一类非线性扰动发展方程的广义迭代解*

莫嘉琪[1)2)†]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖 241003)

2)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

(2010 年 4 月 24 日收到;2010 年 5 月 6 日收到修改稿)

利用广义变分迭代方法研究了一类非线性发展扰动方程. 首先引入一个泛函. 然后求其变分,最后构造方程解的迭代关系式. 得到了问题的近似解和精确解析解.

关键词: 发展方程, 扰动, 变分迭代

PACS: 02.30.Mv

1. 引 言

非线性扰动发展方程在物理学、力学和其他自然科学的许多领域的应用中,是十分重要的研究对象. 近来许多学者在激波[1—3]、光波散射[4]、量子力学[5]、大气物理[6—8]、神经网络[9]等方面都作了一些探讨. 非线性发展方程的定量和定性各种方法也大量地涌现. 作者们也利用微分不等式、同伦映射、不动点原理等方法研究了一系列非线性扰动问题[10—24].

本文利用广义变分迭代方法研究了一类非线性发展扰动方程. 目前,非线性扰动方程的渐近方法的要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性方程转化为可求得的近似式去逼近原非线性方程的解[25,26]. 本文使用的广义变分迭代方法就是属于这一类. 本方法的优点在于思路简明,计算简单,得到的近似解具有较高的精度. 并且它还有一个优点,就是求得的解保留了相应的解析特性. 因而对得到的解,还能进一步更深入的作定量、定性方面的解析运算. 本方法具有较广泛的研究前景.

Sine-Gordon 方程就是一类重要的非线性扰动发展方程,它是物理学中很受关注的模型. Sine-Gordon 方程用于超导体中,其方程形式为

$$u_{tt} - u_{xx} = -\sin u.$$

近年来,关于非线性扰动发展方程解的研究主要集中在两个方面. 一个是利用各种代数分析方法求各种方程的精确解,如 Zhang 等[27]利用变形映射方法给出了相应方程的精确解. He 等[28]利用推广的 F 展开方法求出了一类发展方程的精确解. 另一方面,是定性研究解的性态问题,如 Lu 等[29]以及 Zhang 等[30]对更一般的方程给出了一个完整的波函数和能量方程. Teman[31]证明了较一般的方程整体吸引子的存在性,并给出了吸引子的维数估计. Zhu 等研究了方程[32]

$$u_{tt} + \alpha u_t - u_{xx} + \lambda g(\sin u) = f(x,t)$$

整体解的存在唯一性. 近来典型的非线性发展方程还有一些研究[33],但典型的方程代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩. 它已经不能满足当前科学发展的需要. 故有必要来研究更能代表真实自然现象的广义扰动发展方程. 众所周知,更复杂的广义非线性方程一般不能求出其精确解. 本文就是在上述关于讨论两个研究方法相结合的基础上,在这种背景下,提出求解近似解,而这种近似解又可以继续进行解析分析,进而得到更好的物理性态.

今讨论如下广义强阻尼扰动发展方程[34]

$$u_{tt} + \alpha u_t - u_{xx} - \beta u_{txx} = f(x,t,u), \qquad (1)$$

其中 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$ 为阻尼参数, f 为扰动项.

* 国家自然科学基金(批准号:40876010)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08)、公益性行业(气象)科研专项(批准号:GYHY200806010)、大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室专项经费、上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090164) 资助的课题.

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

假设[H], f 是关于其变量为充分光滑的函数,且 $|f_u|\leqslant M$,其中 M 为常数.

2. 广义变分迭代

为了进一步求得广义强阻尼扰动发展方程(1)的解,引入泛函 $F[u]$[35]

$$F[u] = u - \int_0^t \left(\bar{\lambda}(\tau)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \tau \partial x^2}\right) - f(x,\tau,\bar{u})\right) \mathrm{d}\tau, \quad (2)$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量[35], $\bar{\lambda}$ 为 Lagrange 乘子.

