

摩擦颗粒体系各向同性压缩过程中的堵塞行为*

张国华¹⁾²⁾ 孙其诚^{2)†} 黄芳芳¹⁾ 金峰²⁾

1) (北京科技大学物理系, 北京 100083)

2) (清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

(2010年12月22日收到; 2011年7月13日收到修改稿)

利用分子动力学方法, 模拟了 5000 个表面轻微摩擦 ($\mu = 1 \times 10^{-4}$) 的弹性颗粒组成的体系在各向同性压缩过程中的堵塞 (jamming) 现象, 研究了颗粒体系对边壁压强 P 和对关联函数第一个峰的高度 g_1 随体积分数 ϕ 的变化规律. 结果表明, 当体系的体积分数 ϕ 大于临界体积分数 ϕ_c 时, $P(\phi)$ 曲线表现出明显的黏滑 (stick-slip) 行为, 法向的力-力关联函数、切向的力-力关联函数和颗粒的位置-位置关联函数同时发生跳变, 说明宏观黏滑现象源自内部的力位形和几何构形的调整. 体系在 ϕ 缓慢增大过程中得到了不同的堵塞态, 随着颗粒粒径的缓慢减小, 体系得以松弛 (unjamming), 实现松弛过程并得到相应的 ϕ_c . 对于不同堵塞态, 其边壁压强 P 与 $\phi - \phi_c$ 遵从幂律标度 $P \propto (\phi - \phi_c)^{0.964}$.

关键词: 堵塞相图, 对关联函数, 力-力关联函数, 标度规律

PACS: 45.70.-n, 83.80.Fg, 81.05.Rm, 61.43.Fs

1. 引言

无序材料从类流体状态到类固体状态 (亦即从松弛 (unjamming) 态转变到堵塞 (jamming) 态) 的非平衡转变被称为堵塞转变^[1,2], 通常由温度 T 、体积分数 ϕ 和剪切应力 Σ 控制, 如图 1 所示. 颗粒物质的相图位于 $(1/\phi) - \Sigma$ 平面, 以体积分数 ϕ 为变量的临界屈服应力 $\Sigma(\phi)$ 曲线将相图分为堵塞态和松弛态. 颗粒体系堵塞转变特性依赖于系统达到相边界的路径, 比如对于各向同性的堵塞颗粒体系, 当沿着 ϕ 轴降低 ϕ 值, 亦即 $1/\phi$ 增加到某一数值时, 体系的体积弹性模量和剪切模量为零, 这个转变点称为 J 点, 所对应的临界体积分数为 ϕ_c .

颗粒物质在 J 点附近表现出新奇的几何结构特征和力学行为^[3,4]. 例如, 光滑弹性颗粒组成体系 J 点的定义如下: 在 $\phi < \phi_c$ 的区域, 配位数 $Z = 0$, 刚性消失 (体积模量和剪切模量为零); 在 $\phi = \phi_c$ (即 J 点) 处, Z 从 0 跳变到 $Z_c = 2d$, 刚性出现 (体积模量和剪切模量不为零), 表现出一阶相变的特性^[5,6]; 在 $\phi > \phi_c$ 的区域, 体系的体积弹性模量随着 $\Delta\phi$ 呈

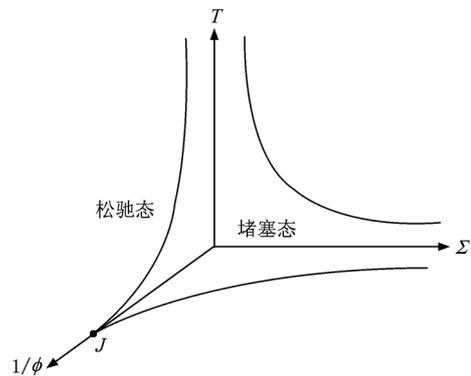


图1 无序材料的堵塞相图

现幂律标度^[3,5], 呈现二阶相变的基本特征. 与光滑颗粒的情况不同, 表面有摩擦的弹性颗粒组成体系的 ϕ_c 不是唯一的, 亦即存在多个 J 点, ϕ_c 的具体值依赖于颗粒间的摩擦系数和系统的加载历史, 一般而言, 其 ϕ_c 值比光滑弹性颗粒的 ϕ_c 值低. O'Hern 等^[7] 对光滑弹性颗粒组成的有限尺寸体系堵塞过程进行了数值模拟, 研究表明: 有限尺寸系统的 J 点位于一个以 ϕ_0 为中心、宽度为 w 的区域内, 随着体系尺寸的增加, 该区域收缩至一个点. 而且, 系统的

