

## 耦合 KdV 方程的双峰孤立子及其稳定性\*

石玉仁<sup>†</sup> 张娟 杨红娟 段文山

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2010 年 5 月 13 日收到; 2010 年 5 月 20 日收到修改稿)

利用扩展双曲函数法求解了耦合 KdV 方程, 得到了 6 类精确解, 其中一类为具有双峰状结构的单孤子解. 在不同的极限情况下, 该解分别退化为耦合 KdV 方程的扭结状或钟状孤波解. 文中对双峰孤立波的稳定性进行了数值研究, 结果表明: 耦合 KdV 方程的双峰孤立波在长波小振幅扰动和小振幅钟型孤立波扰动下, 均稳定.

**关键词:** 耦合 KdV 方程, 双峰孤立子, 稳定性

**PACS:** 04.30.Nk, 02.90.+p

## 1. 引言

现代科学中的许多非线性现象, 如流体力学中的非线性波动, 非线性光学中的激光现象以及等离子体等领域中的非线性现象, 大都可以借助非线性演化方程来很好地描述. 如何求解这些非线性演化方程并研究其解的特征, 是非线性科学研究中的重要组成部分. 近年来, 很多学者提出和发展了许多新的方法, 如齐次平衡法<sup>[1-4]</sup>、双曲函数法<sup>[5-8]</sup>、Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[9-11]</sup>、同伦分析法<sup>[12-16]</sup>、F-展开法<sup>[17-20]</sup>、辅助方程法<sup>[21,22]</sup>、分离变量法<sup>[23-25]</sup>、Riccati 函数法<sup>[26-28]</sup>、LS 解法<sup>[29]</sup>等. 这些方法都可以借助计算机代数系统得以部分甚至完全实现, 从而大大提高了工作效率.

耦合 KdV 方程可以用来描述分层流体内部波之间的近共振相互作用<sup>[30]</sup>, 也可用来描述星际间波的近共振相互作用<sup>[31]</sup>等. 文献[32-35]对此方程的解与守恒律进行了研究. 文献[2]中应用齐次平衡法求解了下列形式的耦合 KdV 方程

$$\begin{aligned} u_t + 6\alpha uv_x - 6vv_x + \alpha u_{xxx} &= 0, \\ v_t + 3\alpha uv_x + \alpha v_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

得到了它的单孤立波解. 方程(1)中  $\alpha$  为常数, 表征了非线性效应与色散效应. 若  $v=0$ , 则方程(1)就是 KdV 方程, 故可将其看作是 KdV 方程的一个推广.

双曲函数法是求解非线性演化方程的一种直接法, 被广泛用于求解非线性演化方程的孤立波解. 本文利用双曲函数法的基本思想, 通过选择新的展开函数, 得到了耦合 KdV 方程(1)的一类新型的孤立波解, 该解为具有双峰状结构的行波, 两波包具有相同的高度和宽度. 波在传播过程中, 两个波峰以相同的速度传播, 它们之间的距离保持不变. 在不同的参数条件下, 该孤立波既可能向右传播, 也可能向左传播. 本文对该类孤立波的稳定性进行了数值研究, 结果表明: 耦合 KdV 方程的双峰孤立波, 在小振幅长波和钟型孤立波扰动下, 均稳定.

## 2. 耦合 KdV 方程的双峰孤子解

考虑方程(1)的行波解

$$\begin{aligned} u(x, t) = \phi(\xi), \quad v(x, t) = \varphi(\xi), \\ \xi = kx - \omega t + x_0, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $k$  和  $\omega$  为待定常数, 分别为波数和圆频率; 相速度为  $v_p = \frac{\omega}{k}$ ;  $x_0$  为任意常数. 此时(1)式变为

$$\begin{aligned} -\omega\phi' + 6\alpha k\phi\phi' - 6k\varphi\phi' + \alpha k^3\phi''' &= 0, \\ -\omega\varphi' + 3\alpha k\varphi\phi' + \alpha k^3\varphi''' &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

其中撇号表示  $\frac{d}{d\xi}$ .

引入展开函数

\* 国家自然科学基金(批准号:10575082, 11047010), 教育部科学技术研究重点项目(批准号:209128)和西北师范大学科技创新工程(批准号: NWNNU-KJCXGC-03-53)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: shiy@nwnu.edu.cn

$$f(\xi) = \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)},$$

$$g(\xi) = \frac{(1-p)\cosh(\xi) + (1+p)\sinh(\xi)}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)}, \quad (4)$$

其中  $p, r$  为常数. 容易验证,  $f(\xi)$  和  $g(\xi)$  满足下列关系:

$$f'(\xi) = -fg, \quad g'(\xi) = 1 - g^2 - rf,$$

$$g^2 = 1 - 2rf + (r^2 - p)f^2. \quad (5)$$

文献[5]中的双曲函数法是这里  $p=1$  的特例. 若在复数范围内考虑, 注意到双曲函数与三角函数的关系, 这里选择的展开函数也包含了三角函数.

设方程(3)有解

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + b_1 g + b_2 fg,$$

$$\varphi(\xi) = A_0 + A_1 f + A_2 f^2 + B_1 g + B_2 fg, \quad (6)$$

其中  $a_0, A_0, a_i, b_i, A_i, B_i (i=1, 2)$  为待定常数. 把(6)式代入(3)式并反复利用(5)式, 使得所得方程中仅含  $f$  和  $g$  的幂次项且  $g$  的幂次不大于1, 然后令  $f^i g^j (i=0, 1, \dots; j=0, 1)$  项的系数为零, 得包含所有待定常数的一组超定非线性代数方程组, 通过求解该方程组就能最终得到方程(1)的精确解.

利用上述方法, 我们得到了方程(1)的6组解. 所得解也适合于所选参数是复数的情况, 但本文仅讨论参数取实数的情形.

### 情况 1

$$u(x, t) = \frac{\omega - k^3 \alpha}{3k\alpha} + 2k^2 r \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}$$

$$+ 2k^2 (p - r^2) \left[ \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2,$$

$$v(x, t) = \pm \frac{kr(\omega - k^3 \alpha)}{\sqrt{6} \sqrt{k\omega(p - r^2) + k^4 \alpha(2p + r^2)}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2 \sqrt{k\omega(p - r^2) + k^4 \alpha(2p + r^2)}}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}, \quad (7)$$

其中  $k, \omega, r, p$  为任意常数(所选参数应使(7)式中开方运算在实数范围内有意义). 这里参数  $p, r$  的取值对解的结构有着重要的影响. 图 1(a) 和 (b) 分别显示了  $\alpha=2, k=1, \omega=1, r=1, x_0=0, t=0, p=0.9$  与  $p=0$  两种情况下  $u$  和  $v$  (取“+”号) 的图像. 图 1(a) 中, 两波均为钟型孤立波; 图 1(b) 中  $u$  为钟

型孤立波而  $v$  为扭结型孤立波.

进一步, 我们发现: 在  $\frac{p}{r^2} \rightarrow 0^+$  的过程中,  $u(x, t)$  从钟型孤立波逐渐演变为双峰孤立波, 而  $v(x, t)$  逐渐从钟型孤立波演变为双扭结型孤立波. 图 2 显示了  $\alpha=2, k=1, r=1, x_0=0, t=0, p=10^{-6}$  时(7)式

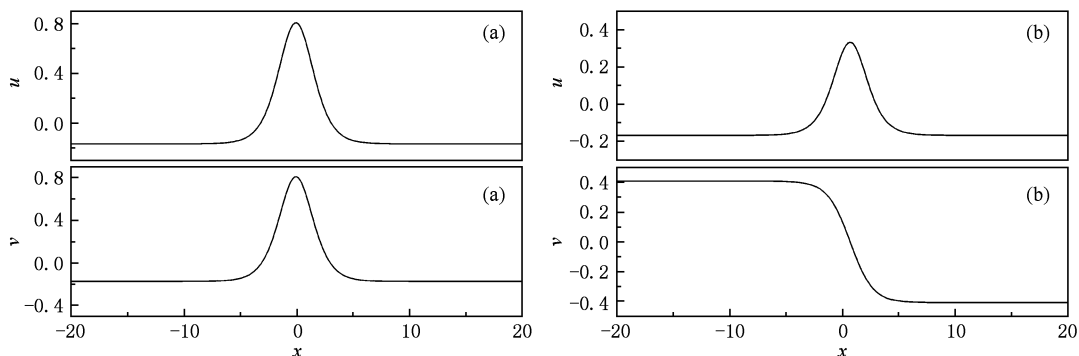


图 1 耦合 KdV 方程的孤立波解 ( $\alpha=2, k=1, \omega=1, r=1, x_0=0, t=0$ ), (a)  $p=0.9$ , (b)  $p=0$

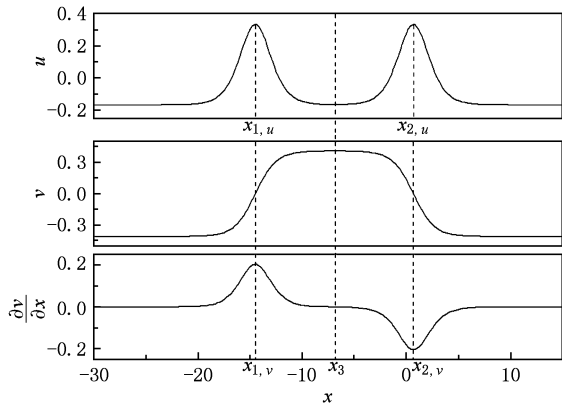


图2 耦合 KdV 方程的双峰孤立波和双扭结型孤立波解 ( $\alpha = 2, k=1, \omega=1, r=1, x_0=0, t=0, p=10^{-6}$ )

(取“+”号) $u(x, t)$ 与 $v(x, t)$ 的图像. 注意到 $u(x, t)$ 的图像有 2 个同向波峰, 可称其为“同向双峰孤立

子”; $\frac{\partial v}{\partial x}$ 的图像有两个反向波峰, 可称其为“反向双峰孤立子”. 值得说明的是, 图 2 中所示双峰孤立子是作为一个整体以相同的速度向前传播. 在传播过程中, 波形不发生变化, 两波峰之间的距离也保持不变, 所以不应看作两个孤子.

对图 2 所示的孤立波, 容易得

$$u(\infty, t) = \frac{\omega - k^3 \alpha}{3k\alpha},$$

$$v(\infty, t) = \pm \frac{kr(\omega - k^3 \alpha)}{\sqrt{6} \sqrt{k\omega(p - r^2) + k^4 \alpha(2p + r^2)}}, \quad (8)$$

这里正负号分别和(7)式中正负号相对应. 两波峰之间的距离定义为波宽 $W_u, W_v$ , 为

$$W_u = |x_{2,u}(t) - x_{1,u}(t)|,$$

$$W_v = |x_{2,v}(t) - x_{1,v}(t)|, \quad (9)$$

其中 $x_{1,u}, x_{2,u}, x_{1,v}$ 和 $x_{2,v}$ 为图 2 中所示点. 理论计算得

$$W_u = \frac{1}{|k|} \ln \left( \frac{r^2 - 2p + \sqrt{4p^2 - 5pr^2 + r^4}}{r^2 - 2p - \sqrt{4p^2 - 5pr^2 + r^4}} \right),$$

$$W_v = \frac{1}{|k|} \ln \left( \frac{r + \sqrt{8p + r^2} + \sqrt{4p + 2r^2 + 2r \sqrt{8p + r^2}}}{r + \sqrt{8p + r^2} - \sqrt{4p + 2r^2 + 2r \sqrt{8p + r^2}}} \right). \quad (10)$$

波的振幅 $A_u, A_v$ 可定义为

$$A_u = \max_{-\infty < x < +\infty} (|u(x, t) - u(\infty, t)|),$$

$$A_v = \max_{-\infty < x < +\infty} (|v(x, t) - v(\infty, t)|). \quad (11)$$

理论计算得 $kx_3 - \omega t + x_0 = \frac{1}{2} \ln p$  即 $x_3 = \frac{1}{2k} \ln p + v_p t$

$-\frac{1}{k}x_0$ 处, $u$ 和 $v$ 取得极值. 对图 2 所示的解, 显然

在 $x_3$ 处 $u$ 取得极小值而 $v$ 取得极大值. 经计算得

$$A_u = |u(x_{1,u}, t) - u(\infty, t)|$$

$$= |u(x_{2,u}, t) - u(\infty, t)|$$

$$= \frac{k^2 r^2}{2|p - r^2|},$$

$$A_v = |v(x_3, t) - v(\infty, t)|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{\omega k(p - r^2) + \alpha k^4(2p + r^2)}}{\sqrt{p} + r}. \quad (12)$$

当 $0 < p \ll r^2$ 时

$$A_u \approx \frac{1}{2} k^2,$$

$$A_v \approx \frac{\sqrt{2k(\alpha k^3 - \omega)}}{3}. \quad (13)$$

(12)和(10)式表明:钟型孤立波 $u$ 的振幅与波数的平方成正比而两波峰之间的距离与波数成反比, 说明在 $r, p$ 一定的情况下, 振幅较大的双峰孤立波, 两波峰之间的距离较近. 对于双扭结型孤立波 $v$ , 波宽与波数成反比而振幅与波数之间并非简单的正比关系. 还可看出, 参数 $\alpha$ 仅影响波 $v$ 的振幅, 而不影响波速与波宽, 也不影响波 $u$ 的振幅. 由于波数 $k$ 和圆频率 $\omega$ 都是任意的(只需保证前面的表达式有意义即可), 所以同样振幅的波, 可以具有不同的传播速度, 这与 KdV 方程表示的孤立波, 有着明显的不同. 进一步的理论分析表明,  $\frac{\sqrt{p}}{r}$ 越小, 两波峰之间的距离越大; 当 $p \rightarrow 0$ 时,  $W_u, W_v \rightarrow +\infty$ . 事实上, 当 $p = 0$ 时, 波已分别变为如图 1(b)所示的钟型(单峰)和单扭结型孤立波.

### 情况 2

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{\omega - 4k^3\alpha}{3k\alpha} + 2k^2p \left[ \frac{2}{(1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \\
 v(x,t) &= \pm \sqrt{\frac{2k(4k^3\alpha - \omega)}{3}} \frac{(1-p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1+p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}{(1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中  $k, \omega, p$  为任意非零常数. 理论分析表明, 当  $p < 0$  时该解存在间断点.

### 情况 3

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= 4k^2r \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \\
 &\quad - 4k^2r^2 \left[ \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \\
 v(x,t) &= \pm 2 \sqrt{2\alpha}k^2r \frac{2[\cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)]}{[2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)]^2}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中  $\omega = \alpha k^3, k, r$  为任意非零常数.

### 情况 4

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{\omega - k^3\alpha}{3k\alpha} + 4k^2r \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \\
 &\quad - 4k^2r^2 \left[ \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \\
 v(x,t) &= \pm \frac{\omega - k^3\alpha}{3k} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \pm 2 \sqrt{2\alpha}k^2r \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \\
 &\quad \mp 2 \sqrt{2\alpha}k^2r^2 \left[ \frac{2}{2r + \cosh(kx - \omega t + x_0) + \sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中  $k, \omega, r$  为任意非零常数. 可以看出, 这里  $v = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2}}u$ .

### 情况 5

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{\omega - 4k^3\alpha}{3k\alpha} + 4k^2p \left[ \frac{2}{(1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \\
 v(x,t) &= \pm \frac{\omega - 4k^3\alpha}{3k} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \pm 2 \sqrt{2\alpha}k^2p \left[ \frac{2}{(1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2, \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中  $k, \omega, p$  为任意非零常数. 也可看出, 这里  $v = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2}}u$ .

### 情况 6

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{\omega - k^3\alpha}{3k\alpha} + k^2r \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \\
 &\quad + k^2(p - r^2) \left[ \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \right]^2 \\
 &\quad + \varepsilon_1 k^2 \frac{\sqrt{r^2 - p}}{\sqrt{r^2 - p}} \frac{2[(1-p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1+p)\sinh(kx - \omega t + x_0)]}{[2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)]^2}, \\
 v(x,t) &= \varepsilon_2 \frac{2 \sqrt{k(p - r^2)} \frac{(\omega - k^3\alpha)}{6}}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)} \\
 &\quad - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{k(k^3\alpha - \omega)}{6}} \frac{(1-p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1+p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}{2r + (1+p)\cosh(kx - \omega t + x_0) + (1-p)\sinh(kx - \omega t + x_0)}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1, k, \omega, r, p$  为任意常数.

下面针对情形 1 下所得解进行稳定性研究.

### 3. 双峰孤立波的稳定性

设  $u_0 = u_0(x, t), v_0 = v_0(x, t)$  是耦合 KdV 方程 (1) 的一组精确解, 下面数值研究该解的稳定性. 在初始时刻对  $u_0, v_0$  加一相对很小的扰动  $u'(x, 0)$  与  $v'(x, 0)$ , 记  $u(x, t) = u_0(x, t) + u'(x, t), v(x, t) = v_0(x, t) + v'(x, t)$  且设  $u(x, t)$  与  $v(x, t)$  满足方程 (1), 则可通过考察  $u(x, t)$  和  $v(x, t)$  随时间的演变而得知  $u_0$  和  $v_0$  的稳定性. 数值求解时, 采用如下有限差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + [2\alpha(u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n)] \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & - 2(v_{j+1}^n + v_j^n + v_{j-1}^n) \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & + \alpha \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = 0, \\ & \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + [\alpha(u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n)] \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & + \alpha \frac{v_{j+2}^n - 2v_{j+1}^n + 2v_{j-1}^n - v_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\Delta x, \Delta t$  分别为空间和时间方向步长. 该格式为三层显式格式, 截断误差为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ , 条件稳定. 计算第一层时, 采用下列格式启动

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} + [2\alpha(u_{j+1}^0 + u_j^0 + u_{j-1}^0)] \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2\Delta x} \\ & - 2(v_{j+1}^0 + v_j^0 + v_{j-1}^0) \frac{v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0}{2\Delta x} \\ & + \alpha \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2(\Delta x)^3} = 0, \end{aligned}$$

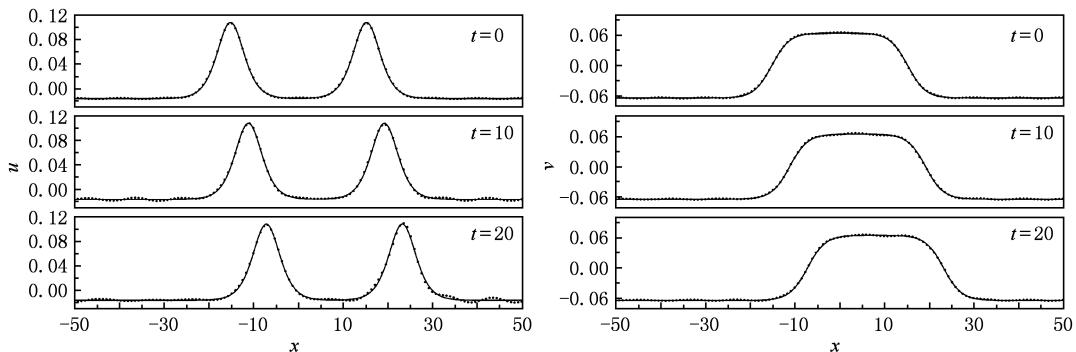


图 3 长波扰动下不同时刻的波形图(实线为无扰动时的波形)

$$\begin{aligned} & \frac{v_j^1 - v_j^0}{\Delta t} + [\alpha(u_{j+1}^0 + u_j^0 + u_{j-1}^0)] \frac{v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0}{2\Delta x} \\ & + \alpha \frac{v_{j+2}^0 - 2v_{j+1}^0 + 2v_{j-1}^0 - v_{j-2}^0}{2(\Delta x)^3} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

本文着重考察耦合 KdV 方程的双峰孤立波解的稳定性, 故取  $u_0$  和  $v_0$  为 (7) 式 (取 “+” 号), 所用方法也适合于考察其他解的稳定性. 计算时, 各参数取为:  $\alpha = 2, k = 0.5, \omega = 0.2, r = 1, p = 10^{-6}, x_0 = \frac{1}{2} \ln p$ . 此时波的振幅  $A_u \approx 0.125, A_v \approx 0.129$ ; 波宽  $W_u \approx W_v \approx 30.4036$ ; 波速  $v_p = 0.4$ , 表明波向右传播. 数值计算时, 步长取为  $\Delta x = 0.1, \Delta t = 1 \times 10^{-4}$ , 空间范围取为  $[-100, 100]$ , 采用周期性边界条件. 下面考虑两种初始扰动下解的稳定性.

#### 3.1. 简谐波扰动

记初始扰动为

$$u'(x, 0) = v'(x, 0) = A' \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (21)$$

其中  $A'$  和  $\lambda$  分别是扰动波的振幅和波长. 图 3 显示了  $A' = 0.001, \lambda = 10$  时  $u(x, t)$  与  $v(x, t)$  在不同时刻的图像. 从图 3 可以看出, 在所考察的时间范围内,  $u$  和  $v$  均稳定, 表明在长波扰动下, 耦合 KdV 方程 (1) 的双峰孤立子与双扭结孤立子是稳定的. 图 4 显示了  $A' = 0.001, \lambda = 2$  时  $u(x, t)$  与  $v(x, t)$  在不同时刻的图像. 从图 4 可以看出, 在所考察的时间范围内, 双扭结型孤子稳定而双峰孤立子失稳, 表明耦合 KdV 方程 (1) 的双扭结型孤子具有比双峰孤立子更强的稳定性.

实际计算过程中观察到: 在简谐波扰动下, 耦合 KdV 方程 (1) 的双峰孤立子会在一定时间内基本稳定, 而随着时间的推移, 波逐渐失稳. 初始扰动的振幅越小, 扰动的波长越长, 双峰孤立子保持基本

稳定的时间也越长. 换句话说, 短波扰动下的双峰孤立子更容易失稳. 在不同的情形下, 双扭结型孤

立子都表现出比双峰孤立子更强的抗干扰性.

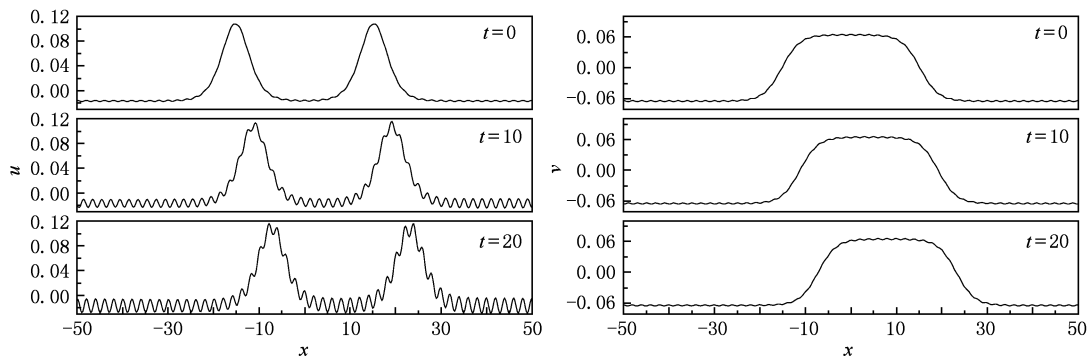


图4 短波扰动下不同时刻的波形图

### 3.2. 钟型孤立波扰动

取初始扰动为

$$u'(x,0) = v'(x,0) = A' \operatorname{sech} k'(x+l), \quad (22)$$

其中  $A'$  为扰动的振幅, 改变  $k'$  可以改变扰动的宽度, 调节  $l$  可以改变扰动的位置. 图5显示了  $A' =$

0.005,  $k' = 0.5, l = 0$  时波形的演变. 可以看出, 随着时间的演变, 初始时刻局域性的钟型扰动逐渐演变为整个周期上的扰动, 但没观察到扰动幅度的明显增加, 表明在这种情况下耦合 KdV 的双峰孤立子及双扭结型孤立子仍然稳定.

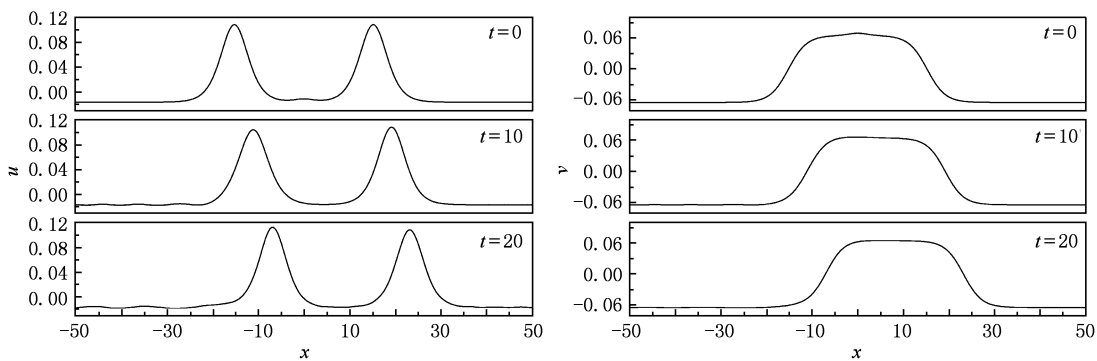


图5 钟形孤立波扰动下不同时刻的波形图

## 4. 结 论

本文基于双曲函数展开法思想, 通过选择新的展开函数, 得到了耦合 KdV 方程的 6 类精确解, 其中一类为具有扭结-反扭结状结构的双扭结单孤子解与具有双峰结构的双峰孤立子. 文中对该类孤子解的稳定性进行了数值研究, 结果表明: 双峰孤

立子在长波小振幅扰动下具有很好的稳定性, 而在短波小振幅扰动下出现失稳; 在这两种扰动下, 双扭结型孤立子均表现出较强的稳定性. 在小振幅的钟型孤立波扰动下, 双峰孤立子和双扭结型孤立子均稳定. 对于由其他非线性演化方程描述的物理系统中, 是否也存在双扭结型孤立波以及这样的波是否稳定, 是个值得研究的问题.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169

[2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67

[3] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

- [4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
- [5] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Sci. Chin. Ser. A* **30** 1103 (in Chinese) [张桂茂、李志斌、段一士 2000 中国科学(A) **30** 1103]
- [6] Lü K P, Shi Y R, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
- [7] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B, Yang H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁、吕克璞、段文山、洪学仁、赵金保、杨红娟 2003 物理学报 **52** 267]
- [8] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江、张鸿庆 物理学报 2004 **53** 2434]
- [9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2001 物理学报 **50** 2068]
- [10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [11] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵强 2002 物理学报 **51** 718]
- [12] Liao S J, Chen C, Xu H 2006 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (BeiJing: Science Press) (in Chinese) [廖世俊、陈晨、徐航 2006 超越摄动: 同伦分析方法导论 (北京: 科学出版社)]
- [13] Shi Y R, Xu X J, Wu Z X, Wang Y H, Yang H J, Duan W S, Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吕克璞 2006 物理学报 **55** 1555]
- [14] Yang H J, Shi Y R, Duan W S, Lü K P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3064 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2007 物理学报 **56** 3064]
- [15] Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6791 (in Chinese) [石玉仁、汪映海、杨红娟、段文山 2007 物理学报 **56** 6791]
- [16] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese) [石玉仁、杨红娟 2009 物理学报 **59** 67]
- [17] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 2003 *Phys. Lett. A* **318** 84
- [18] Zhou Y B, Wang M L, Miao T D 2004 *Phys. Lett. A* **323** 77
- [19] Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1574 (in Chinese) [张金良、王跃明、王明亮 2003 物理学报 **52** 1574]
- [20] Li X Z, Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4045 (in Chinese) [李向正、张金良、王跃明、王明亮 2004 物理学报 **53** 4045]
- [21] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]
- [22] Li X Z, Li X Y, Zhao L Y, Zhang J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2203 (in Chinese) [李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2008 物理学报 **57** 2203]
- [23] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett. A* **351** 398
- [24] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 2765
- [25] Ma H C, Ge D J, Yu Y D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1448
- [26] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
- [27] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [28] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [29] Li X Z, Zhang W G, Yuan S L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 744 (in Chinese) [李向正、张卫国、原三领 2010 物理学报 **59** 744]
- [30] Gear J, Grimshaw R 1984 *Stud. Appl. Math.* **70** 235
- [31] Gottwald G, Grimshaw R, Malomed B 1997 *Phys. Lett. A* **227** 47
- [32] Hirota R, Satsuma J 1981 *Phys. Lett. A* **85** 407
- [33] Dodd R, Frody A 1982 *Phys. Lett. A* **89** 168
- [34] Oevel W 1983 *Phys. Lett. A* **94** 404
- [35] Lu B Q 1994 *Phys. Lett. A* **189** 25

# The single solitary wave with double peaks of the coupled KdV equation and its stability\*

Shi Yu-Ren<sup>†</sup> Zhang Juan Yang Hong-Juan Duan Wen-Shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 13 May 2010; revised manuscript received 20 May 2010)

## Abstract

We obtained six classes of exact solutions for the coupled KdV equation by the extended hyperbola function expansion Method. One of the solutions is a solitary wave solution, which has two peaks. This solution is reduced to the kink or bell-like soliton solution of the coupled KdV equation under different limitations. We also investigated the stability of the single solitary wave solution with double peaks numerically. The results indicate that the solution is stable when the amplitude of the disturbance, which has long wave length, and is very small.

**Keywords:** coupled KdV equation, single soliton with double peaks, stability

**PACS:** 04.30.Nk, 02.90.+p

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10575082, 11047010), the Key Program of Science and Technology Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 209128), and the Science and Technology Innovation Program of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNKJXGC-03-53).

<sup>†</sup> E-mail: shiyu@nwnu.edu.cn