泛函(2)的变分 δF 为

$$\delta F = \delta u - \left[\bar{\lambda}\left(\delta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{\tau=t} + \left[\left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x}\right)\delta u\right]\Bigg|_{\tau=t} - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial x^2}\right)\delta u \mathrm{d}\tau.$$

令 $\delta F = 0$. 于是有

$$\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial x^2} = 0, \ \tau < t, \quad \bar{\lambda}|_{\tau=t} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x}\right)\Bigg|_{\tau=t} = -1.$$

故可得

$$\bar{\lambda}(\tau) = -(\tau - t). \quad (3)$$

由(2)和(3)式,我们构造如下广义变分迭代

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \left((\tau - t)\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial u_n}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u_n}{\partial \tau \partial x^2}\right) - f(x,\tau,u_n)\right)\mathrm{d}\tau, \quad (4)$$

根据假设[H]和广义强阻尼扰动方程(1)的结构,由(4)式可得到一个收敛的函数序列 $\{u_n\}$,因此 $u(x,t) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t)$ 就是原方程(1)的精确解.

现考虑无扰动情形下的强阻尼发展方程

$$v_{tt} + \alpha v_t - v_{xx} - \beta v_{txx} = 0, \quad (5)$$

利用 Fourier 变换法来求方程(5)的解. 对方程(5)的两边关于变量 x 进行 Fourier 变换,并设 $v(x,t)$ 的 Fourier 变换为 $\bar{v}(\lambda,t)$. 这时有

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + (\alpha + \beta\lambda^2)\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \lambda^2 \bar{v} = 0. \quad (6)$$

方程(6)的解为

$$\bar{v}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}} \times [(\bar{\psi} - r_2\bar{\phi})\exp r_1 t - [(\bar{\psi} - r_1\bar{\phi})\exp r_2 t]. \quad (7)$$

其中 $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ 分别为初始状态 $v|_{t=0} = \phi$ 和 $v_t|_{t=0} = \psi$ 的 Fourier 变换,而特征值 $r_{1,2}$ 为

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-(\alpha+\beta\lambda^2) \pm \sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}\right). \quad (8)$$

取关系式(8)的 Fourier 逆变换,便得到方程(6)的解 v

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} [(\bar{\psi}(\lambda) - r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp r_1 t - (\bar{\psi}(\lambda) - r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp r_2 t] \times \exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda. \quad (9)$$

现选取无扰动情形下的强阻尼发展方程的解 $v(x,t)$ 作为广义变分迭代(4)式的初始近似. 即

$$u_0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}} \times [(\bar{\psi}(\lambda) - r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp r_1 t - (\bar{\psi}(\lambda) - r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp r_2 t] \times \exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda. \quad (10)$$

将(10)式代入(4)式,便有

$$u_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\psi}(\lambda) - r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp r_1 t - (\bar{\psi}(\lambda) - r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp r_2 t}{2\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}}\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda - \int_0^t (\tau - t) f\left(x,\tau,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2 - 4\lambda^2}}\right.$$

$$\times[(\overline{\psi}(\lambda)-r_2\overline{\phi}(\lambda))\exp r_1\tau-(\overline{\psi}(\lambda)-r_1\overline{\phi}(\lambda))\exp r_2\tau]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda\Big)\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

其中 r_1, r_2 由(8)式所示. 再由(4), (10), (11)式, 还可依次得到 $u_n(x,t)$, $i=2,3,\cdots$. 从而得到方程(1)的各次近似的扰动解.

3. 例

现讨论如下由 Josephson 首先提出的用于超导体中的 Sine-Gordon 方程:

$$u_{tt}-u_{xx}=-\sin u.$$

利用上述广义变分迭代方法, 可以得到上述方程的近似解.