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB731504)、国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11034010)、清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室基金 (批准号: 2010-TC-1) 和中央高等学校基本科研基金 (批准号: FRF-BR-11-015A) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn

边壁压强 P 随 $\Delta\phi$ 呈幂律标度. 但是, O'Hern 等^[7] 没有考虑颗粒表面摩擦的影响, 在有摩擦的体系中, 上述关系能否成立值得进一步研究.

验证颗粒体系是否处于堵塞态的判据通常有三个. 首先, J 点是系统刚度开始的点, 即在 J 点处系统内部开始有应力, 边壁开始有压强, 这是力学判据. 其次, J 点是系统内部颗粒刚好接触的点, 因此系统对相关函数 $g(r)$ 第一个峰的高度 g_1 在 J 点达到最大^[8], 这是几何判据. 最后, J 点是系统内部颗粒突然停止的点, 即体系的方均根速率在 J 点突然下降接近零, 这是运动学判据. Cheng^[9] 实验观测了一个缓慢膨胀的准二维颗粒系统的零温度堵塞过程, 研究了对关联函数 $g(r)$ 随 ϕ 的变化过程, 发现 $g_1(\phi)$ 在 ϕ_c 处有一个峰, 力学和运动学测量表明 $g_1(\phi)$ 出现峰值是零温度堵塞转变的结构特征. 文献^[9] 还发现, $g_1(\phi)$ 对系统的堵塞过程非常敏感, 即使是局域堵塞在 $g_1(\phi)$ 中也会出现一个峰. 另外, 还可以用其他的关联函数来描述堵塞及松弛过程中系统的结构变化. 例如, Pica Ciamarra 等^[10] 在研究剪切过程中的滑动 (slips) 和微滑动 (microslips) 现象时引入不同时间的力-力相关函数 (法向力的相关函数记为 C^n , 切向力的相关函数记为 C^t) 来表征这些过程中的黏滑动力行为, 发现这些滑动事件对应的局域松弛转变处力相关函数 C^n 和 C^t 都呈现小的跳跃, 反映了局域松弛过程中法向力和切向力网络的调整. 因此, C^n , C^t 和 $g_1(\phi)$ 从不同角度反映了宏观堵塞及松弛过程的内力结构和几何结构的变化.

在理论方面, 人们已经尝试用统计力学方法来解释无序材料的堵塞相图. Fierro 等^[11] 试图采用平均场理论研究颗粒物质中堵塞转变的本质, 发现颗粒物质弛豫函数的衰减和动力学异质性与玻璃系统中类似, 从而证实了早期的关于颗粒物质堵塞转变和在普通玻璃系统中的玻璃转变之间有联系的猜想. Henkes 等^[12] 用应力系综建立了描述颗粒物质堵塞转变的场理论和平均场理论. 但是, 迄今为止大部分关于颗粒物质堵塞理论主要关注光滑颗粒体系^[13,14], 如何理解有摩擦的颗粒体系堵塞的本质仍然是一个巨大的挑战.

本文对表面有摩擦的弹性颗粒体系的堵塞及松弛过程进行了分子动力学模拟. 对于堵塞过程, 采用力学判据和几何判据确定 J 点, 重点分析边壁压强 P 、对相关函数第一个峰的高度 g_1 随体积分

ϕ 的演化规律, 采用法向力的力-力关联函数 C^n 、切向力的力-力关联函数 C^t 、颗粒位置的关联函数 C^{xy} 分析了堵塞过程中体系的力位形和几何位形的变化规律. 对于松弛过程, 重点分析不同堵塞态的 P 随 $\Delta\phi$ 的标度规律.

2. 数值模拟

我们在 $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ 的方形盒子内随机放置了 5000 个二维 (2D) 圆盘状颗粒. 为了避免颗粒排布的晶格化, 采用双分散粒径, 小颗粒半径和大颗粒半径之比为 1:1.4, 颗粒数之比为 1:1, 颗粒密度为 2600 kg/m^3 , 颗粒间作用势为简谐势, 法向刚度和切向刚度均为 $1.0 \times 10^8\text{ N/m}$, 颗粒间摩擦系数 $\mu = 1 \times 10^{-4}$, 不考虑重力. 盒子边壁具有与颗粒相同的密度、法向和切向刚度以及摩擦系数等.

为了沿着 $1/\phi$ 轴探索该体系的堵塞转变特性, 初始时, 我们使这 5000 个颗粒粒径均很小, 排布稀疏, 相互间没有任何重叠, 显然体系处于松弛状态. 然后扩大颗粒半径使得体系的体积分 ϕ 均匀增加, 两种颗粒的粒径比保持不变, 体系最终进入堵塞态. 体积分 ϕ 以 1×10^{-4} 的步长缓慢增加, 在 ϕ 的每次微小增大之后, 颗粒均发生轻微移动, 体系处于 $T \neq 0$ 的非稳态. 为了使体系处于准静态, 体系运行足够长时间, 直到颗粒位置得到充分调整, 其动能几乎完全被耗散 (颗粒的方均速率小于 10^{-6} m/s). 然后, 记录每个 ϕ 下体系的边壁压强 P 、颗粒间作用力和位置等, 分析对相关函数 $g(r)$ 、切向力-力关联函数 C^t 、法向力-力关联函数 C^n 等随 ϕ 的变化, 进一步研究体系堵塞转变的特性.

图 2 所示为约束着颗粒体系的边壁压强 P 随体积分 ϕ 的演变情况. 从图 2 可以看出: 在 $\phi < 0.8353$ 的区域, 随着 ϕ 的增加, P 始终接近于零, 体系处于松弛态. 在 $\phi = 0.8353$ 处, P 增长为 2017 Pa. 在 $0.8353 < \phi < 0.8356$ 的区域, P 持续增大. 但是, 当 ϕ 从 0.8356 继续增大 0.0001 时, 边壁压强 P 发生陡降, 体系内部应力松弛, 如图中 A 点所示. 从图 2 还可以观测到其他边壁压强 P 发生陡降的点. 这就是颗粒体系的黏滑 (stick and slip) 现象, 对这种边壁压强 P 随体积分 ϕ 增加出现的非线性变化行为的本质需要做进一步研究.

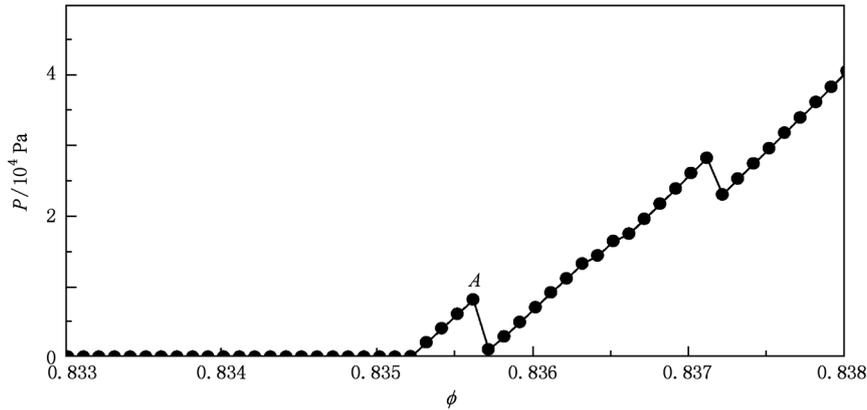


图2 颗粒体系的边壁压强 P 随体积分数 ϕ 的演化

3. 结果及讨论

3.1. 对关联函数 $g(r)$

对关联函数 $g(r)$ 刻画与任一颗粒相距 r 处发现另外一个颗粒的概率. 对于 2D 体系, 有

$$g(r) = \frac{dN}{2\pi r dr \rho_0}, \quad (1)$$

其中 dN 为在 $r-r+dr$ 环带内的颗粒数; ρ_0 为体系的平均数密度, 设 2D 系统的面积为 S , 颗粒总数为 N , 则 $\rho_0 = N/S$. 利用 $g(r)$ 可以表征颗粒体系的细观结构.

