

小瓣数贝塞尔声束的二次谐波^{*}

戴玉蓉¹⁾ 丁德胜^{2)†}

1) (东南大学物理系,南京 210096)

2) (东南大学电子科学与工程学院,南京 210096)

(2011年8月23日收到;2011年11月3日收到修改稿)

采用高斯展开法,研究了具有三个瓣的小瓣数贝塞尔声束的基波和二次谐波的传播性质.根据准线性近似下 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程的积分形式解,分析了媒质的声吸收(声衰减)对波束形状的影响.结果表明:吸收参量对二次谐波径向分布有很大的影响.当瓣数较少时,实际的有限孔径贝塞尔声束二次谐波仍然具有理想无限大孔径贝塞尔声束的主要特征,在近场无衍射区,径向几乎无衍射.

关键词: 二次谐波, 贝塞尔声束, 声吸收, 有限孔径声束

PACS: 43.25.Cb, 43.25.Ed, 43.25.Jh

1. 引言

由于波束的无衍射特性,贝塞尔束(Bessel beams)以及一些广义无衍射束(如X形波束)的研究,在光学和声学等领域中一直备受关注^[1-21].具有无限大孔径的贝塞尔束能无发散地传播到无限远处,传播过程中束宽和形状保持不变.这种理想的贝塞尔束在实验上不可能实现,可实现的贝塞尔束的孔径总是有限的.但数值模拟和实验表明,有限孔径的波束仍然具有很大的场深,且在场深之内扩散很小,几乎无衍射,波束保持近似贝塞尔分布.这种非理想状态的有限孔径“无衍射束”被称为有限衍射束(limited diffraction beams)^[10],它们在超声成像和非线性光学中具有潜在的应用价值,因此其非线性传播性质引起了人们的关注^[4,5,12-21].但是在已有的研究工作中,多数理论分析忽略了贝塞尔束孔径的有限性以及媒质的吸收等因素,这样过度简化的假设很难与实际情况相符. Arlt 等^[5]指出,若不考虑这些实际因素,理论推导会与实验结果不符,甚至可能得出与实验结果完全相反的结论.文献[20]研究了实际情形下的贝塞尔基波和二次谐波波束的性质,考虑了孔径的有限性(即声源上包含的贝塞尔束的波瓣数或旁瓣数有限)的影响.该

研究表明:对于实际的有限孔径贝塞尔束,只要声源包含许多个贝塞尔波束的旁瓣,二次谐波就仍然具有无限大孔径这一理想情形下的主要特征,但媒质的声吸收对贝塞尔二次谐波波束径向分布具有一定的影响.

在声学应用领域(如制作贝塞尔超声换能器),由于贝塞尔声束的实现工艺要比在光学系统中实现贝塞尔光束困难得多^[2-4,6,9-12],实际声源(或孔径内)所包含的瓣数一般不超过10个^[6,9],这会限制贝塞尔超声换能器在声学中的广泛应用.本文主要研究旁瓣数较少时,贝塞尔声束在衰减媒质中二次谐波的传播性质以及衰减对二次谐波径向分布的影响.为避免数值积分的繁复,根据 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) 非线性波动方程准线性近似下的积分解,应用高斯展开法对贝塞尔声束的基波和二次谐波的分布进行了数值计算^[22-24],并对所得结果加以分析.

2. 基本场积分和高斯展开法

这里给出 KZK 方程线性和准线性近似下无量纲形式的积分解,具体过程可参见文献[22-24].假定一轴对称声源以角频率 ω 作简谐振动,声束沿 z 轴方向传播,特征半径为 a . 在准线性近似下,基波

* 国家自然科学基金(批准号:11074038,10674024)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: dds@seu.edu.cn

声压 p_1 的线性化解可表示为^[22-24]

$$p_1(\xi, \eta; \tau) = \operatorname{Re}[p_0 \exp(-i\tau) \bar{q}_1(\xi, \eta)]. \quad (1)$$

这里 $\xi = r/a$ 和 $\eta = z/z_0$ 分别为径向和轴向无量纲坐标, 其中 r 和 z 分别表示相应的径向和轴向坐标, $z_0 = ka^2/2$ 为瑞利距离, $k = \omega/c_0$ 为波数, c_0 为小信号声速, 对于实际的有限尺寸超声换能器, a 可以取作半径. 延迟时间 $\tau = \omega(t - z/c_0)$, 参考声压 $p_0 = \rho_0 u_0 c_0$, 其中 t 为时间, ρ_0 为媒质的静态密度, u_0 为声源表面法向振速的特征值. (1) 式中无量纲的基波复声压幅值

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(\xi, \eta) = & \frac{2}{i\eta} \exp(-\bar{\alpha}_1 \eta) \\ & \times \int_0^\infty \exp\left(i \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\eta}\right) \\ & \times J_0\left(\frac{2\xi\xi'}{\eta}\right) \bar{q}_1(\xi') \xi' d\xi', \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\bar{\alpha}_1 = Z_0 \alpha_1$ 为频率 $\omega_1 = \omega$ 时的声吸收系数, J_0 为零阶第一类贝塞尔函数, $\bar{q}_1(\xi')$ 为声源平面 $\eta' = 0$ 上的源函数.

二次谐波声压 p_2 分布可表示为

$$\begin{aligned} p_2(\xi, \eta; \tau) = & \operatorname{Re} \left\{ -2p_0 \frac{\beta k^2 a^2}{\rho c_0^2} \right. \\ & \left. \times \exp(-i2\tau) \bar{q}_2(\xi, \eta) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

这里 β 为声非线性系数, $\bar{q}_2(\xi, \eta)$ 为无量纲的二次谐波复声压幅值.

$$\begin{aligned} \bar{q}_2(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \exp(-\bar{\alpha}_2 \eta) \int_{\eta'=0}^\eta \int_{\xi'=0}^\infty \exp(\bar{\alpha}_2 \eta') \frac{\xi'}{\eta - \eta'} \\ & \times \exp\left(i2 \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\eta - \eta'}\right) J_0\left(\frac{4\xi\xi'}{\eta - \eta'}\right) \\ & \times \bar{q}_1^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\bar{\alpha}_2 = Z_0 \alpha_2$ 为频率 $\omega_2 = 2\omega$ 时的声吸收系数.

多数情况下, 为求得基波和二次谐波分布, 需要对(2)和(4)式进行数值积分, 而像(4)式这种强烈振荡的三重积分, 数值计算较为困难. 为此, 本文采用高斯展开法^[20, 25-34] 简化积分计算.

3. 贝塞尔声束基波及二次谐波的场分布

3.1. 基波场分布

实际的贝塞尔换能器声源的基波分布可近似描述为

$$\bar{q}_1(r) = \begin{cases} J_0(k_r r) & (0 \leq r \leq a), \\ 0 & (r > a), \end{cases} \quad (5)$$

式中 a 为换能器半径, k_r 为径向或横向波数, 决定贝塞尔束主瓣宽度. 类似地, 令 $\xi = r/a$, 可将(5)式表示成如下无量纲形式:

$$\bar{q}_1(\xi) = \begin{cases} J_0(\kappa\xi) & (0 \leq \xi \leq 1), \\ 0 & (\xi > 1), \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\kappa = k_r a$ 表示无量纲径向波数, k_r/π 近似等于孔径内贝塞尔束的瓣数.

对于一有限孔径贝塞尔束, 决定其传播性质的特征参量有波束或源的半径 a (或无量纲半径 ka)、径向波数 k_r (或无量纲径向波数 κ) 和场深. Durnin^[1] 在几何光学近似条件下导出了场深即最大无衍射距离的表达式为

$$z_{\max} = a \frac{k}{k_r} = a \frac{2\pi}{k_r \lambda} = \frac{2\pi a^2}{\kappa \lambda}, \quad (7)$$

或以无量纲的形式表示为

$$\eta_{\max} = 2/\kappa. \quad (8)$$

在最大无衍射距离的最初表达形式中, $2\pi/(k_r \lambda)$ 是以 $[(2\pi/(k_r \lambda))^2 - 1]^{1/2}$ 来代替的. 对于非理想状态的贝塞尔光束或声束, $2\pi/(k_r \lambda)$ 总是远大于 1, 因此, 通常情况下以(7)式所表示的 z_{\max} 作为贝塞尔束的最大无衍射距离. 当传播距离 $\eta \leq \eta_{\max}$ 时, 有限孔径贝塞尔束具有理想的无限大孔径贝塞尔束的主要特点, 此时几乎无衍射现象发生; 当传播距离 $\eta > \eta_{\max}$ 时, 波束衍射效应逐渐明显. 但是, 上述情况仅对孔径内包含许多个贝塞尔束波瓣时成立^[1-5, 9, 20]. 下面分析瓣数较少时有限孔径贝塞尔换能器声场的性质.

图 1 给出了一个三瓣(一个主瓣和两个旁瓣)贝塞尔声束的基波声场分布, 计算时采用了文献[25, 26]中的展开系数, 为了与高斯展开法的精度进行对比, 图中同时给出了(2)式的数值积分结果(用实线表示). 对于三瓣贝塞尔束, 当 $\eta \leq 0.7\eta_{\max}$ 时径向分布近似为贝塞尔函数, 主瓣束宽及零声压(声压最小值)位置几乎不变, 只在孔径边缘($\xi = 1$)附近有较明显的衍射效应, 如图 1(b), (c) 所示. 当 $\eta > 0.7\eta_{\max}$ 时, 声场分布逐渐失去理想贝塞尔束无衍射的主要特征, 表现出较明显的衍射效应, 波束展宽, 声压幅值下降, 如图 1(d) 所示. 与图 1(b), (c) 相比可以看出, 图 1(d) 中主瓣较宽, 声压幅值的最小值也不再接近于零.

以上数值计算结果表明: 对于旁瓣数目较少的

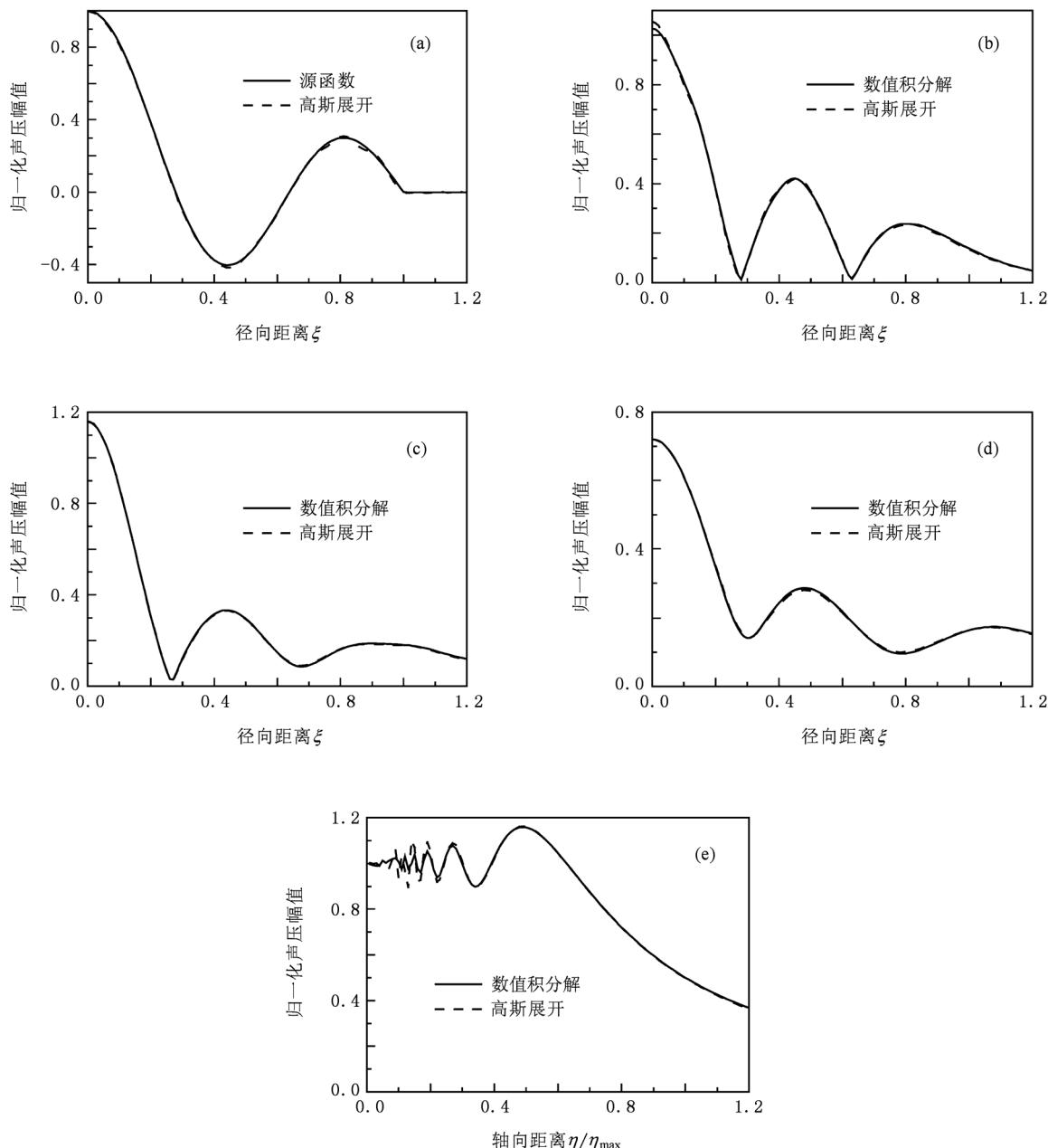


图1 采用高斯展开法计算得到的三瓣贝塞尔声束基波的径向归一化声压幅值分布 $\kappa = 8.65$, $\eta_{\max} = 0.23$. (a) $\eta = 0$ 时(6)式与高斯展开法的结果比较,(b) $\eta = 0.2\eta_{\max}$, (c) $\eta = 0.5\eta_{\max}$, (d) $\eta = 0.8\eta_{\max}$, (e) 在声轴上