事实上, 比较方程(1), 可知 $\alpha=\beta=0$, $f(x,t,u)=-\sin u$. 于是由广义变分迭代方法得到的 Sine-Gordon 方程的一次近似解(11)式为

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(\psi(\xi)-\lambda\phi(\xi))\exp(\mathrm{i}\lambda t)-(\psi(\xi)+\lambda\phi(\xi))\exp(-\mathrm{i}\lambda t)}{\lambda}\exp\mathrm{i}\lambda(x-\xi)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^t(\tau-t)\sin\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}[(\psi(\xi)-\lambda\phi(\xi))\exp(\mathrm{i}\lambda t)$$
$$-(\psi(\xi)+\lambda\phi(\xi))\exp(-\mathrm{i}\lambda t)\times\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\Big)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\phi=u|_{t=0}$, $\psi=u_t|_{t=0}$ 为解 u 的初始状态. 用相同的方法可以进一步得到方程的更高次近似解.

4. 微扰方程

若在广义强阻尼扰动发展方程(1)中的扰动项是微扰的, 为计算简单起见, 例如现设 $f(x,t,u)=\varepsilon\cos u$, 其中 ε 为正的小参数. 这时相应的强阻尼微扰方程初值问题为:

$$u_{tt}+\alpha u_t-u_{xx}-\beta u_{txx}=\varepsilon\cos u,$$
$$0<\varepsilon\ll 1, \tag{12}$$
$$u|_{t=0}=\phi(x),\quad u_t|_{t==0}=0. \tag{13}$$

由(10)和(11)式, 广义强阻尼扰动方程(12)和(13)的微扰解的零阶和一阶近似 $u_0(x,t)$ 和 $u_1(x,t)$ 分别为:

$$u_0(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{(r_1\exp r_2t-r_2\exp r_1t)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda, \tag{14}$$

$$u_1(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{(r_1\exp r_2t-r_2\exp r_1t)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda$$
$$-\varepsilon\int_0^t(\tau-t)\cos\Big(\int_0^{\infty}\frac{(r_1\exp r_2\tau-r_2\exp r_1\tau)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda\Big)\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

其中 r_1 和 r_2 由(8)式所示.

利用(4)式, 可求得强阻尼微扰方程初值问题(12)和(13)式的二次近似 $u_2(x,t)$

$$u_2(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{(r_1\exp r_2t-r_2\exp r_1t)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda+\varepsilon F_1(x,t)$$
$$-\varepsilon^2\int_0^t(\tau-t)\left[\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial\tau^2}+c\frac{\partial F_1}{\partial\tau}-\frac{\partial^2F_1}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^3F_1}{\partial\tau\partial x^2}\right)\right.$$

$$\times \cos\left(\int_0^\infty \frac{(r_1 \exp r_2 \tau - r_2 \exp r_1 \tau)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda + \varepsilon F_1\right)\Big]\mathrm{d}\tau,$$

其中 r_1 和 r_2 由(8)式所示,而

$$F_1(x,t) = -\int_0^t (\tau - t)\cos\left(\int_0^\infty \frac{(r_1 \exp r_2 \tau - r_2 \exp r_1 \tau)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\tau.$$

继续通过关系式(4)式,可以依次地得到 $u_n(x,t)$, $i=3,4,\cdots$:

$$u_n(x,t) = \int_0^\infty \frac{(r_1 \exp r_2 t - r_2 \exp r_1 t)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda + \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x,t)\varepsilon^i$$
$$- \varepsilon^n \int_0^t (\tau - t)\left(\frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial \tau^2} + c\frac{\partial F_{n-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^3 F_{n-1}}{\partial\tau\partial x^2}\right)$$
$$\times \cos\left(\int_0^\infty \frac{(r_1 \exp r_2 \tau - r_2 \exp r_1 \tau)\overline{\phi}(\lambda)\cos\lambda x}{\pi\sqrt{(\alpha+\beta\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\mathrm{d}\lambda + \varepsilon\sum_{i=1}^{n-1} F_i\varepsilon^i\right)\mathrm{d}\tau, \quad n = 3,4,\cdots,$$

其中 F_{n-1} $(n=3,4,\cdots)$可依次地得到,其结构在此从略.

由此便得到广义强阻尼扰动发展方程解的各阶近似表达式.

