

双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的绝热隧穿*

黄芳 李海彬[†]

(浙江工业大学理学院应用物理系, 杭州 310023)

(2010年2月9日收到; 2010年5月16日收到修改稿)

研究了玻色-爱因斯坦凝聚体在双势阱中随着能级差绝热循环变化而发生的绝热隧穿. 发现当相互作用较强且初态选择为凝聚体全部置于较浅势阱时, 演化过程破坏绝热定理, 而演化结果有可能回到初态, 也有可能不回到初态, 取决于演化周期的选择; 另外还发现演化过程表现出对初态选择的依赖, 具有不对称的特征. 利用能级图和相图, 对上述现象给出了解释.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, Landau-Zener 模型, 绝热隧穿

PACS: 03.65.-w, 03.75.Lm, 42.50.-p

1. 引言

1995年在实验中实现了超冷稀薄原子气体的玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensates, BEC), 激起了物理学界的研究热潮, 不论从实验还是理论角度都取得了丰硕的成果. 一方面, 关于凝聚体的超流性质, 集体激发, 相干性和量子相变等性质的研究对于深入理解物理世界具有重要的意义^[1]. 另一方面, BEC的研究已经显著地渗透到物理学的其他各个领域, 如量子通信、量子计算与量子信息等领域; 而且, 在原子钟制造、原子干涉仪和重力常数精确测量等方面也有广泛的应用.

在关于凝聚体自身性质的研究中, 宏观量子效应是一个重要课题, 例如宏观量子隧穿现象, 考虑放置在双势阱中的凝聚体, 理论上首先发现了 BEC 在双势阱中的约瑟夫森效应^[2,3], 若考虑 BEC 原子间的相互作用, 还发现了自陷获(Self-trap)等奇特现象^[2,3], 这些都已在实验中得到了证实^[4,5], 并引起广泛的研究兴趣^[6-11].

实际上, 双势阱中 BEC 的性质在平均场近似和双模近似下, 可以用非线性 Landau-Zener 模型^[12]来描述. 我们知道, Landau-Zener 模型是一个典型的两能级系统, 在量子力学中, 它是一个基本的物理模型, 同时在量子化学、碰撞理论、钠磁铁

的自旋隧穿和量子计算等领域有广泛的应用. 在 Landau-Zener 模型基础上, 如果考虑相互作用等效效应, 就可以得到非线性 Landau-Zener 模型. 可以在其中发现不同于线性模型的效应, 如量子绝热定理的破坏等^[12-14]. 另外可以考虑对此模型的相关参数进行调制, 研究对模型动力学的影响^[15-20], 并由此研究光子晶格中的非线性 Landau-Zener 隧穿^[21,22], 非线性三能级体系的绝热 Landau-Zener 隧穿^[23], 光晶格势阱中 BEC 的 Landau-Zener 隧穿行为^[24]等问题.

本文主要研究在双势阱中 BEC 的绝热隧穿动力学特性. 我们发现由于相互作用的存在, 当对两势阱凝聚体的能级差进行绝热循环变化时, 系统或者回到初态, 或者不回到初态, 而这取决于周期的选择; 另外, 还发现隧穿结果对初态选择的依赖, 表现出不对称的特性.

2. 模型

2.1. BEC 双势阱模型

我们考虑在简谐势阱中形成的 BEC, 可以利用红失谐的激光入射势阱中间, 从而形成双势阱, 如图 1 所示. 此系统的动力学可以用无量纲的双模非线性薛定谔方程

* 国家自然科学基金(批准号:10605020)和浙江省自然科学基金(批准号:R107377)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: hbli@zjut.edu.cn

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} + c|\psi_1|^2 & -\frac{v}{2} \\ -\frac{v}{2} & \frac{\gamma}{2} + c|\psi_2|^2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

来描述,其中 $|\psi_1|^2, |\psi_2|^2$ 分别为原子处在 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 两个模式上的概率,并且满足总粒子数守恒,即 $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$,而无量纲参量 v 代表两势阱中凝聚体的耦合强度, γ 则为两势阱的基态能量差,取决于两势阱的相对形状, c 表示原子间相互作用强度,与 s 波散射长度直接相关.