贝塞尔声束,其实际的最大无衍射距离没有(7)式所定义的 z_{\max} 长.这是因为(7)式是在几何光学近似下导出的,未考虑波束在孔径边缘的衍射效应.为此,我们定义一修正的最大无衍射距离

$$\eta'_{\max} = \left(1 - \frac{\pi}{\kappa}\right)\eta_{\max}. \quad (9)$$

显然,当 $\eta < \eta'_{\max}$ 时,有限孔径的贝塞尔声束几乎无衍射.当 $\eta'_{\max} < \eta < (1 + \pi/\kappa)\eta_{\max}$ 时,径向波束很快发散,偏离贝塞尔分布,同时声压幅值很快减小,

如图1(e)所示.当 $\eta > (1 + \pi/\kappa)\eta_{\max}$ 时,有限孔径贝塞尔声束不再具有贝塞尔分布的形状.可将 $\pi/\kappa \approx 1/n$ (n 为孔径上的瓣数)用作衡量波束的衍射程度,瓣数越多,比值越小,衍射越弱.极端情况($\kappa \leq 2.405$)下, $n = 1$, 贝塞尔声束仅包含一个主瓣,而无旁瓣,完全不再具有贝塞尔声束的特征,声场的分布与简单支撑或锁定活塞换能器辐射场的分布相类似.

以上分析未考虑媒质声吸收的影响.显然,吸

收仅影响声场的轴向分布(轴向呈指数衰减),而不影响其径向分布。

3.2. 二次谐波场分布

在进一步分析小瓣数贝塞尔声束二次谐波性质之前,先总结一下理想的无限大孔径情形下大瓣数贝塞尔声束二次谐波的主要性质^[14-17]。理想情形下(孔径无限大、媒质衰减可忽略),在近场无衍射区域

$$0 \leq \kappa^2 \eta / 2 \leq \pi / 2, \quad (10)$$

二次谐波声场分布可表示为

$$\bar{q}_2(\xi, \eta) = \frac{i\eta}{8} J_0^2(\kappa\xi) \exp\left(-\frac{i\kappa^2\eta}{2}\right). \quad (11)$$

此时,径向分布近似为 $J_0^2(\kappa\xi)$, 与传播距离无关。在大多数情况下^[14,16], 二次谐波主瓣束宽为基波的 $1/\sqrt{2}$, 第一旁瓣幅值比主瓣低 -15.8 dB^[21], 在整个远场无衍射区有

$$\kappa^2 \eta / 2 > 2\pi, \quad (12)$$

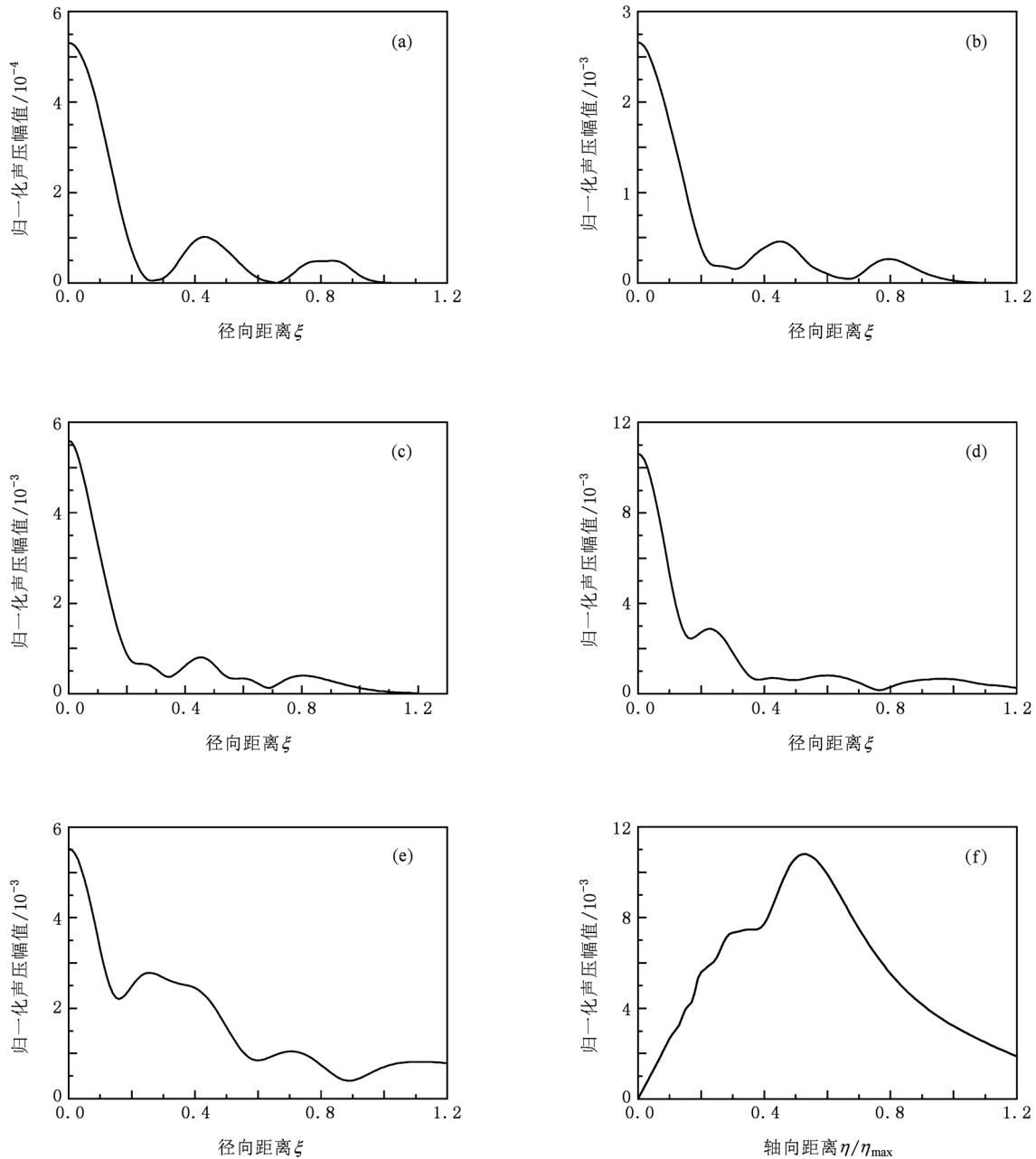


图2 采用高斯展开法计算得到的三瓣贝塞尔声束二次谐波的径向归一化声压幅值分布 (a) $\eta = 0.02\eta_{\max}$, (b) $\eta = 0.1\eta_{\max}$, (c) $\eta = 0.2\eta_{\max}$, (d) $\eta = 0.5\eta_{\max}$, (e) $\eta = 0.8\eta_{\max}$, (f) 在声轴上

二次谐波声场分布可以近似地表示为

$$\bar{q}_2(\xi, \eta) = -\frac{1-i}{4\kappa\sqrt{\pi}} J_0(2\kappa\xi) \eta^{1/2} \times \exp\left(-\frac{i\kappa^2\eta}{2}\right), \quad (13)$$

径向分布为 $J_0(2\kappa\xi)$. 与上述情况不同, 贝塞尔声束二次谐波的主瓣束宽为基波束宽的一半^[14-17], 第一旁瓣幅度比主瓣低-7.9 dB^[21], 在近场与远场之间的过渡区

$$\pi/2 \leq \kappa^2\eta/2 \leq 2\pi, \quad (14)$$

二次谐波径向分布略微偏离 $J_0^2(\kappa\xi)$ 和 $J_0(2\kappa\xi)$, 主瓣束宽随着传播距离增大, 逐渐从基波束宽的 $1/\sqrt{2}$ 变为 $1/2$.

对于包含多个旁瓣的贝塞尔声束(如一个主瓣和九个旁瓣), 大瓣数的贝塞尔二次谐波与理想情形下有相同的性质^[20], 具有近场衍射区、过渡区及远场衍射区. 而有限孔径情形下的远场衍射区为 $2\pi \leq \kappa^2\eta/2 \leq \kappa^2\eta_{\max}/2 = \kappa$, 位于最大无衍射区域 η_{\max} 之内, 不像理想条件下可延伸到无限远. 对于小瓣数的贝塞尔声束二次谐波, 最大无衍射距离不一定能满足(12)式, 其性质与无限大孔径贝塞尔声束有所区别.

图2给出了三瓣贝塞尔声束二次谐波的声场分布, 图2(a)–(e)所对应的 $\kappa^2\eta/2$ 分别为 0.173, 0.865, 1.73(接近 $\pi/2 = 1.57$), 4.33, 6.92(接近 $2\pi = 6.28$). 对于瓣数较少的贝塞尔声束二次谐波, 当 $0 \leq \kappa^2\eta/2 \leq \pi/2$ 即处于近场无衍射区时, 径向分布近似为 $J_0^2(\kappa\xi)$, 如图2(a)–(c)所示. 当 $\kappa^2\eta/2 \geq \pi/2$ 即处于过渡区时, 明显偏离 $J_0^2(\kappa\xi)$ 和 $J_0(2\kappa\xi)$ 分布, 不存在远场无衍射区, 如图2(d)和(e)所示. 若以修正的最大无衍射距离计算, $\kappa^2\eta'_{\max}/2 \approx 5.7$ 不满足(12)式, 因此不存在远场无衍射区.

4. 声吸收对二次谐波分布的影响

根据文献[18], 引入吸收参量

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_2 - 2\bar{\alpha}_1, \quad (15)$$

并令吸收长度 $l_{\alpha} = 1/\bar{\alpha}$. 当 $\bar{\alpha} > 0$ 时, 流体或媒质的吸收随频率增大而增大, 这对应于热黏滞流体和生物软组织等情况^[18].

为讨论声吸收对二次谐波径向分布的影响, 以 $\bar{\alpha}\eta_{\max} = (\bar{\alpha}_2 - 2\bar{\alpha}_1)z_{\max}$ 表示吸收长度与最大无衍射长度之间的相互关系. 例如, $\bar{\alpha}\eta_{\max} \approx 1$ 意味着吸收长度与最大无衍射长度具有相同的量级. 当 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$ (即 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$) 时, $\bar{\alpha}\eta_{\max} = 0$, 对应于媒质无吸收的理想情形. 当 $\bar{\alpha}_1 \neq 0$, $\bar{\alpha}_2 \neq 0$ 时, 对应于媒质吸收的情形. 但当这两个吸收系数与声波的频率呈线性关系 ($\bar{\alpha}_2 = 2\bar{\alpha}_1$) 时, 也有 $\bar{\alpha}\eta_{\max} = 0$. 这表明仅有吸收参量 $\bar{\alpha}\eta_{\max}$, 不足以表征吸收媒质中二次谐波的传播性质, 至少还需要引入一个参量.

图3为 $\bar{\alpha}\eta_{\max}$ 取不同值(即吸收长度不同)时, 三瓣贝塞尔声束二次谐波在过渡区内的径向归一化声压幅值分布. 从图3(b)可以看出, 当吸收长度 $l_{\alpha} = \eta_{\max}$ 时, $\bar{\alpha}\eta_{\max} = \eta_{\max}/l_{\alpha} = 1$, 声吸收对二次谐波径向形状无明显影响, 径向波束形状与无衰减情形下一样. 事实上, 只要 l_{α} 与 η_{\max} 具有相同数量级, 二次谐波的径向归一化声压幅值也类似于图3(b)所示的分布. 从图3(c)可以看出, $\bar{\alpha}\eta_{\max} = \eta_{\max}/l_{\alpha} = 5$, $\kappa^2l_{\alpha}/2 = 1.73$ 接近于近场无衍射距离的临界值 1.57, 二次谐波径向形状接近于无损耗情形下近无衍射区的分布. 从图3(d), (e)可以看出, 当吸收长度很小(如 $\bar{\alpha}\eta_{\max} = \eta_{\max}/l_{\alpha} = 10-20$) 时, 位于近场无衍射区, 波束分布可近似为 $J_0^2(\kappa\xi)$. 这说明, 由于声吸收的影响, 近场无衍射区几乎延伸到贝塞尔束的整个场深范围内 ($\eta \approx \eta_{\max}$).

从(15)式可知, $\bar{\alpha}\eta_{\max}$ 值较小仅意味着 $\bar{\alpha}_2 \approx 2\bar{\alpha}_1$, 而并非指 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$ 两者的值都小. 当 $\bar{\alpha}_1$ 或 $\bar{\alpha}_2$ 较大而 $\bar{\alpha}\eta_{\max}$ 较小时, 在近场无衍射和过渡区径向分布与无声吸收时的情况几乎相同, 不受声吸收的影响. 但是当吸收导致的衰减明显时, 在过渡区域内二次谐波声压幅值远低于近场无衍射区的幅值, 即二次谐波声场的有效深度远小于由(7)式或(9)式所定义的场深. 因此, 为了更好地表征实际的小瓣数贝塞尔声束二次谐波的特性, 需要引入以下三个特征参量: 最大无衍射距离 η_{\max} (或 η'_{\max})、吸收参量 $\bar{\alpha}$ 以及基波的吸收系数 $\bar{\alpha}_1$ (或二次谐波的吸收系数 $\bar{\alpha}_2$).

根据上述计算与分析, 可给出衰减媒质中小瓣数贝塞尔声束二次谐波的有效场深. 当吸收系数 $\bar{\alpha}_1$

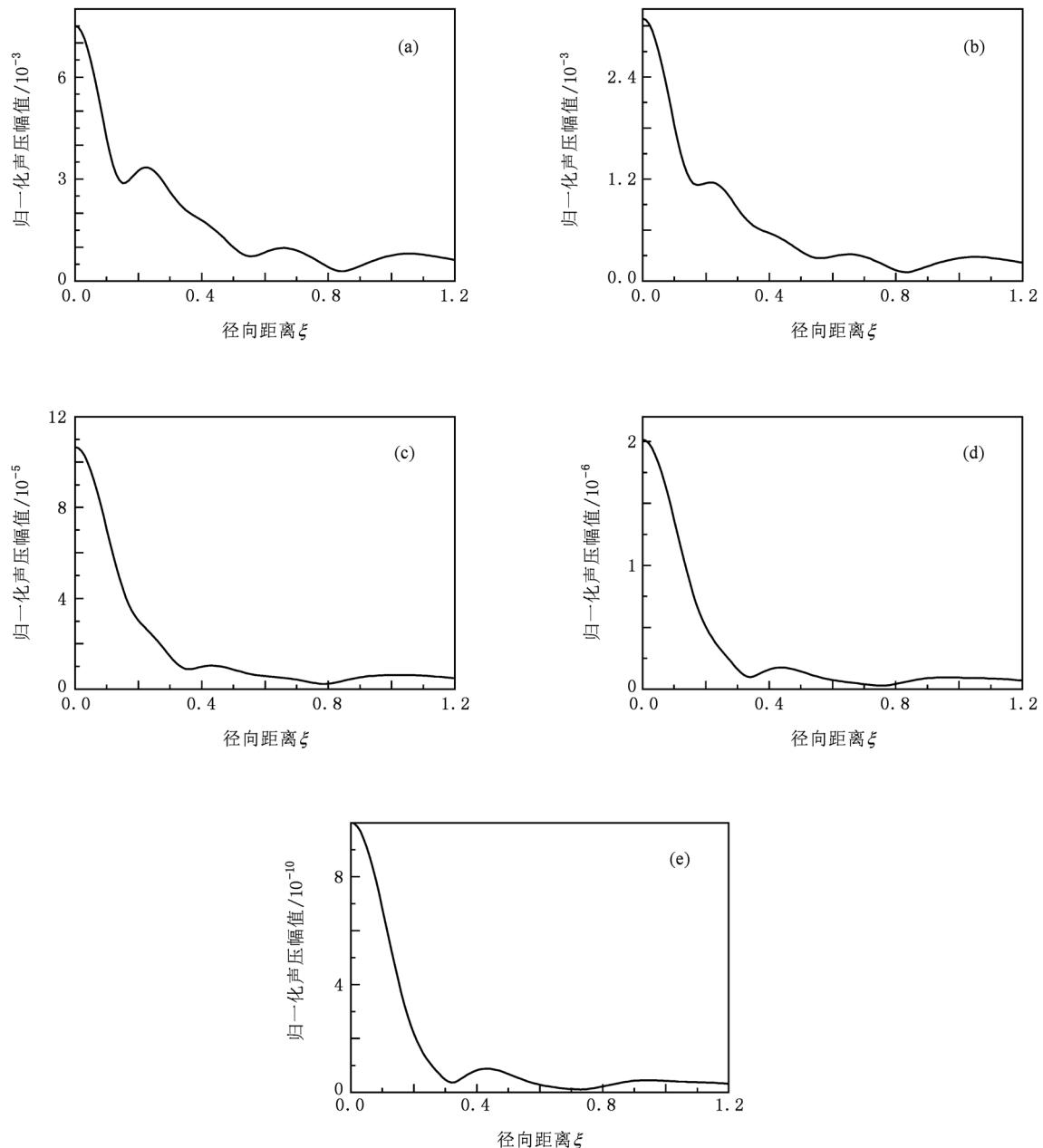


图3 不同吸收长度下三瓣贝塞尔声束二次谐波的径向归一化声压幅值分布 $\eta/\eta_{\max} = 0.7$, 位于过渡区. (a) 无吸收, (b) $l_{\alpha} = \eta_{\max}$, (c) $l_{\alpha} = 0.2\eta_{\max}$, (d) $l_{\alpha} = 0.1\eta_{\max}$, (e) $l_{\alpha} = 0.05\eta_{\max}$

较大时, 吸收长度 $l_{\alpha_1} \approx \pi/\kappa^2$, 位于近场无衍射区域, 二次谐波的场深可近似为吸收长度 l_{α_1} , 与吸收参量 $\bar{\alpha}$ 几乎无关, 此时径向分布近似为 $J_0^2(\kappa\xi)$. 当吸收系数 $\bar{\alpha}_1$ 所对应的吸收长度大致位于过渡区, 即 $l_{\alpha_1} \leq \eta'_{\max}$ 或 $l_{\alpha_1} \leq \eta_{\max}$ 时, 对于小瓣数的贝塞尔声束, η_{\max} 或 η'_{\max} 与 $4\pi/\kappa^2$ 同量级, 不存在远场衍射区, 吸收长度 l_{α_1} 仍可以视为贝塞尔声束二次谐波的场深. 在该场深内, 除了 $\bar{\alpha}$ 值很小 (即 $l_{\alpha} \gg \eta'_{\max}$ 或

$l_{\alpha} \gg \eta_{\max}$) 时, 径向分布仍然近似为 $J_0^2(\kappa\xi)$. 对于 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}$ 值更小的情形 (极端情形为 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha} = 0$), 可直接规定二次谐波的场深就是无衰减情形下的最大无衍射距离 η'_{\max} 或 η_{\max} .

5. 结 论

本文主要研究了小瓣数贝塞尔声束的基波和

二次谐波的传播性质. 数值计算与分析表明, 在修正的贝塞尔声束的最大无衍射范围内, 二次谐波分量仍然具有无限大孔径情形下的主要特征, 满足近场无衍射条件, 但不存在远场无衍射区.

在此基础上分析了声吸收对二次谐波径向分布的影响. 尽管本文只对零阶贝塞尔声束进行了分析, 但得到的主要结果可以推广到高阶贝塞尔声束的情形.

- [1] Durnin J 1987 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 651
- [2] Durnin J, Miceli J J, Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499
- [3] Vasara A, Turunen J, Friberg A T 1989 *J. Opt. Soc. Am. A* **6** 1748
- [4] Wulle T, Herminghaus S 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1401
- [5] Arlt J, Dholakia K, Allen L, Padgett M J 1999 *Phys. Rev. E* **60** 2438
- [6] Hsu D K, Margetan F J, Thompson D O 1989 *Appl. Phys. Lett.* **55** 2066
- [7] Compell J A, Soloway S 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **88** 2667
- [8] Stepanishen P R, Sun J 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 3308
- [9] Lu J Y, Greenleaf J F 1991 *Ultrasound Med. Biol.* **17** 265
- [10] Lu J Y 1997 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* **44** 839
- [11] Lu J Y 1998 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* **45** 84
- [12] Ding D S, Lu Z H 1996 *Appl. Phys. Lett.* **71** 723
- [13] Synnevag J, Holm S 1998 *IEEE Ultrason. Symp.* **2** 1885
- [14] Ding D S, Liu X J 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **104** 2645
- [15] Ding D S, Wang S J, Wang Y J 1999 *J. Appl. Phys.* **86** 1716
- [16] Ding D S, Lu J Y 2000 *Phys. Rev. E* **61** 2038
- [17] Ding D S, Lu J Y 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 1212
- [18] Cunningham K B, Hamilton M F 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **108** 519
- [19] Ding D S, Xu J Y, Wang Y J 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 689
- [20] Huang J H, Ding D S, Hsu Y S 2009 *J. Sound Vib.* **328** 148
- [21] Holm S, Prieur F 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **128** 1015
- [22] Aanonsen S I, Barkve T, Tjotta J N, Tjotta S 1984 *J. Acoust. Soc. Am.* **75** 749
- [23] Hamilton M F, Tjotta J N, Tjotta S 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **78** 202
- [24] Hamilton M F 1998 *Sound Beams in Nonlinear Acoustics* (Boston: Academic) Chap 8
- [25] Wen J J, Breazeale M A 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1752
- [26] Huang D, Breazeale M A 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **106** 1771
- [27] Ding D S, Liu X J 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 1286
- [28] Ding D S, Zhang Y, Liu J Q 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 3043
- [29] Ding D S, Zhang Y 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 1401
- [30] Ding D S, Tong X J, He P Z 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **118** 608
- [31] Ding D S, Xu J Y 2006 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr.* **53** 246
- [32] Ding D S, Shui Y G, Lin J B, Zhang D 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 727
- [33] Ding D S 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **108** 2759
- [34] Ding D S 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 35

Second-harmonic generation of the Bessel sound beam of several lobes^{*}

Dai Yu-Rong¹⁾ Ding De-Sheng^{2)†}

1) (Department of Physics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

2) (School of Electronic Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(Received 23 August 2011; revised manuscript received 3 November 2011)

Abstract

By the Gaussian expansion approach we investigate fundamental- and second-harmonic generation in practical Bessel beams of several lobes. The analysis is based on the integral solutions of the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation under the quasilinear approximation. The influence of the medium attenuation on beam profile is considered. Numerical results show that the absorption parameter has a significant effect on the beam profile of the second harmonic. Under certain circumstances, the second harmonic of a practical Bessel beam with several lobes still has the main properties of an ideal Bessel beam of infinite aperture when it propagates within its depth of field.

Keywords: second-harmonic generation, Bessel sound beam, sound attenuation, sound beams of limited aperture

PACS: 43.25Cb, 43.25Ed, 43.25Jh

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074038, 10674024).

† Corresponding author. E-mail: dds@seu.edu.cn