5. 讨论及结论

众所周知,非线性方程一般是不能得到有限形式的解析精确解.人们只能用数值方法得到它的模拟解,或者用近似解析解去逼近它.然而由于得到的模拟解不能再进行解析运算,从而终止了对方程解的解析运算.这样有时往往会忽略对一些非线性方程的某些特性的研究,特别是一些微扰方程出现跳跃过渡的激波层现象的解有时就会被忽略.广义变分迭代方法是通过近似解析函数,尽管是用积分等式表达的超越函数,去逼近方程的精确解,所以还可用解析的方法去继续探索方程解的其他特殊特性.

变分迭代理论是通过寻找合适的 Lagrange 乘子,使相应的泛函达到最优化的"状态",因此能得到的近似解具有"最佳"的收敛效果.同时本文采用的广义变分迭代方法又克服了古典的变分方法对某些非线性偏微分方程寻找 Lagrange 乘子的局限性,所以能够实现得到较快地逼近精确解的近似解序列.

本文采用的广义变分迭代方法的优点还在于这种思路和方法简捷有效.用此方法求得方程近似解的函数序列收敛速度的快慢,很容易启发人们采用合适的初始近似.例如本文初始近似 $v(x,t)$ 的选取是采用非扰动情形下的典型发展方程的解(9)式.这十分自然,它保证了对应于有扰动情形下的,非线性发展方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1994 *Science* **275** 805.

[3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[4] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 1995 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2002 物理学报 **54** 1]

[5] Pan L X, Liu J L, Li S S, Niu Z C, Feng S L, Zheng H Z 2002 *Sci. Chin.* **32**A 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚植 2002 中国科学 **32**A 556]

[6] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]

[7] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[8] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Zhang X 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 1326

[9] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. Chin.* **32**E 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 **32**E 488]

[10] Mo J Q, Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. Complexity* **20** 119
[11] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sin.* **27** 4366
[12] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202
[13] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
[14] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、程 燕 2009 物理学报 **58** 4379]
[15] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* 2009 **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
[16] Mo J Q, Yao J S 2008 *Acta Phys. Sin.* 2008 **57** 7419 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2008 物理学报 **57** 7419]
[17] Mo J Q 2009 *Sci. Chin.* **52**G 1007
[18] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
[19] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230
[20] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin. Geographical Sci.* **18** 193
[21] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* **17** 370
[22] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* **17** 743
[23] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* **19** 010203
[24] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* **19** 030202
[25] Huang N N 1996 *Theory of Solitons and Method of Perturbations* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [黄念宁 1996 孤子理论和扰动方法(上海:上海科技教育出版社)]
[26] Pan L X, Yan J R, Zhou G H 2001 *Chin. Phys.* **10** 594
[27] Zheng Q, Yue P 2006 *Chin. Phys.* **15** 35
[28] He H S, Chen J, Yang K Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 1926
[29] Lu F L, Chen C Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 463
[30] Zhang X A, Chen K, Duan Z I 2005 *Chin. Phys.* **14** 42
[31] Teman R 1988 Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechnica and Physica (New York: Springer)
[32] Zhu Z W, Lu Y 2000 *J. Xhin. Quart. Math.* **15** 71
[33] Zhang Q, Yue P, Gong L X 2006 *Chin. Phys.* **15** 35
[34] Zhang J W, Wang D X, Wu R H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2021 (in Chinese) [张建文、王旦霞、吴润衡 2008 物理学报 **57** 2021]
[35] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学中的近似非线性分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]

The variational iteration solution method for a class of nonlinear disturbed evolution equations*

Mo Jia-Qi[1)2)†]
1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003, *China*)
2) (*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, Shanghai* 200240, *China*)

(Received 24 April 2010; revised manuscript received 6 May 2010)

Abstract

Using the generalized variational iteration method, a class of nonlinear disturbed evolution equations are studied. Firstly, a functional is introduced, then its variational is computed, and the iteration expansion is finally constructed. The approximate and exact analytic solutions to the problem are obtained.

Keywords: evolution equation, perturbation, variational iteration
PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the Special Scientific Research Fund of Meteorological Public Welfare Profession of China (Grant No. GYHY200806010), the Special Fund of the State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics of China, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission, China (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090164).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn