha = \begin{cases} |w| - \alpha & (|w| > \alpha), \\ 0 & (|w| = \alpha), \\ |w| + \alpha & (|w| < \alpha), \end{cases} \quad (23)$$

其中  $|w|$  为双树复小波变换系数  $w$  的绝对值. 综合 (20) 和 (22) 式可得

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \nabla \cdot (c(\|M(x,y)\|) \nabla \mathbf{I}) + \lambda(W^{-1}\theta_\alpha W(\mathbf{I}_0) - \mathbf{I}). \quad (24)$$

#### 4. 算法步骤

**步骤 1** 首先对观测图像  $\mathbf{I}$  进行周期延拓, 然后对延拓后的图像进行双树复小波变换, 并根据 (15) 式计算双树复小波变换模.

**步骤 2** 计算扩散强度控制阈值  $k$ , 然后代入 (16) 式计算扩散系数.

**步骤 3** 对 (24) 式进行离散化处理. 这里采用时间离散化, 时间步长为  $\tau$ ,  $t_j := j\tau, j \in N$ , 并设图像

$$\mathbf{I}(x,y,t) = u(x,y,t),$$

且

$$u_{x,y}^0 = \mathbf{I}(x,y,0),$$

则有

$$\frac{u_{x,y}^{j+1} - u_{x,y}^j}{\tau} = \nabla \cdot (c(\|M(x,y)\|) \nabla u_{x,y}^j) + \lambda(\mathbf{A}u_{x,y}^0 - u_{x,y}^{j+1}). \quad (25)$$

**步骤 4** 对 (25) 式引入  $\mu := \tau\lambda$ , 那么 (25) 式可以进一步推导为

$$u_{x,y}^{j+1} = \frac{1}{1+\mu}(u_{x,y}^j + \mu\mathbf{A}u_{x,y}^0 + \tau \nabla \cdot (c(\|M(x,y)\|) \nabla u_{x,y}^j)). \quad (26)$$

**步骤 5** 为简化计算, 令非线性算子  $\mathbf{A}$  为恒等算子, 即  $\mathbf{A} = \mathbf{Id}$ , 则 (26) 式可以统一写为

$$u_{x,y}^{j+1} = u_{x,y}^j + \mu(u_{x,y}^0 - u_{x,y}^j) + \tau \nabla \cdot (c(\|M(x,y)\|) \nabla u_{x,y}^j). \quad (27)$$

**步骤 6** 如果  $u_{x,y}^{j+1}$  满足要求, 则停止迭代; 否则, 置  $j \leftarrow j + 1$ , 转步骤 5 继续计算, 直到求得  $u$  的解为止.

#### 5. 仿真结果及分析

在测试中, 选取像素数均为  $512 \times 512$  的房子

图像和指纹图像作为测试对象, 并以结构相似指数测度 (SSIM)<sup>[20]</sup>、峰值信噪比 (PSNR)、信噪比 (SNR) 作为指标对图像进行质量评价. 本文首先给出了对房子进行双树复小波分解所获得的各个子带图像, 结果如图 3 所示. 在用本文算法对图像进行滤波时, 为防止图像过于平滑, 扩散阈值  $k$  设置为 0.2. 同时为更好地提取图像的方向纹理特征, 对流强度因子  $\lambda$  设置为 0.1, 阈值  $\alpha$  选取为 0.02. (27) 式的迭代次数为 30, 步长为 0.05. 最后, 通过测试分别与 PM 算法<sup>[4]</sup>、小波扩散算法<sup>[6]</sup>、小波软阈值算法<sup>[12]</sup>、波原子变换算法<sup>[16]</sup> 以及波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup> 进行了性能比较, 并且还测试了本文算法和另外五种算法的平均运行时间. 对于房子图像, PM 算法<sup>[4]</sup>、小波扩散算法<sup>[6]</sup>、小波软阈值算法<sup>[12]</sup>、波原子变换算法<sup>[16]</sup>、波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup>、本文算法的平均运行时间分别为 1.22, 0.96, 0.15, 8.13, 2.07, 1.35 s; 对于指纹图像, 上述算法的平均运行时间分别为 1.33, 1.01, 0.52, 8.42, 2.01, 1.39 s.

表 1 和表 2 分别列出了利用上述六种算法对房子图像和指纹图像滤波后的质量评价结果. 表 1 中, 对房子图像叠加的噪声方差分别为 20 和 30, 滤波前的 PSNR 分别为 22.11 和 18.58 dB; 表 2 中, 对指纹叠加的噪声方差也分别为 20 和 30, 滤波前的 PSNR 分别为 22.13 和 18.71 dB. 图 4 和图 5 分别示出了六种算法对含噪房子图像和指纹图像进行滤波的结果. 图 6 还给出了对流强度因子  $\lambda$  分别取 0.1, 0.2 和 0.3 情况下的信噪比曲线. 从表 1 和表 2 可知, 相比于 PM 算法<sup>[4]</sup>、小波扩散算法<sup>[6]</sup>、小波软阈值算法<sup>[12]</sup>、波原子变换算法<sup>[16]</sup> 而言, 本文提出的算法具有较好的滤波效果, 而与文献 [17] 提出的波原子变换和曲线波变换相结合的算法得到的滤波效果相当.

表 1 六种算法对含噪房子图像滤波后的质量评价结果

噪声方差	20		30	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
PM 算法 <sup>[4]</sup>	26.34	0.6857	27.50	0.6594
小波扩散算法 <sup>[6]</sup>	30.07	0.9322	28.31	0.9215
小波软阈值算法 <sup>[12]</sup>	23.56	0.5857	26.48	0.4978
波原子算法 <sup>[16]</sup>	26.02	0.3326	29.54	0.2399
波原子变换和曲线波变换结合算法 <sup>[17]</sup>	30.65	0.9516	29.98	0.9375
本文算法	30.61	0.9428	29.96	0.9117

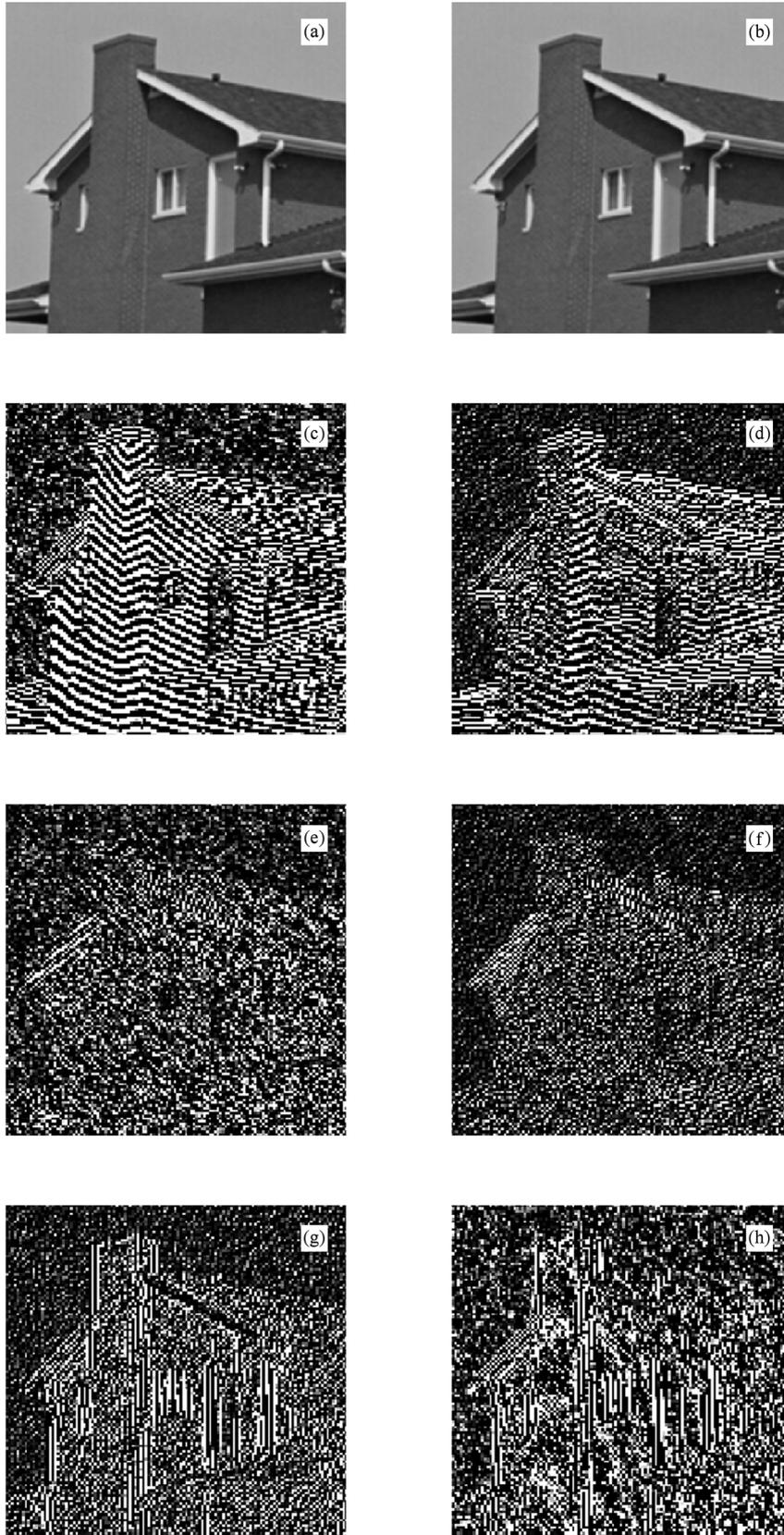


图3 房子图像经一层双树复小波分解后的各个子带图像 (a) 低频子带实部, (b) 低频子带虚部, (c)  $75^\circ$  方向子带, (d)  $-75^\circ$  方向子带, (e)  $45^\circ$  方向子带, (f)  $-45^\circ$  方向子带, (g)  $15^\circ$  方向子带, (h)  $-15^\circ$  方向子带

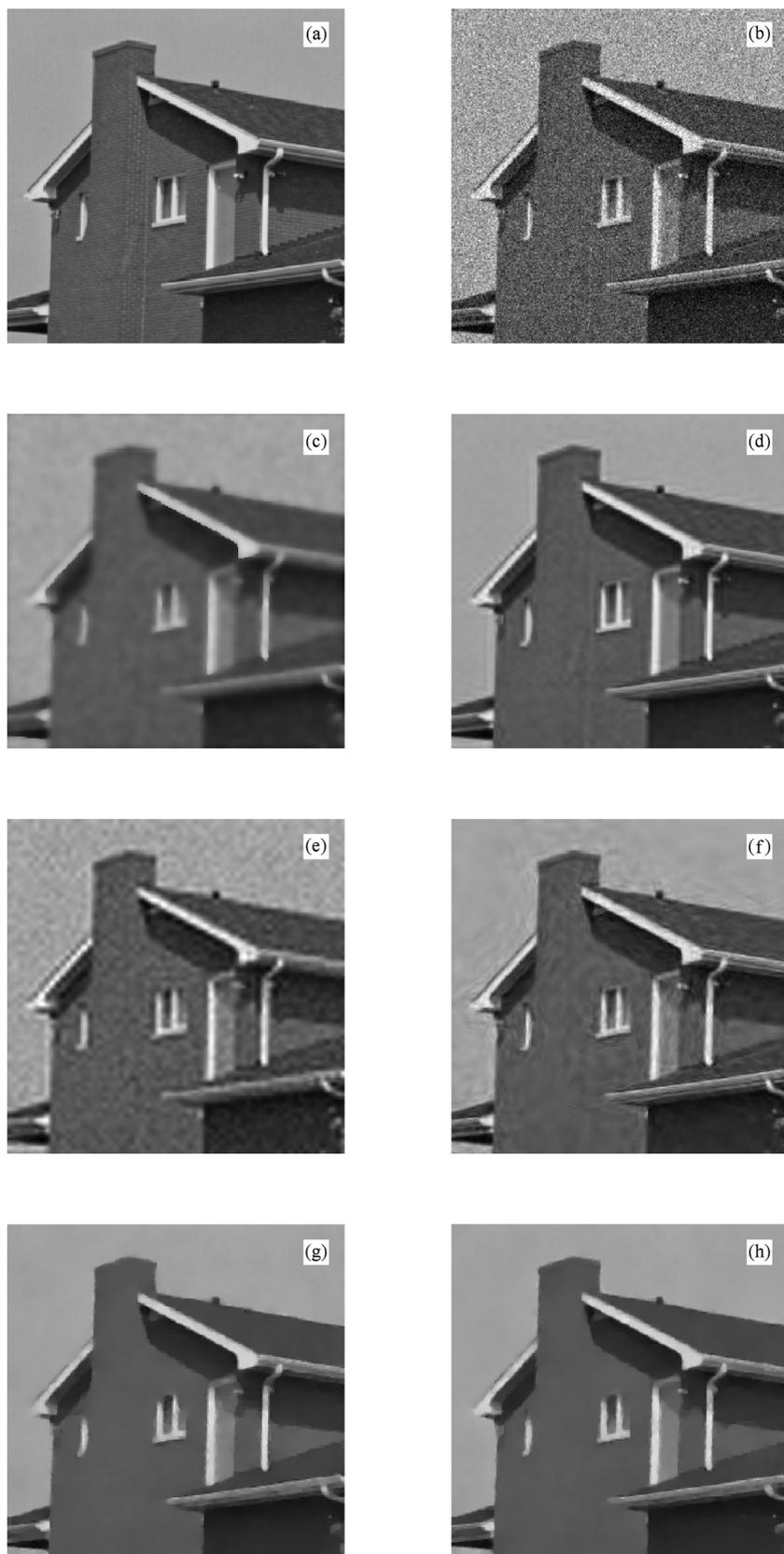


图4 房子图像采用六种算法滤波后的仿真结果 (a)原始图像, (b)含噪图像, (c) PM 算法<sup>[4]</sup>所得结果, (d)小波扩散算法<sup>[6]</sup>所得结果, (e)小波软阈值算法<sup>[12]</sup>所得结果, (f)波原子变换算法<sup>[16]</sup>所得结果, (g)波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup>所得结果, (h)本文算法所得结果

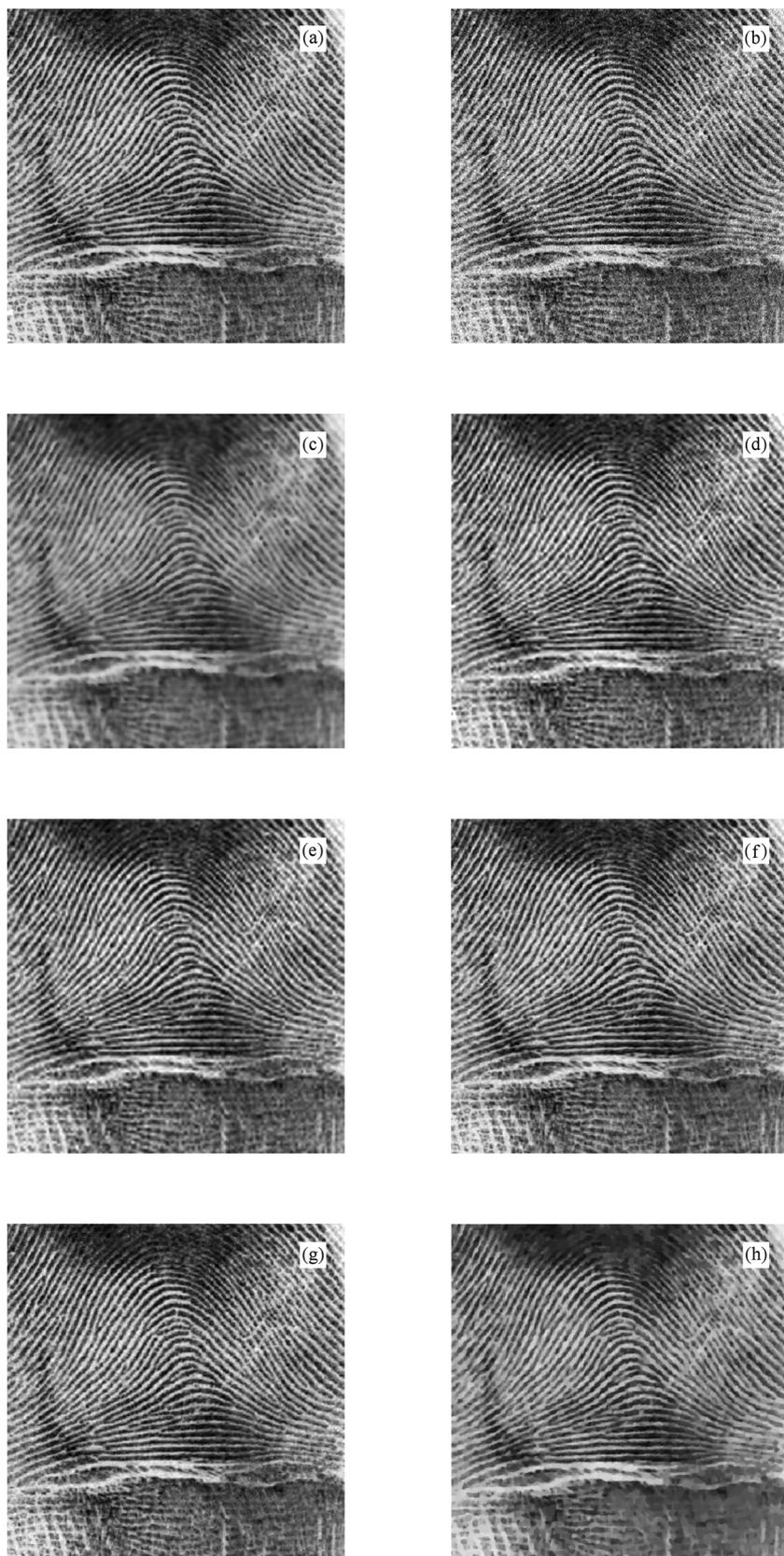


图5 指纹图像采用六种算法滤波后的仿真结果 (a)原始图像, (b)含噪图像, (c) PM 算法<sup>[4]</sup>所得结果, (d)小波扩散算法<sup>[6]</sup>所得结果, (e)小波软阈值算法<sup>[12]</sup>所得结果, (f)波原子变换算法<sup>[16]</sup>所得结果, (g)波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup>所得结果, (h)本文算法所得结果

表2 六种算法对含噪指纹图像滤波后的质量评价结果

噪声方差	20		30	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
图像质量指标				
PM 算法 <sup>[4]</sup>	25.15	0.7534	27.48	0.7823
小波扩散算法 <sup>[6]</sup>	29.87	0.9389	28.15	0.9277
小波软阈值算法 <sup>[12]</sup>	23.46	0.9243	22.18	0.9105
波原子算法 <sup>[16]</sup>	26.05	0.9555	28.09	0.9076
波原子变换和曲线波变换结合算法 <sup>[17]</sup>	30.16	0.9730	30.08	0.9510
本文算法	30.13	0.9725	30.05	0.9599

从图4和图5可以看出,本文提出的算法所得结果优于PM算法<sup>[4]</sup>、小波扩散算法<sup>[6]</sup>、小波软阈值算法<sup>[12]</sup>和波原子变换算法<sup>[16]</sup>所得结果,而与文献<sup>[17]</sup>提出的波原子变换和曲线波变换相结合的算法所得结果相当.主要原因归纳如下:(1)PM算法<sup>[4]</sup>由于其扩散系数仅依赖于图像的梯度,对方差较大的噪声较为敏感,因此容易造成图像边缘在一定程度上的模糊.(2)小波扩散算法<sup>[6]</sup>采用小波变换模代替梯度模,具有较好的滤波效果.但由于小波变换模只考虑了水平方向和垂直方向上的信息,而弱化了其他方向的信息,所以滤波后的图像存在一定的阶梯效应.(3)小波软阈值算法<sup>[12]</sup>在对图像滤波时,如果选取的阈值过大,将会导致图像中的较大系数被误认为是噪声而被去除,容易造成图像细节信息的丢失.滤波后的图像将存在较严重的阶梯效应.(4)波原子变换算法<sup>[16]</sup>的滤波效果较好,但其图像背景在一定程度上也受到了噪声较大的影响.(5)采用波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup>具有较好的滤波效果,其原因在于曲线波变换具有较好的边缘刻画能力以及波原子变换的纹理稀疏表示特性.本文算法在滤波效果方面与波原子变换和曲线波变换相结合的算法<sup>[17]</sup>效果相当.这是由于本文算法利用了双树复小波变换较好的方向选择性和近似平移不变性等特点,采用了双树复小波变换来计算扩散系数,因此图像在滤波过程中多个方向上的细节信息得以保留,并通过结合波原子变换

增强了图像的方向纹理特征.

此外,为进一步检测所提算法的性能,以房子图像作为研究对象,并在噪声方差为30的条件下采用信噪比对滤波效果进行了性能分析.从图6可以看出:当 $\lambda = 0.1$ 时,滤波后的图像具有较高的信噪比.当迭代次数超过10时,信噪比的值趋于稳定.其主要原因是对流强度因子的合理选取可以较好地平衡对流-扩散模型中的对流和扩散两个过程.

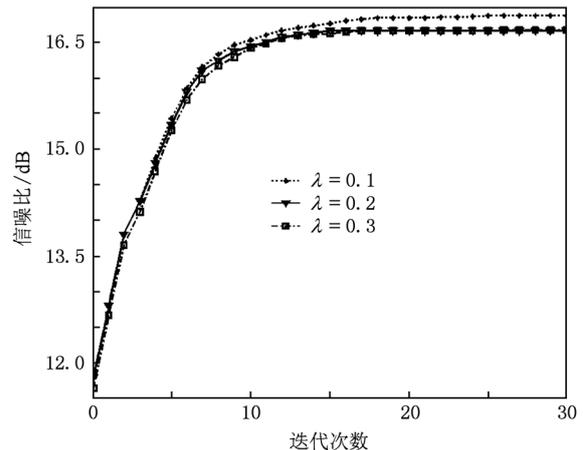


图6 信噪比与迭代次数的关系

## 6. 结 论

本文以各向异性扩散模型为基础,结合波原子变换对图像较好的稀疏表示能力和双树复小波变换的近似平移不变性、良好的方向选择性等特点提出了一种图像滤波算法.该算法给出了基于双树复小波变换模的扩散系数计算方法,并给予了分析.研究表明,该算法不管是对边缘、轮廓等结构突出的图像(如房子图像)还是对具有丰富纹理信息的图像(如指纹图像)的滤波效果都有较大的改善,在对含噪图像滤波的同时还较好地保持了图像的边缘和纹理等细节信息.

[1] Kong L H, Xun Z D 2009 *Acta Math. Sci. A* **29** 1771 (in Chinese) [孔令海、郇中丹 2009 数学物理学报 **A 29** 1771]  
 [2] Kong X L, Li Y T, Yuan X H, Yu Q Z, Zheng Z Y, Liang W X, Wang Z H, Wei Z Y, Zhang J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2364 (in Chinese) [孔祥龙、李玉同、远晓辉、于全芝、郑志远、梁文锡、王兆华、魏志义、张杰 2006 物理学报 **55** 2364]

[3] Luo L, Wang L, Cheng W D, Shen M Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6708 (in Chinese) [罗林、王黎、程卫东、沈忙作 2006 物理学报 **55** 6708]  
 [4] Perona P, Malik J 1990 *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **12** 629  
 [5] Catté F, Lions P L, Morel J M, Coll T 1992 *SIAM J. Numer.*

- Anal.* **29** 182
- [6] Liu F 2006 *Sci. China F* **49** 494
- [7] Fu M J, Zhuang J J, Hou F Z, Ning X B, Zhan Q B, Shao Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4343 (in Chinese) [符懋敬、庄建军、侯凤贞、宁新宝、展庆波、邵毅 2010 物理学报 **59** 4343]
- [8] Chen S G, Ji S Y, Liu W S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2882 (in Chinese) [陈世国、吉世印、刘万松 2008 物理学报 **57** 2882]
- [9] Wang K, Zhang H, Chang S J, Shen J Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3613 (in Chinese) [王凯、张会、常胜江、申金媛 2007 物理学报 **56** 3613]
- [10] Ren L, Chen X G, Liu C T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2035 (in Chinese) [任磊、陈祥光、刘春涛 2009 物理学报 **58** 2035]
- [11] Zhao W S, He Y G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 843 (in Chinese) [赵文山、何怡刚 2009 物理学报 **58** 843]
- [12] Donoho D L 1995 *IEEE Trans. Inform. Theory* **41** 613
- [13] Selesnick I W, Baraniuk R G, Kingsbury N G 2005 *IEEE Signal Proc. Mag.* **22** 123
- [14] Do M N, Vetterli M 2005 *IEEE Trans. Image Proces.* **14** 2091
- [15] Guo K, Labate D 2007 *SIAM J Math. Anal.* **39** 298
- [16] Demanet L, Ying L X 2007 *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **23** 368
- [17] Plonka G, Ma J W 2008 *IEEE Trans. Image. Proces.* **17** 1283
- [18] Jiao L C, Hou B, Wang S, Liu F 2008 *Image Multiscale Analysis: Theory and Applications* (Xi'an: Xi'dian University Press) p36 (in Chinese) [焦李成、侯彪、王爽、刘芳 2008 图像多尺度几何分析理论与应用 (西安:西安电子科技大学出版社) 第36页]
- [19] Voci F, Eiho S, Sugimoto N, Sekiguchi H 2004 *IEEE Signal Proc. Mag.* **21** 39
- [20] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, Simoncelli E P 2004 *IEEE Trans. Image Proces.* **13** 600

## Image diffusion filtering based on dual tree complex wavelet and wave atoms \*

Liu Jin-Hua<sup>†</sup> She Kun

(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

(Received 6 December 2010; revised manuscript received 12 August 2011)

### Abstract

The nonlinear diffusion of image filtering is from the idea of heat equations. Its key point is to choose a proper diffusion coefficient and control the diffusion direction. In the previous models, the diffusivity depends on the gradients of images, thus it is easily affected by noises. Furthermore, many fine structures such as textures are prone to being taken for noise and then will be removed. In order to overcome these shortcomings, first, in this paper we introduce a novel computational technique for diffusivity by using the dual tree complex wavelet transform. Second, we develop a nonlinear diffusion model for image filtering. Finally, an image diffusion filtering method based on the dual tree complex wavelet transform and wave atoms thresholding is presented, and also compared with the previous methods. Experimental results show that many features of image such as edges and textures can be preserved well after filtering via the proposed algorithm.

**Keywords:** image diffusion filtering, nonlinear-diffusion, wave atoms, dual tree complex wavelet transform

**PACS:** 42.30.Va

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60873185, 60903074) and the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AA04A107).

<sup>†</sup> E-mail: liujinhua\_uestc@126.com