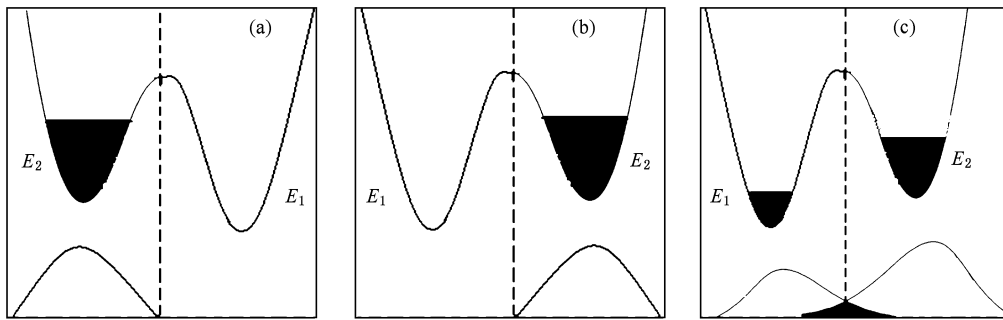


图1 双势阱中的 BEC 图上部为分布示意图,图下部为概率。(a)为初始时刻状态,BEC 凝聚体处于左阱(浅势阱)中,(b)当 $c=0$ 或 $c < v$ 时,系统演化结束后凝聚体的状态,(c) $c > v$ 时,系统演化结束后凝聚体的状态

2.2. BEC 的绝热循环演化

首先考虑能级差随时间单向线性变化的情况,即 $\gamma = \alpha t, t$ 从 $-\infty$ 向 $+\infty$ 演化.当 $c=0$,初始时刻凝聚体全部放置在深度较浅的势阱里,即为图 1(a)中左势阱,演化过程中左边的势阱逐渐降低,而右势阱逐渐抬高,最后右势阱成为较浅的势阱.根据线性 Landau-Zener 模型的理论,隧穿概率可以解析求得为 $p = |\psi_1|^2 = \exp\left(-\frac{\pi v^2}{2\alpha}\right)$,如果参数变化很慢,即 $\alpha \rightarrow 0$,则 $p=0$,这意味着原来在左势阱的凝聚体全部隧穿至右势阱,始终留在较浅势阱里,即能级间的跃迁没有发生,满足量子绝热定理,如图 1(b)所示.若考虑原子之间的相互作用即 $c \neq 0$,当 $c < v$ 时,绝热隧穿结果与无相互作用隧穿结果相同.而当 $c > v$ 时,演化结束后,凝聚体状态如图 1(c)的模拟,这意味着量子绝热定理的破坏^[12,13],在这种情况下,能级间的跃迁和空间隧穿同时发生.

在本文中,我们将研究凝聚体在双势阱之间的绝热隧穿,即当以非常慢的速度(满足量子绝热定理)改变某个参数,凝聚体经历这个过程之后最终的状态,特别是当考虑原子间相互作用存在时,演化结果会有什么特征.在辨析系统动力学特征时,需要指出的是将双势阱 BEC 模型用二能级系统来表示,实际上存在两种过程.首先,这里二能级实际上是两个势阱中的基态能量,而一般二能级系统中能级和位置无关,凝聚体在这两能级上的重新分配,称之为跃迁;其次,由于存在双势阱,凝聚体可以从一个势阱转移到另外一个势阱,称之为隧穿.从下面的研究结果可以看到,这两种过程可以是一致的,也可以各自发生.

根据量子力学,一个孤立的量子系统,经历参数绝热循环演化会回到初态,只是相位会增加一个几何相(berry phase).本文中,我们将考虑当原子间的相互作用不能忽略,双势阱中的 BEC 凝聚体经历能级差绝热循环变化时的演化特征.选择了两种演化方式作为比较的对象.

由前面的介绍,能级差的变化方式一般采取随时间线性变化的形式即 $\gamma = \alpha t$.现在依旧考虑采取能级差线性变化的方式,但是对 γ 进行分阶段扫描,在所选参数下,可以用函数表示为 $\gamma = -\alpha t (t_i \leq t \leq t_0), \gamma = -2\alpha t_0 + \alpha t (t_0 \leq t \leq t_f)$,其中 t_i, t_f 的选择应保证演化初态和末态近似为系统本征态,并且 $t_0 - t_i = t_f - t_0$.

依旧选择初态为凝聚体全部位于较浅势阱(图 1(a)中左势阱),数值计算结果显示于图 2.当 $c=0$ 或 $c < v$ 时,凝聚体经历循环演化,在此过程中,凝聚体先是从左势阱整体绝热隧穿至右势阱,当逆向扫描后,又回到初始势阱,在整个过程中,没有能级间

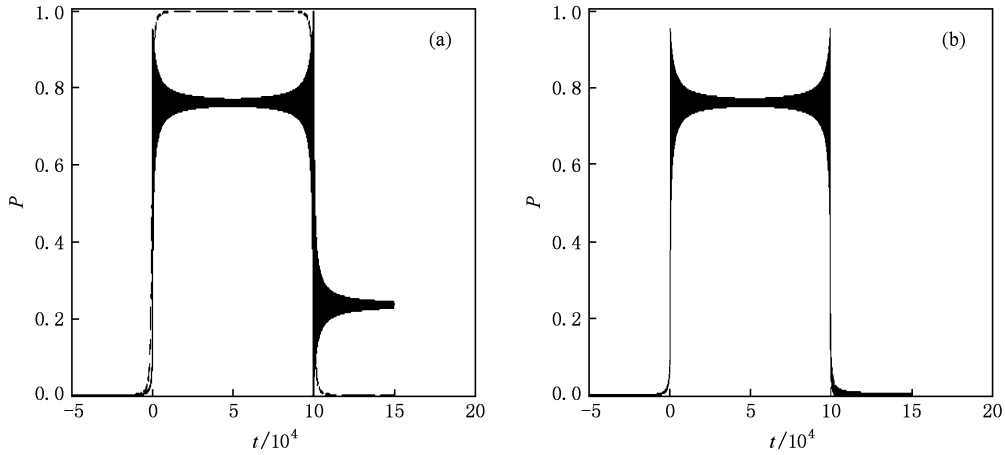


图2 能级差分段线性绝热循环演化时 BEC 凝聚体分布随时间的变化曲线 初态为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 模式. 参数取值为 $v = 0.1, \alpha = 0.0001$. (a) $c = 0.0$ 和 $c = 0.05$, 图中两个取值的曲线重合 (虚线), $c = 0.2$ (实线), 以上三种情况, 时间为 $t_0 - t_i = 100000$; (b) 取 $c = 0.2$ 所得的结果, 时间为 $t_0 - t_i = 100030$

的跃迁, 遵守绝热定理. 当相互作用参数 $c > v$ 情况下, 在正向扫描过程, 当 γ 演化跨越 $\gamma = 0$ 发生能级转换后, $p \approx 0.77$, 此时系统处于非线性本征态, 这意味着凝聚体同时发生能级间跃迁和空间隧穿, 如图 1(c) 所示, 之后系统保持在此状态进入逆向扫描, 当再次跨越 $\gamma = 0$ 发生能级转换后, 我们发现当演化周期的选择不同时, 会出现两种结果, 一个近似为 0.0, 也就是凝聚体全部重新回到初始势阱, 这种情况似乎满足量子绝热定理, 但是, 需要指出的是只是首尾两点满足, 中间过程却遭到了破坏. 另一个结果近似为 0.23, 即保持在非线性本征态上, 此时,

凝聚体不能回到初始状态, 量子绝热定理遭到破坏.

但是我们注意到上述演化函数存在拐点, 而在此拐点处, 量子绝热定理不满足, 所以考虑采取能级差变化形式为 $\gamma = \gamma_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, 这种情况下绝热条件为 $|\dot{\gamma}| = \left| \gamma_0 \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t \right| \ll v^{[15]}$. 以 $\gamma = \gamma_0$ 为能级差初始值, 凝聚体全部布局在浅势阱中为初始态开始演化, 且使 γ_0 的选择足够大以保证此初始态近似为系统的本征态, 计算结果见图 3. 可以发现和分段线性演化情况 (图 2) 有相同的结果, 即对于 $c = 0$ 和 $c < v$, 在演化过程中, 绝热定理始终成立, 而对

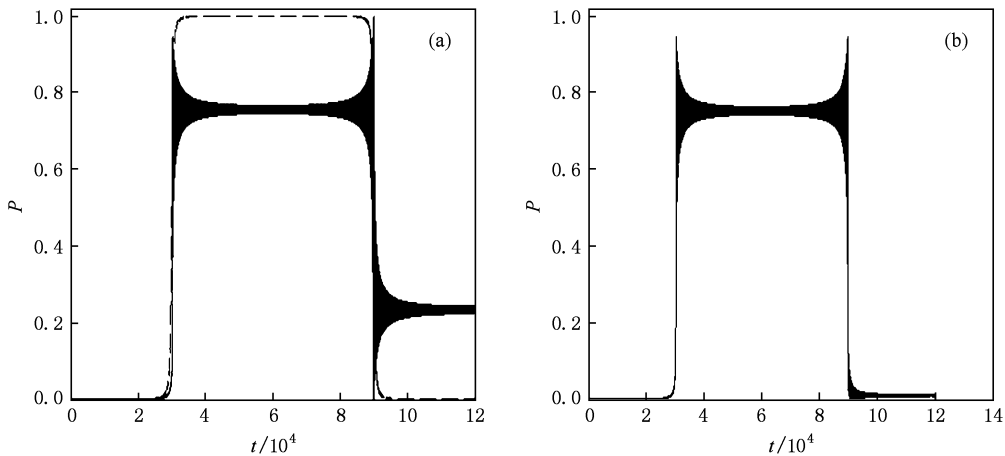


图3 能级差以余弦形式绝热循环演化时 BEC 凝聚体分布随时间的变化曲线 初态为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 模式. 图中取值为 $\gamma_0 = 4.0, v = 0.1$, (a) 取 $T = 120000, c = 0.0$ 和 0.05 , 这两个取值的曲线重合 (虚线), $c = 0.2$ (实线); (b) 取 $T = 120020, c = 0.2$ 的概率

$c > v$, 则出现演化过程绝热定理破坏, 且最后演化结果同样不唯一. 当对周期做改变时, 或者得到图 3(a) (实线) 所示, 回不到初态; 或者如图 3(b) 所示, 回到初态; 而且我们同样发现 p 的数值同样近似为 0.0 和 0.23, 与对 γ 分阶段扫描情况一致. 也就是说, 对能级差分阶段扫描过程中虽然有拐点出现, 不符合绝热定理, 但是得到了相同的结果.

另外, 我们还发现, 在上述两种演化过程中, 演

化结果还依赖于初始态的选择, 如果选择将凝聚体全部布局在较深势阱, 即 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 作为初态, 则不论 c 取多大, 凝聚体都会经历满足绝热定理的演化过程而回到初态, 如图 4 所示, 这和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 作为初态的情况完全不同, 体现出一种不对称的特征. 那么, 如何解释这些奇特的行为呢?

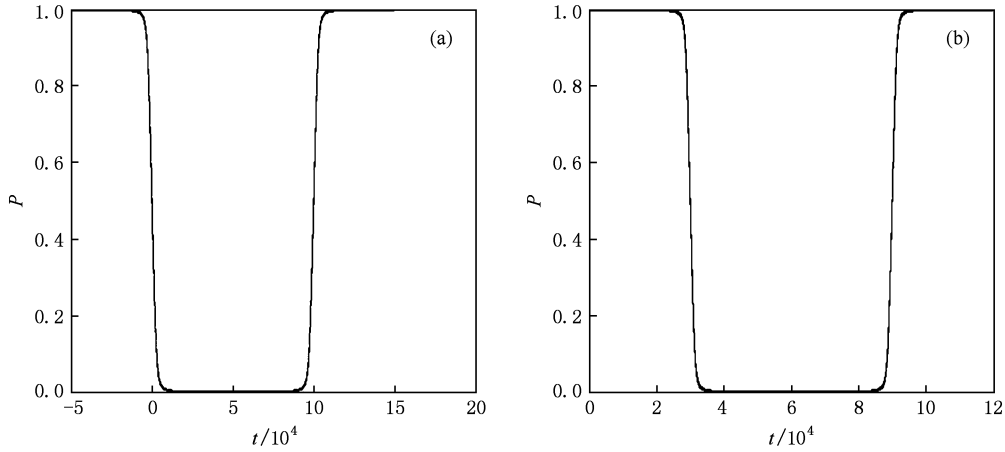


图 4 BEC 凝聚体分布随时间的变化曲线 初态为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 模式. (a) 能级差分阶段线性变化, 其中 $v = 0.1, \alpha = 0.0001$, 时间为 $t_0 - t_i = 100000$, c 分别为 0.0, 0.05, 2.0, 所得到的曲线一致; (b) 能级差余弦变化, 其中, $T = 120000, \gamma_0 = 4.0, v = 0.1, c$ 分别为 0.0, 0.05, 2.0, 所得到的曲线一致

2.3. 分析与讨论

我们在图 5 中给出了模型 (1) 式的能级结构图, 其中 $c > v$. 可以看到 (见图 5(a)), 在高性能上

出现了一个环状结构.

引入布局数 $p = |\psi_1|^2$, 双模式的相对相位差 $\theta = \theta_2 - \theta_1$, 则非线性两能级系统可以转化成如下经典 Hamilton 系统

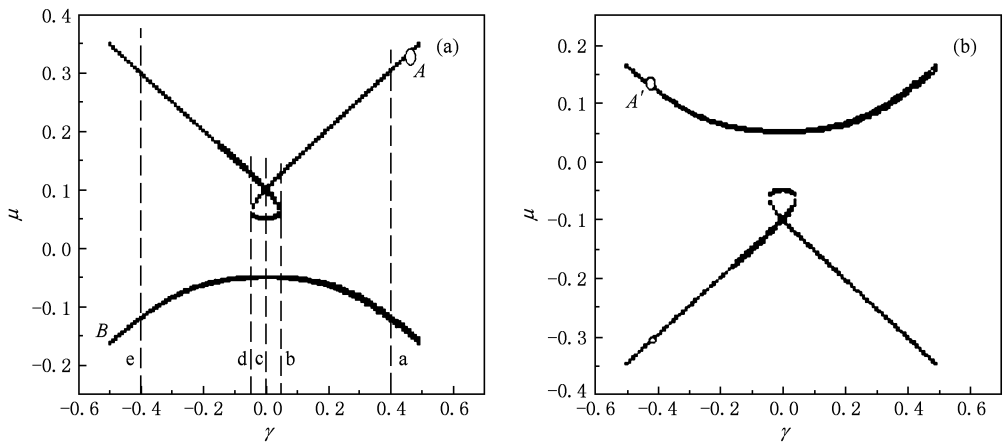


图 5 非线性 Landau-Zener 模型的能级图 图中取值为 $v = 0.1, c = 0.2$. (a) 为正向扫描过程的能级图, (b) 为正向扫描结束后逆向扫描过程的能级图

$$H = v \sqrt{p(1-p)} \cos\theta + \frac{c}{4}(2p-1)^2 + \frac{\gamma}{2}(2p-1), \quad (2)$$

而 p 和 θ 构成正则变量, 满足 $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$. 通过计算可以得到相位图, 如图 6 所示. 而且可以通过求解下述方程得到图 6 中极值点

$$\theta = 0, \pi, \quad (3)$$

$$\frac{v(1-2p)}{2\sqrt{p(1-p)}} - c(1-2p) + \gamma = 0. \quad (4)$$

图 6 中均取 $c > v$ 的情况, γ 所取的值对应于能级图 5(a) 上的虚线 a, b, c, d, e. 若选择 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为初态, γ 是从正值向负值变化. 首先看图 6(a), 当 $\gamma = 0.4$ 时, 出现对应本征态的两个椭圆点 p_1, p_2 , 当势阱中凝聚体从系统的本征态开始演化, 随 γ 减小, 演化到图 5(a) 的环状结构边缘, 此时劈裂出双曲线点 p_3 . 当 $\gamma = 0$ 时, 两势阱能级发生转换, 凝聚体原子发生空间隧穿和能级间跃迁, 较多部分原子隧穿到另一个势阱中, 即保留在能级, 其他较少部分留在原来势阱. 之后系统演化至图 6(d) 中椭圆点 p_1 和双曲线点 p_3 融合消失. 图 6(e) 为环结构消失后的演化态. 如图 5(b) 所示, 此时初态处于非本征态, 大部分

原子处于高能级势阱中, 小部分原子处于低能级势阱中, 此状态演化至 $\gamma = -\gamma_0$ 然后开始逆向演化, 由于此时系统处于非本征态, $p \approx 0.77$, 当演化至 $\gamma = 0$, 势阱的能级位置再一次发生转换时, 一种可能是各势阱中凝聚体原子不发生能级跃迁, 依旧停留在这个非本征态上, 此时 $p \approx 0.23$, 如图 3(a) (实线) 所示, 即在逆向扫描过程中遵从绝热定理. 另一种可能性为低能级势阱中那小部分的原子全部跃迁到另一个能级上, 得到图 3(b) $p = 0.0$, 即又回到了初态. 从计算中可以看出是否回到初态依赖于周期的选择, 这是因为在能级转变的时候, 模型实际上并没有严格停留在一个状态上, 而是有小幅的振荡, 如图 3 所示. 当周期不同, 会导致在转变点 ($\gamma = 0$) 系统的状态, 即振幅和相位, 都有所不同, 从而导致了演化结果的不同.

如果初态选择为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即凝聚体全部放置于较深的右势阱, 沿着图 5 中 B 点所标示的路径从左向右演化, 在此过程中, 没有环状结构, 绝热定理不会破坏, 随着跨过 $\gamma = 0$ 点发生能级转换, 凝聚体全部隧穿至左势阱, 到达 $\gamma = -\gamma_0$ 之后往回演化, 依然沿着没有环状结构的路径绝热演化回到初态. 因此, 这种情况下不论演化过程, 还是演化结果都和以

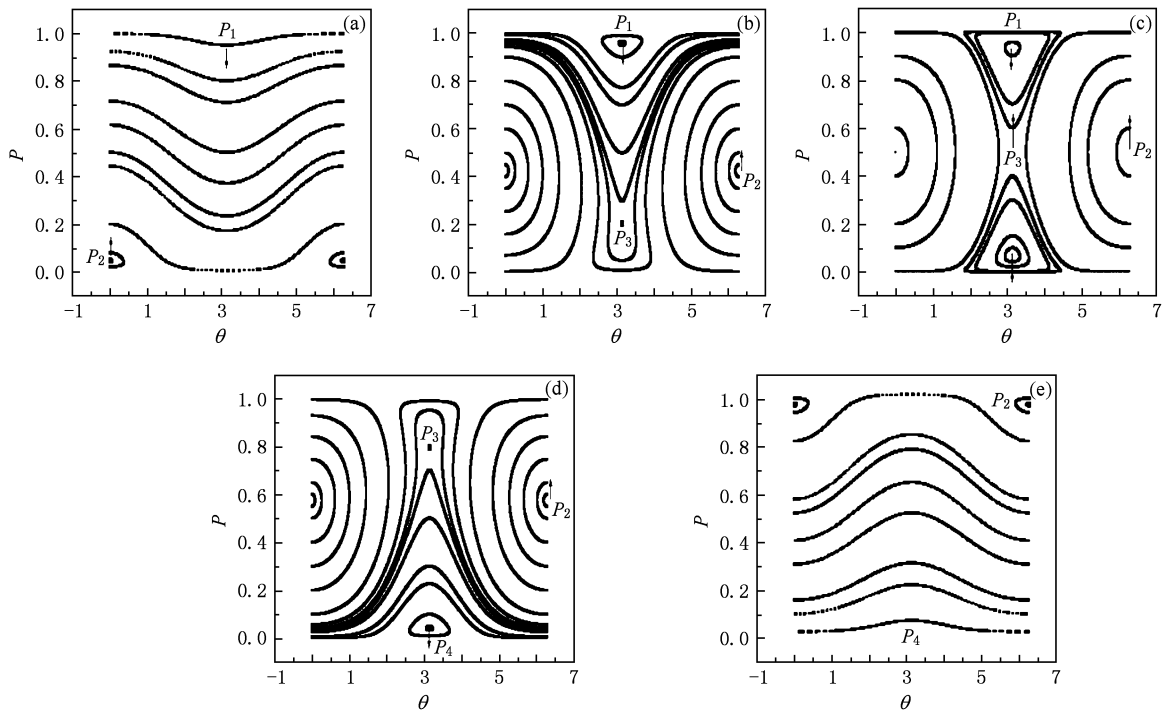


图 6 取 $c = 0.2, v = 0.1$ 时 Hamilton 量在不同参数 γ 下的相空间结构图 (a) $\gamma = 0.4$, (b) $\gamma = 0.045$, (c) $\gamma = 0$, (d) $\gamma = -0.045$, (e) $\gamma = -0.4$. 箭头代表不动点 p_i 随着 γ 减小的移动方向

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为初态完全不同,从而表现出不对称特征.

3. 结 论

通过缓慢改变双势阱中 BEC 凝聚体的能级差,使此系统产生循环演化来研究凝聚体的绝热隧穿.发现当原子相互作用达到一定强度时,初态全部放置在浅势阱(高能级)中的凝聚体所经历的演化过

程会破坏量子绝热定理,发生了凝聚体的空间隧穿和能级跃迁,而且演化结束后,系统可能回到初态,也可能不回到初态,而这依赖于演化周期的选择.另外,我们还发现,隧穿结果还依赖初态的选择,当从浅势阱演化会出现绝热隧穿的破坏,而从深势阱(低能级)出发则不会,体现出不对称特征.通过给出此模型的能级图及相图,我们发现能级中出现的环状结构改变了本征态的演化特征,从而导致了上述破坏绝热定理的结果和初态依赖的不对称特征.

- [1] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [2] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [3] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [4] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [5] Cataliotti F S, Burger S, Fort C, Maddaloni P, Minardi F, Trombettoni A, Smerzi A, Inguscio M 2001 *Science* **293** 843
- [6] Shin Y, Saba M, Schirotzek A, Pasquini T A, Leanhardt A E, Pritchard D E, Ketterle W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 150401
- [7] Zollner S, Meyer H D, Schmelcher P 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013621
- [8] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [9] Adhikari S K, Lu H, Pu H 2009 *Phys. Rev. A* **80** 063607
- [10] Li G Q, Chen H J, Xue J K 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1449 (in Chinese) [李高清、陈海军、薛具奎 2010 物理学报 **59** 1449]
- [11] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [12] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
- [13] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Choi D, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
- [14] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [15] Wang G F, Ye D F, Fu L B, Chen X Z, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033414
- [16] Ishkhanyan A, Mackie M, Carmichael A, Gould P L, Javanainen J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 043612
- [17] Duan S Q, Fu L B, Liu J, Zhao X G 2005 *Phys. Lett. A* **346** 315
- [18] Ye D F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5071 (in Chinese) [叶地发、傅立斌、赵鸿、刘杰 2007 物理学报 **56** 5071]
- [19] Nesterenko V O, Novikov A N, Cherny A Y, Cruz F F S, Suraud E 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 235303
- [20] Wu L H, Duan W S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4110
- [21] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3699 (in Chinese) [王沙、杨志安 2009 物理学报 **58** 3699]
- [22] Wang S, Yang Z A 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 729 (in Chinese) [王沙、杨志安 2009 物理学报 **58** 729]
- [23] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳、刘彬、傅立斌、赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
- [24] Xi Y D, Wang D L, Ding J W, She Y C, Wang F J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东、王登龙、丁建文、余彦超、王凤姣 2010 物理学报 **59** 3720]

Adiabatic tunneling of Bose-Einstein condensate in double-well potential*

Huang Fang Li Hai-Bin[†]

(Department of Applied Physics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

(Received 9 February 2010; revised manuscript received 16 May 2010)

Abstract

We studied the adiabatic tunneling of Bose-Einstein condensates (BEC) in double-well potential with circle adiabatic variation of energy level spacing. We found that the adiabatic theorem is violated during the evolution of BEC, when the initial state is chosen such that all condensate atoms are in the shallow well and the interaction between atoms is strong enough. Furthermore, we found that the condensates can return to the initial state or not, depending on the evolution periods. In addition, we also found the evolution is dependent on the choice of initial state, which indicates an asymmetric character. With the help of the graph of energy levels and the phase diagram, we explained the results obtained.

Keywords: Bose-Einstein condensates, Landau-Zener model, adiabatic tunneling

PACS: 03.65.-w, 03.75.Lm, 42.50.-p

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10605020) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. R107377).

[†] Corresponding author. E-mail: hbli@zjut.edu.cn