我们选取 $dr = 0.0002$ (约为 $\phi = 0.8353$ 时小颗粒粒径的 $1/100$) 来计算不同 ϕ 下的 $g(r)$. 图 3 所示为本文所研究的双分散颗粒体系和中心为两种颗粒 (平均直径为 $\langle d \rangle$) 的高斯分布体系的 $g(r)$. 从

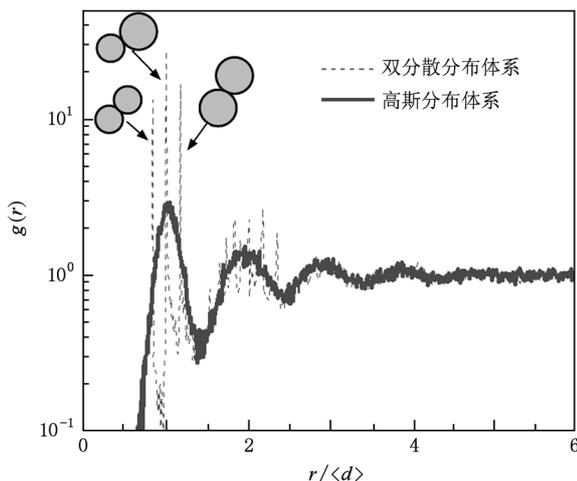


图3 粒径为双分散颗粒体系和高斯分布体系的 $g(r)$ 随 r 的变化

图 3 可以看出: 高斯分布体系的 $g(r)$ 曲线具有一系列特征峰, 其第一个峰的最大值处的 r 对应双分散体系的平均直径. 双分散体系的 $g(r)$ 曲线的第一个峰分裂成三个子峰, 暗示体系中最临近颗粒的接触可分为三种情况. 第一个子峰对应两个小直径颗粒接触, 中间最高的子峰对应直径不同的颗粒接触, 第三个子峰对应两个大直径颗粒接触. 对于双分散无序体系, 直径不同的颗粒接触的概率大于相同直径颗粒接触的概率, 因此, 中间子峰的高度最大. 双分散体系的 g_2 峰则更加复杂, 出现多个规律不明显的峰. 两种体系的 $g(r)$ 在 $3\langle d \rangle$ 之后基本重合, 本文只关注 g_1 峰规律.

双分散体系的对关联函数 $g(r)$ 的第一个峰的高度 g_1 随着 ϕ 的增加而呈现出非单调变化, 如图 4 所示. 从图 4 可以看出: 在 ϕ 值较小处 (亦即松弛相), g_1 随着 ϕ 的增加而增加, 表明开始接触的颗粒数增加. 但是, 当 $\phi > 0.8342$ 时, g_1 增长变缓, 表明在 $\phi = 0.8342$ 时部分颗粒开始接触, 在边壁上产生压强. 严格而言, 此时体系进入堵塞态, 因此 $\phi_c = 0.8342$. 注意到 ϕ_c 附近 $P(\phi)$ 涨落很大, 而 $g_1(\phi)$ 曲线峰值的确非常明显, 由此可知, $g_1(\phi)$ 曲线对于判断体系的堵塞转变非常敏感. 有意思的是, 在 $\phi > 0.8376$ 的高体积分数区域, g_1 在某些 ϕ 值处出现一些局域极大值, 暗示体系可能发生结构变化. 但是, 由于在这些区域中 P 并没有突变到零, 说明体系很可能是从一个堵塞态突变到另一个堵塞态. 这说明随着体积分数 ϕ 的增加, 体系首先在相对松弛的几何位形上局域堵塞, 随着颗粒半径的增加, 体系在更密集的位形上发生堵塞. 本工作中选取的颗粒法向刚度和切向刚度均为 1.0×10^8 N/m, 10^3 Pa 的边壁压强使得颗

粒变形极小,因此在本工作中没有出现 g_1 随着 ϕ 的增加而单调下降的现象.

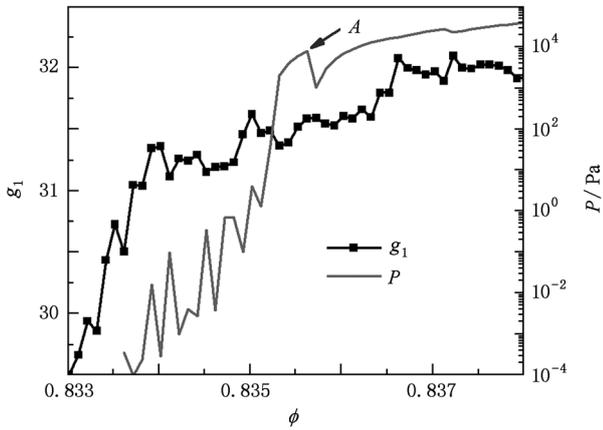


图4 颗粒体系的对关联函数第一个峰高度 g_1 及边壁压强 P 随体积分数 ϕ 的变化 A 点对应图2 中的 A 点

3.2. 力-力关联函数和位置-位置关联函数

在 $\phi > \phi_c$ 的高体积分数区域中, $P(\phi)$ 曲线中的突变说明体系可能从一个堵塞态变到另一个密度更高的堵塞态. 在本文的各向同性压缩中, 体系的边壁压强和体系内部应力是一致的, 因此边壁压强的变化反映了体系内部应力的变化, 进而也反映了力网络形态和颗粒位置的变化. 为了定量表征演

化,我们引入法向力的力-力关联函数 C^n 、切向力的力-力关联函数 C^t 和颗粒位置-位置关联函数 C^{xy} , 分别定义为

$$C^n(\phi_0, \phi) = \frac{\sum_{ij} |f_{ij}^n(\phi_0)| |f_{ij}^n(\phi)|}{\sum_{ij} |f_{ij}^n(\phi_0)|^2},$$

$$C^t(\phi_0, \phi) = \frac{\sum_{ij} |f_{ij}^t(\phi_0)| |f_{ij}^t(\phi)|}{\sum_{ij} |f_{ij}^t(\phi_0)|^2},$$

$$C^{xy}(\phi_0, \phi) = \frac{\sum_i \sqrt{x_i^2(\phi_0) + y_i^2(\phi_0)} \sqrt{x_i^2(\phi) + y_i^2(\phi)}}{\sum_i |x_i^2(\phi_0) + y_i^2(\phi_0)|}.$$

(2)

这里取 $\phi_0 = 0.8420$ 为参考状态,它是紧密压实的体系; 求和遍历所有的颗粒对 (i, j) , 相当于一个空间平均; f_{ij}^n 和 f_{ij}^t 分别为颗粒 i, j 的法向力和切向力; x_i, y_i 是颗粒 i 的质心位置. 如图5所示, $\phi = 0.835$ 之后, 随着 ϕ 的增加对应的 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 呈现台阶状变化, 每一个平台处 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 近似为一个常数, 说明体系的几何构形在这些区域几乎没有变化, 即每个平台区域对应一个体系的堵塞态. 在 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 的平台区, $C^n(\phi_0, \phi)$ 和 $C^t(\phi_0, \phi)$ 却随着 ϕ 的增加而呈近似线性增加, 说明在单个堵塞态中, 体系的

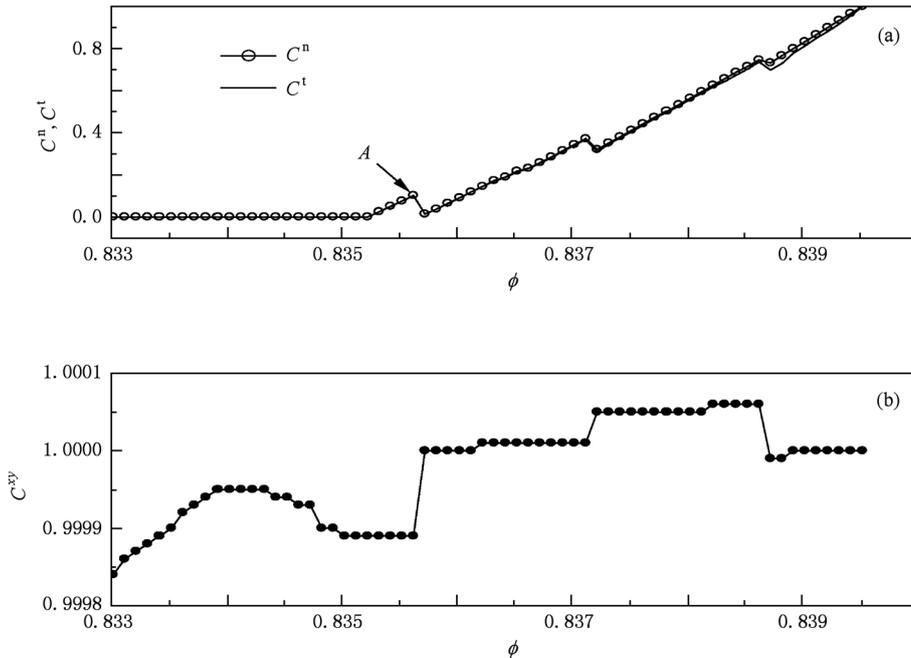


图5 法向力-力关联函数 C^n 、切向力-力关联函数 C^t 和位置-位置关联函数 C^{xy} 随体积分数 ϕ 的变化 (a) C^n 和 C^t 随 ϕ 的变化, A 点对应图2 和图4 中的 A 点; (b) C^{xy} 随 ϕ 的变化

法向力和切向力都随 ϕ 的增加而呈近似线性增加. 当 ϕ 达到某些特定值时, $P(\phi)$ 发生跳变, $C^n(\phi_0, \phi)$, $C^l(\phi_0, \phi)$ 和 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 同时跳变, 这暗示边界压强的变化伴随着内部应力的变化, 体系几何构形、法向力网络和切向力网络三者同时调整. C^n 和 C^l 两曲线趋势几乎完全一致, 说明在同一个堵塞态内部颗粒间法向力和切向力同时变化.

尽管 $C^n(\phi_0, \phi)$, $C^l(\phi_0, \phi)$ 和 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 存在突变, 但是 $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 始终在 1 附近, 且变化很小 (小于 5×10^{-5}), 说明颗粒位置变化很小; 但是 $C^n(\phi_0, \phi)$ 和 $C^l(\phi_0, \phi)$ 对应的力位形变形很大 (约为 10^{-1}), 且随着 ϕ 的减小, 相关性逐渐减小并接近于零.

为了进一步说明体系位形变化前后力网络的变化, 我们给出了图 2 中所示的 A 点及 ϕ 增加 0.0001 后颗粒体系的局部力位形变化情况, 结果如图 6 所示, 图中两种力位形都用各自的平均力 $\langle f \rangle$ 标

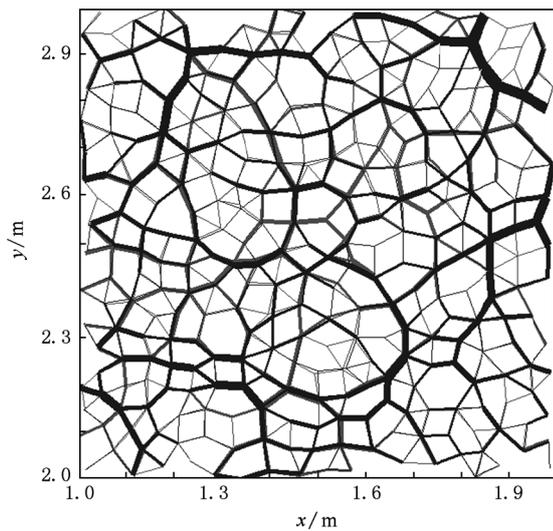


图 6 A 点以及 ϕ 增加 0.0001 后的力位形 增加前后分别用浅色和深色表示. 线条越粗表示力越大

度. 从图 6 可以看出, 当 A 点处的 ϕ 增加 0.0001 后, $C^{xy}(\phi_0, \phi)$ 只变化了 0.0002, 而力位形的变化却很大.

4. 体系的松弛行为

以上分析表明, 本文研究的体系随着 ϕ 的增加经历了不同的堵塞态, 且不同堵塞态的几何位形和力位形不同. 那么, 这些表面有摩擦的颗粒组成的体系不同堵塞态的 $P(\phi)$ 是否也像表面光滑颗粒体系那样存在类似的标度关系呢? 为了进一步弄清楚这个问题, 我们对上述不同堵塞位形进行松弛, 亦即使颗粒粒径缓慢变小, 此时的步长更小 (1×10^{-5}). 当颗粒初始排布不同时, 在颗粒增长过程可以产生如图 2 所示不同数目的堵塞态. 我们进行了大量计算, 得到堵塞态数目较多的一条 $P(\phi)$ 曲线, 如图 7 所示. 然后沿着某一堵塞位形松弛, 发现 P 基本沿直线松弛到 $P=0$, 此时对应的 ϕ 就是 ϕ_c , 如图 7 中的 $\phi_c = 0.8382$. 注意到不同堵塞位形的 ϕ_c 是不同的, ϕ_c 在 0.83791—0.83820 的狭窄区域内分布, 如图 8 所示. 这种差异可能来自尺寸效应, 对于尺寸无限大的颗粒体系, ϕ_c 可以唯一地确定而不受位形的影响, 文献[8]对此进行了细致分析.

研究表明光滑颗粒体系的力学行为随 $\Delta\phi = \phi - \phi_c$ 呈现标度行为. 对于有摩擦的情况, 压强 P 是否仍然存在随 $\Delta\phi = \phi - \phi_c$ 的标度规律? 为了研究不同堵塞态在各自 J 点附近的标度行为, 我们给出了每个堵塞态的 $\log P - \log(\phi - \phi_c)$ 的变化规律, 如图 8 所示. 由于标度行为通常发生在 J 点附近, 因而图 8 中各曲线的 $\Delta\phi < 0.001$. 从图 8 可以看出, 不同堵塞位形的 $(\log P, \log(\phi - \phi_c))$ 点落在同一条直线附近, 可以用 $P = 7.192(\phi - \phi_c)^{0.964}$ 很好拟合. 对于无摩擦球形颗粒体系, 幂指数的理论值为 1.0, 两者差

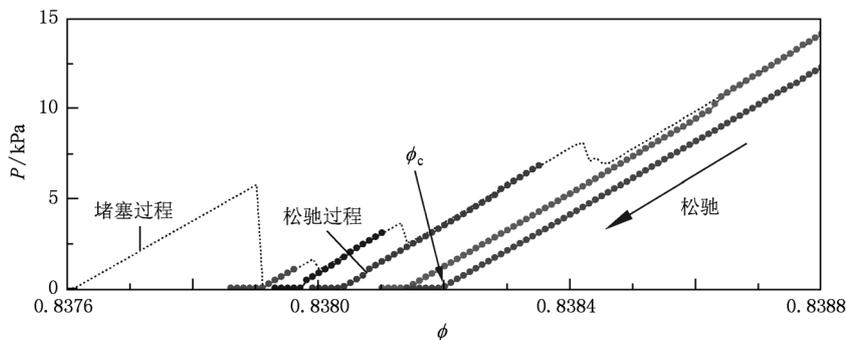


图 7 颗粒体系的堵塞态松弛时边壁压强 P 与体积分数 ϕ 的关系

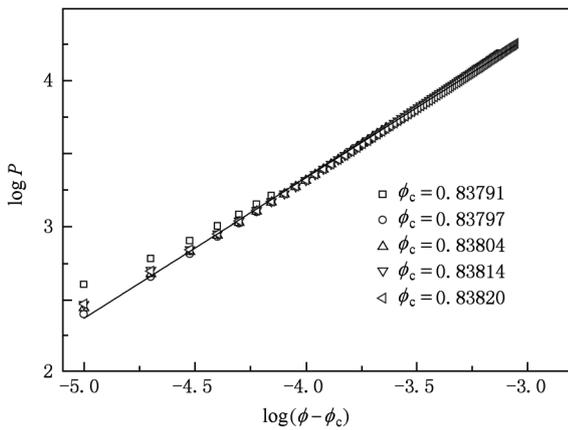


图8 不同堵塞态松弛后,边壁压强 P 与 $\phi - \phi_c$ 的关系

别是来自摩擦系数的影响,但是影响不大. 需要说

明的是,尽管模拟结果表明摩擦力较小的球形颗粒体系呈现与无摩擦情况类似的标度行为,但目前还不能从理论上对此做出解释,仍需要做进一步的研究.

5. 结 论

本文采用分子动力学方法分析了摩擦系数 $\mu = 1 \times 10^{-4}$ 的双分散 2D 颗粒体系的堵塞过程,发现在 J 点(对应临界体积分数 ϕ_c)之上, $P(\phi)$ 曲线所表现出明显的黏滑行为源自内部的力位形和几何构形的调整. 通过对体系在 ϕ 缓慢增大过程中经历的不同堵塞态进行松弛,得到不同堵塞态的边壁压强 P 随各自的 $\phi - \phi_c$ 呈现 $P = 7.192(\phi - \phi_c)^{0.964}$ 的幂律标度. 摩擦系数对边壁压强 P 等物理量涨落的影响尚需要做进一步的研究.

- [1] Liu A J, Nagel S R 1998 *Nature* **396** 21
- [2] Trappe V, Prasad V, Cipelletti L, Segrè P N, Weitz D A 2001 *Nature* **411** 772
- [3] O'Hern C S, Silbert L E, Liu A J, Nagel S R 2003 *Phys. Rev. E* **68** 011306
- [4] Drocco J A, Hastings M B, Olson Reichhardt C J, Reichhardt C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 088001
- [5] Otsuki M, Hayakawa H 2009 *Phys. Rev. E* **80** 011308
- [6] Brujic J, Song C, Wang P, Briscoe C, Marty G, Makse H A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 248001
- [7] O'Hern C S, Langer S A, Liu A J, Nagel S R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 075507
- [8] Zhang Z, Xu N, Chen D T N, Yunker P, Alsayed A M, Aptowicz K B, Habdas P, Liu A J, Nagel S R, Yodh A G 2009 *Nature* **459** 230
- [9] Cheng X 2010 *Phys. Rev. E* **81** 031301
- [10] Pica Ciamarra M, Lippiello E, Godano C, de Arcangelis L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 238001
- [11] Fierro A, Nicodemi M, Tarzia M, de Candia A, Coniglio A 2005 *Phys. Rev. E* **71** 061305
- [12] Henkes S, Chakraborty B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 061301
- [13] Parisi G, Zamponi F 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 789
- [14] Torquato S, Stillinger F H 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 2633

Jamming phenomena of a two-dimensional frictional granular system under isotropic confining^{*}

Zhang Guo-Hua¹⁾²⁾ Sun Qi-Cheng^{2)†} Huang Fang-Fang¹⁾ Jin Feng²⁾

1) (Department of Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

2) (State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 22 December 2010; revised manuscript received 13 July 2011)

Abstract

In this paper, the jamming/unjamming processes of the system composed of 5000 elastic disks with small friction $\mu = 1 \times 10^{-4}$ are simulated by using the molecular dynamics method. The variations of sidewall pressure P and the height of the first peak of the pair correlation function, g_1 , with packing fraction ϕ are studied. The result shows that the $P(\phi)$ curve exhibits an obvious stick-slip-like behavior. The normal force-force correlation function, the tangential force-force correlation function, and the position-position correlation function are found to jump simultaneously during the stick-slip process. By relaxing jammed states obtained as the system undergoes the compression process, we observe that the P is related to $\phi - \phi_c$ by the power scaling law $P \propto (\phi - \phi_c)^{0.964}$, although the different sidewall pressures corresponds to different values of ϕ_c .

Keywords: jamming phase diagram, pair-correlation function, force-force correlation function, scaling law

PACS: 45.70.-n, 83.80.Fg, 81.05.Rm, 61.43.Fs

^{*} Project supported by the the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2010CB731504), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11034010), the Foundation of State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, China (Grant No. 2010-TC-1), and the Fundamental Scientific Research Foundation for the Central Universities of China (Grant No. FRF-BR-11-015A).

[†] Corresponding author. E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn