

组合 KdV 方程的双扭结孤立波 及其稳定性研究*

石玉仁[†] 张娟 杨红娟 段文山

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2010年3月30日收到; 2010年4月30日收到修改稿)

利用扩展的双曲函数法得到了 combined KdV-mKdV (cKdV) 方程的几类精确解, 其中一类为具有扭结一反扭结状结构的双扭结单孤子解. 在不同的极限情况下, 该解分别退化为 cKdV 方程的扭结状或钟状孤波解. 理论分析表明, cKdV 方程既有传播型孤立波解, 也有非传播型孤立波解. 文中对双扭结型孤立波解的稳定性进行了数值研究, 结果表明, cKdV 方程既存在稳定的双扭结型孤立波, 也存在不稳定的双扭结型孤立波.

关键词: cKdV 方程, 双扭结单孤子, 稳定性

PACS: 04.30.Nk, 02.90.+p

1. 引言

对非线性演化方程 (nonlinear evolution equations, 简称 NEE) 的求解是非线性科学的一个重要组成部分. 近年来, 很多学者提出和发展了许多新的方法, 如齐次平衡法^[1-4]、双曲函数法^[5-8]、Jacobi 椭圆函数展开法^[9-11]、同伦分析法^[12-17]、 F -展开法^[18-21]、辅助方程法^[22-24]、分离变量法^[25-27]、Riccati 函数法^[28-30]等. 这些方法都可以借助计算机代数系统得以部分甚至完全实现, 从而大大提高了工作效率.

1970年, Tappert 等在文献 [31] 中导出了 combined Korteweg-de Vries-mKdV (cKdV) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha u^2 + \gamma u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

其中 α, β, γ 为常数, α 与 γ 表征非线性效应, β 表征色散效应. 当 $\alpha = 0$ 时, 方程 (1) 变为 KdV 方程; 当 $\gamma = 0$ 时, 方程 (1) 变为 mKdV 方程. 方程 (1) 是流体力学中的重要模型方程^[31], 它也能很好地描述具有非谐束缚粒子的一维非线性晶格中波的传播^[32]; 在等离子体物理中, 它描述了无 Landau 衰变的小振幅离子声波的传播^[33]; 在固体物理中, 可用于解释通

过氟化钠单晶的热脉冲的传播^[34]等.

双曲函数展开法是求解非线性演化方程的一种直接法, 可借助计算机代数系统如 Maple, Mathematica 等得以部分甚至完全实现. 该方法被广泛用于求解非线性演化方程的孤立波解. 本文利用双曲函数展开法的基本思想, 通过选择新的展开函数, 得到了 cKdV 方程的一类新型的孤立波解, 该解具有扭结一反扭结状结构. 在不同的参数条件下, 该孤立波既可能向右传播, 也可能向左传播; 一定条件下, 它也可以为非传播的. 文中对该类孤立波的稳定性进行了数值研究, 结果表明, cKdV 方程既存在稳定的双扭结状孤立波, 也存在不稳定的双扭结状孤立波.

2. cKdV 方程的双扭结单孤子解

考虑方程 (1) 的行波解

$$u(x, t) = \phi(\xi), \quad \xi = kx - \omega t + x_0, \quad (2)$$

式中 k 和 ω 为待定常数, 分别为波数和圆频率; 相速度为 $v = \frac{\omega}{k}$; x_0 为任意常数. 此时 (1) 式变为

$$-\omega\phi' + k(\alpha\phi^2 + \gamma\phi)\phi' + \beta k^3\phi''' = 0, \quad (3)$$

其中撇号表示 $\frac{d}{d\xi}$.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10575082, 11047010)、教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 209128) 和西北师范大学科技创新工程 (批准号: NWNNU-KJCXGC-03-53) 资助的课题.

[†] E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn

引入展开函数

$$f(\xi) = \frac{2}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)},$$

$$g(\xi) = \frac{(1-p)\cosh(\xi) + (1+p)\sinh(\xi)}{2r + (1+p)\cosh(\xi) + (1-p)\sinh(\xi)}, \quad (4)$$

其中 p, r 为常数. 容易验证, $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 满足下列关系:

$$f'(\xi) = -fg,$$

$$g'(\xi) = 1 - g^2 - rf,$$

$$g^2 = 1 - 2rf + (r^2 - p)f^2. \quad (5)$$

容易看出, 文献[5]中的双曲函数法这里是 $p = 1$ 的特例.

设(3)式有解

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1 f(\xi) + b_1 g(\xi), \quad (6)$$

其中 a_0, a_1, b_1 为待定常数. 把(6)式代入(3)式并反复利用(5)式, 使得所得方程中仅含 f 和 g 的幂次项且 g 的幂次不大于1, 然后令 $f^i g^j (i = 0, 1, \dots; j = 0, 1)$ 项的系数为零, 得包含所有待定常数的一组超定非线性代数方程组, 通过求解该方程组就能最终得到方程(2)的精确解.

利用上述方法, 我们得到了下面3种情况下方程(1)的解(下面所得解也适合于所选参数是复数的情况, 本文只讨论参数取实数的情况).

情况 1

$$b_1 = 0, \quad a_0 = \pm \frac{r}{2\alpha} \frac{\sqrt{6k^2\alpha\beta(p-r^2)}}{p-r^2} - \frac{\gamma}{2\alpha},$$

$$a_1 = \pm \frac{\sqrt{6k^2\beta(p-r^2)}}{\alpha},$$

$$\omega = \frac{k^3\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)} - \frac{k\gamma^2}{4\alpha}. \quad (7)$$

此时方程(1)的解整理后为

$$u(x, t) = \pm \frac{r}{2\alpha} \frac{\sqrt{6k^2\alpha\beta(p-r^2)}}{p-r^2} - \frac{\gamma}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{6k^2\beta(p-r^2)}}{\alpha} \times \frac{2}{2r + pe^{-(kx-\omega t+x_0)} + e^{kx-\omega t+x_0}}, \quad (8)$$

其中 k 为任意常数. 值得说明的是, 上述解既存在于 $\alpha\beta < 0$ (要求 $r^2 > p$) 的情况下, 也存在于 $\alpha\beta > 0$ (要求 $r^2 < p$) 的情况下. 考虑不同参数情况下解的特征, 分析结果如表1所示.

表1 不同参数情形下(8)式表示的解的特征

	$\alpha\beta < 0 (r^2 > p)$	$\alpha\beta > 0 (r^2 < p)$
$r > 0, p > 0$	孤立波, 无奇点	钟型孤立波, 无奇点
$r > 0, p = 0$	扭结型孤立波, 无奇点	—
$r > 0, p < 0$	有奇点	—
$r < 0, p > 0$	有奇点	钟型孤立波, 无奇点
$r < 0, p = 0$	有奇点	—
$r < 0, p < 0$	有奇点	—
$r = 0, p > 0$	—	钟型孤立波, 无奇点
$r = 0, p = 0$	—	—
$r = 0, p < 0$	有奇点	—

注: —表示不存在该情况.

图1(a)和(b)分别显示了 $\alpha = 6, \beta = -1, \gamma = 1, k = 1, r = 10, x_0 = 0, t = 0, p = 0$ 与 $p = 2$ 两种情况下(8)式(取“—”号)的图像. 图1(a)为扭结型孤立波, 图1(b)为钟型孤立波, 表明在 $\alpha\beta < 0$ 的情况下, cKdV 方程(1)既存在扭结型孤立波解, 也存在钟型孤立波解.

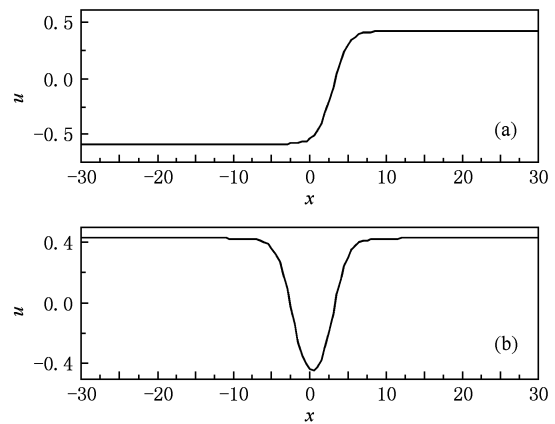


图1 cKdV 方程的扭结型和钟型孤立波解 ($\alpha = 6, \beta = -1, \gamma = 1, k = 1, r = 10, x_0 = 0, t = 0$) (a) $p = 0$, (b) $p = 2$

进一步, 我们发现: 在 $\frac{p}{r^2} \rightarrow 0^+$ 的过程中, 钟型孤立波逐渐演变为双扭结型孤立波. 图2(a)和(b)分别显示了 $\alpha = 6, \beta = -1, \gamma = 1, k = 1, r = 10, x_0 = 0,$

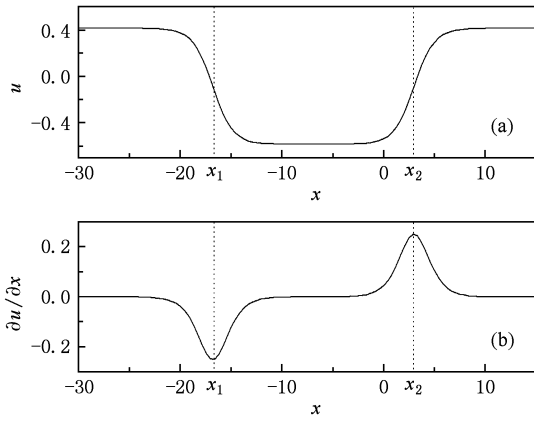


图2 cKdV 方程的双扭结型孤立波解 ($\alpha=6, \beta=-1, \gamma=1, k=1, r=10, x_0=0, t=0, p=10^{-6}$) (a) $u(x,t)$, (b) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

$t=0, p=10^{-6}$ 时 (8) 式 (取“-”号) $u(x,t)$ 与 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的图像. 注意到 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的图像有两个反向波峰, 可称其为“反向双峰孤立子”. 由于这里考虑

的是行波解, 波在传播过程中, 波形不发生变化, 两波峰之间的距离也保持不变.

对图 2 所示的双扭结型孤立波, 容易得

$$u(\infty, t) = \pm \frac{r}{2\alpha} \frac{\sqrt{6k^2\alpha\beta(p-r^2)}}{p-r^2} - \frac{\gamma}{2\alpha} \quad (0 < p < r^2), \quad (9)$$

这里正负号分别和 (8) 式中正负号相对应. 波的振幅 A 和波宽 W 可分别定义为

$$A = \max_{-\infty < x < +\infty} (|u(x,t) - u(\infty, t)|),$$

$$W = |x_2(t) - x_1(t)|, \quad (10)$$

其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为图 2 所示位置. 理论计算得有限远极值点为 $\xi = kx - \omega t + x_0 = \frac{1}{2} \ln p$, 峰值为

$$u = \pm \frac{r}{2\alpha} \frac{\sqrt{6k^2\alpha\beta(p-r^2)}}{p-r^2} - \frac{\gamma}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{6k^2\beta(p-r^2)}{\alpha}} \frac{1}{r + \sqrt{p}}, \quad (11)$$

且有

$$A = \frac{\sqrt{6\beta(p-r^2)}}{\alpha} |k|,$$

$$W = \frac{1}{|k|} \ln \left(\frac{r + \sqrt{8p+r^2} + \sqrt{4p+2r^2+2r\sqrt{8p+r^2}}}{r + \sqrt{8p+r^2} - \sqrt{4p+2r^2+2r\sqrt{8p+r^2}}} \right),$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{k^2\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)} - \frac{\gamma^2}{4\alpha}. \quad (12)$$

(12) 式表明: 波的振幅与波数成正比而波的宽度与波数成反比, 说明振幅越大的波其宽度越小, 这一点和 KdV 方程所描述的孤立子有着类似的性质. 从速度的表达式可以看出, 并非振幅越大的波速度也越大, 这一点不同于由 KdV 方程所描述的孤子. 从 (12) 式还可看出, 该孤子既可以是向右传播的 ($v > 0$ 即 $\frac{k^2\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)} - \frac{\gamma^2}{4\alpha} > 0$ 时), 也可以为向左传播的 ($v < 0$ 即 $\frac{k^2\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)} - \frac{\gamma^2}{4\alpha} < 0$ 时), 该孤子也可以为非传播性孤子 ($v = 0$ 即 $\frac{k^2\beta(2p+r^2)}{2(p-r^2)} - \frac{\gamma^2}{4\alpha} = 0$ 时). 这说明由 cKdV 方程描述的孤子, 有着比 KdV 方程描述的孤子更为丰富的结构特征. 从前面的结果也可看出, 方程 (1) 中系数 γ 仅影响波的速度, 而不影响

波的形状、振幅以及波宽. 理论结果表明, \sqrt{p}/r 越小, 两波峰之间的距离越大; 当 $p \rightarrow 0$ 时, $W \rightarrow +\infty$. 事实上, 当 $p = 0$ 时, 波已演变为单扭结型孤立波.

情况 2 $r = 0, a_0 = -\frac{\gamma}{2\alpha}, a_1 = 0, b_1 =$

$$\pm k \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}, \omega = -2k^3\beta - \frac{k\gamma^2}{4\alpha}.$$

此时方程 (1) 的解整理后为

$$u(x,t) = -\frac{\gamma}{2\alpha} \pm k \sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}} \frac{e^{2(kx-\omega t+x_0)} - p}{e^{2(kx-\omega t+x_0)} + p}, \quad (13)$$

其中 p, k 为任意常数. 若要求该解为实函数, 则它仅存在于 $\alpha\beta < 0$ 的情况下. 理论分析表明, 当 $p < 0$ 时, 该解存在间断点; 当 $p = 0$ 时, 该解为平凡解 (常数); 当 $p > 0$ 时, 该解为 cKdV 方程的扭结型孤立波解.

情况3 $a_0 = -\frac{\gamma}{2\alpha}, a_1 = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{3(p-r^2)\beta}{2\alpha}}, b_1 = \varepsilon_2 k \sqrt{-\frac{3\beta}{2\alpha}}, \omega = -\frac{1}{2}k^3\beta - \frac{k\gamma^2}{4\alpha}$.

其中 $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1, k$ 为任意常数. 与前面类似, 此时的实函数解仅存在于 $\alpha\beta < 0$ (从而要求 $r^2 \geq p$) 的情况下. 理论分析表明, 当 $r, p \geq 0$ 时, 该解为 cKdV 方程的扭结型孤立波解, 无奇性; 否则解存在间断点.

3. 双扭结孤立波的稳定性

设 $u_0 = u_0(x, t)$ 是 cKdV 方程的一个精确解, 下面数值研究该解的稳定性. 在初始时刻对 u_0 加一相对很小的扰动 $u'(x, 0) = \varepsilon(x)$, 记 $u(x, t) = u_0(x, t) + u'(x, t)$ 且设 $u(x, t)$ 满足方程(1), 则可通过考察 $u(x, t)$ 随时间的演变而得知 u_0 的稳定性. 数值求解时, 采用如下有限差分格式:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} + \left[\frac{\alpha}{9}(u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{3}(u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \right] \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & + \beta \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2(\Delta x)^3} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\Delta x, \Delta t$ 分别为空间和时间方向步长. 该格式为三层显式格式, 截断误差为 $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$, 条件稳定. 计算第一层时, 采用下列格式启动

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} + \left[\frac{\alpha}{9}(u_{j+1}^0 + u_j^0 + u_{j-1}^0)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{3}(u_{j+1}^0 + u_j^0 + u_{j-1}^0) \right] \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2\Delta x} \\ & + \beta \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2(\Delta x)^3} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

本文着重考察 mKdV 方程的双扭结单孤立波解的稳定性, 故取 u_0 为(8)式(取“-”号), 所用方法也适合于考察其他解的稳定性. 数值计算时, 各参数取为 $k=1, r=10, p=10^{-6}, x_0 = \frac{1}{2}\ln p, \gamma > 0$; 步长取为 $\Delta x=0.05, \Delta t=2 \times 10^{-5}$. 下面考察两种参数情况时解在随机扰动下的稳定性.

3.1. $\alpha > 0, \beta < 0$

不妨取 $\alpha=6, \beta=-1$, 从而波的振幅 $A \approx 1$, 波宽 $W \approx 19.807$. 数值计算时, 空间范围取为 $[-50, 50]$, 采用周期性边界条件. 考虑初始时刻各节点上

的扰动为一随机数, 随机数区间取为 $[-0.02, 0.02]$. 由于孤子的局域性, 故设初始时刻的扰动也限于某个区间, 这里取为 $[-20, 20]$.

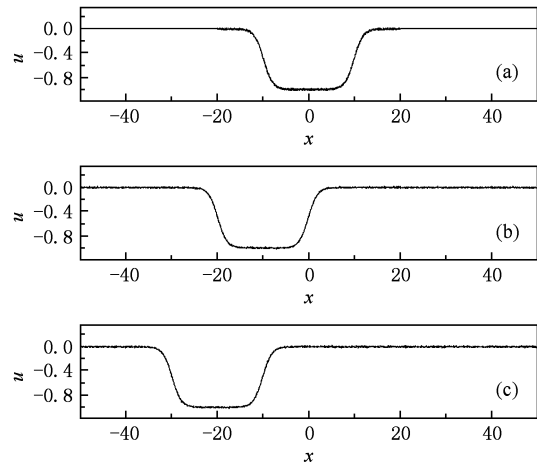


图3 随机扰动下不同时刻左传播双扭结型孤立波的波形 (a) $t=0$, (b) $t=10$, (c) $t=20$

由前面的讨论知 γ 的取值会影响波速的大小和方向. 用以上参数计算得: $\gamma \approx 3.4641$ 时, 孤子为非传播性的(驻孤波); $\gamma > 3.4641$ 时, 孤子向左传播; $\gamma < 3.4641$ 时, 孤子向右传播. 图3, 图4, 图5分别显示了 $\gamma=6, v=0$ ($\gamma \approx 3.4641$), $\gamma=1$ 时, 不同时刻的波形. 从图中可以看出: 随着时间的演变, 初始时刻的局部扰动逐渐扩散为整个周期上的扰动, 但扰动幅度始终局限于有限范围内, 表明此时的左传播型、右传播型和非传播型双扭结孤立波均稳定.

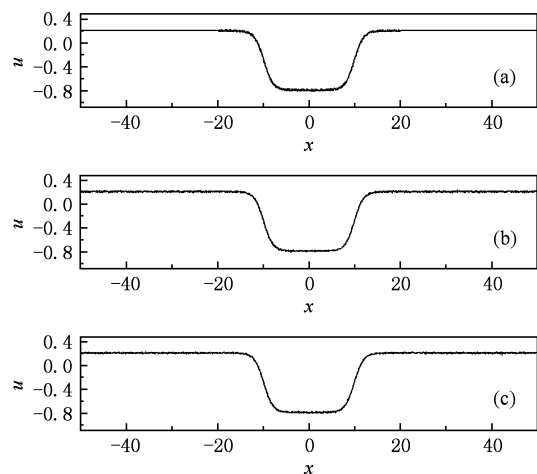


图4 随机扰动下不同时刻非传播双扭结型孤立波的波形 (a) $t=0$, (b) $t=10$, (c) $t=20$

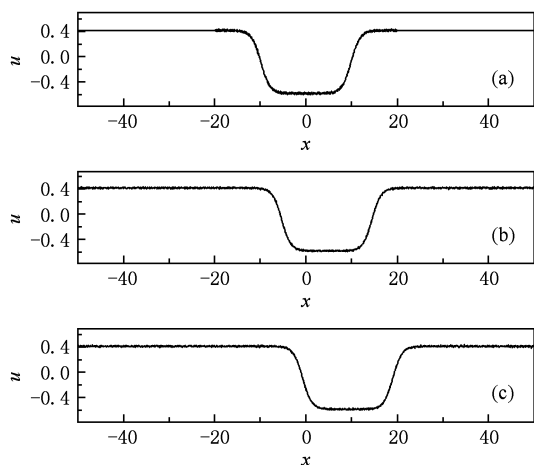


图5 随机扰动下不同时刻右传播双扭结型孤立波的波形 (a) $t=0$, (b) $t=10$, (c) $t=20$

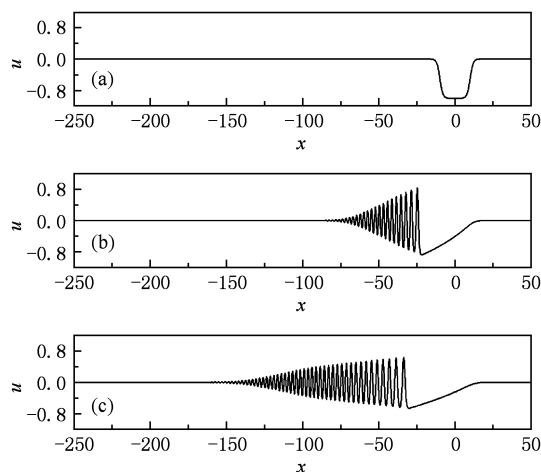


图6 当 $\alpha = -6, \beta = 1$ 时, 双扭结型波随时间演变图 (a) $t=0$, (b) $t=3$, (c) $t=6$

3. 2. $\alpha < 0, \beta > 0$

此时,不妨取 $\alpha = -6, \beta = 1$, 则仍有 $A \approx 1$, 波宽 $W \approx 19.807$. 数值计算时,为尽量减小边界对结果的影响,空间范围适当加大,取为 $[-200, 200]$, 并采用绝热边界条件. 由于在数值计算过程中存在舍入误差,故可认为舍入误差就是对解的扰动,该扰动相对来说非常小. 舍入误差具有随机性,所以这里考察的仍然是随机扰动对解的影响.

用前述参数计算得: $\gamma \approx 3.4641$ 时, (8) 式表示非传播性的驻波; $\gamma < 3.4641$ 时, 它表示向左传播的行波; $\gamma > 3.4641$ 时, 它表示向右传播的行波. 图 6 为 $\gamma = 6$ 时不同时刻数值结果的波形图. 从图 6 可以看出: 随着时间的推移, 初始时刻的双扭结状波逐渐演变为向左传播的振荡型波 (色散波), 初始时刻的波形逐渐消失殆尽, 表明此时的双扭结状行波是不稳定的. 当 γ 取其他值时, 所得数值解的波形图与图 6 类似, 这里从略.

综上所述, cKdV 方程 (1) 的双扭结孤立波解在不同的参数情况下具有不同的稳定性. 当 $\alpha > 0, \beta < 0$ 时, (8) 式表示的解具有很强的稳定性; 而当 $\alpha < 0, \beta > 0$ 时, (8) 式表示的行波解是不稳定的.

4. 结 论

本文基于双曲函数展开法思想, 通过选择新的展开函数, 得到了 cKdV 方程的几类精确解, 其中一类为具有扭结一反扭结状结构的双扭结单孤子解. 在不同的极限情况下, 该解分别退化为 cKdV 方程的扭结状或钟状孤波解. 文中对双扭结型孤子解的稳定性进行了数值研究, 结果表明, 在不同的参数情形下, 该解表现出不同的稳定性. 对于由其他非线性演化方程描述的物理系统中, 是否也存在双扭结型孤立波以及这样的波是否稳定, 是个值得研究的问题.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
 [2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67
 [3] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵, 张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
 [4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
 [5] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Sci. China (Series A)* **30** 1103 (in Chinese) [张桂戎, 李志斌, 段一士 2000 中国科学, A 辑 **30** 1103]
 [6] Lü K P, Shi Y R, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞, 石玉仁, 段文山, 赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
 [7] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B, Yang H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁, 吕克璞, 段文山, 洪学仁, 赵金保, 杨红娟 2003 物理学报 **52** 267]
 [8] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江, 张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]
 [9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50**

- 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2001 物理学报 **50** 2068]
- [10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [11] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵强 2002 物理学报 **51** 718]
- [12] Liao S J, Chen C, Xu H 2006 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [廖世俊、陈晨、徐航 2006 超越摄动: 同伦分析方法导论(北京: 科学出版社)]
- [13] Liao S J, Pop I 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 271
- [14] Shi Y R, Xu X J, Wu Z X, Wang Y H, Yang H J, Duan W S, Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吕克璞 2006 物理学报 **55** 1555]
- [15] Yang H J, Shi Y R, Duan W S, Lü K P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3064 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2007 物理学报 **56** 3064]
- [16] Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6791 (in Chinese) [石玉仁、汪映海、杨红娟、段文山 2007 物理学报 **56** 6791]
- [17] Shi Y R, Yang H J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 67 (in Chinese) [石玉仁、杨红娟 2009 物理学报 **59** 67]
- [18] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 2003 *Phys. Lett. A* **318** 84
- [19] Zhou Y B, Wang M L, Miao T D 2004 *Phys. Lett. A* **323** 77
- [20] Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1574 (in Chinese) [张金良、王跃明、王明亮 2003 物理学报 **52** 1574]
- [21] Li X Z, Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4045 (in Chinese) [李向正、张金良、王跃明、王明亮 2004 物理学报 **53** 4045]
- [22] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]
- [23] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]
- [24] Li X Z, Li X Y, Zhao L Y, Zhang J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2203 (in Chinese) [李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2008 物理学报 **57** 2203]
- [25] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett. A* **351** 398
- [26] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 2765
- [27] Ma H C, Ge D J, Yu Y D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1448
- [28] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
- [29] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [30] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [31] Tappert F D, Varma C M 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 1108
- [32] Wadati M 1975 *J. Phys. Soc. Jpn.* **38** 673
- [33] Konno K, Ichikawa Y H 1974 *J. Phys. Soc. Jpn.* **37** 1631
- [34] Narayanamurti V, Varma C M 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 1105

The single solitary wave with double kinks of the combined KdV equation and its stability*

Shi Yu-Ren[†] Zhang Juan Yang Hong-Juan Duan Wen-Shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 30 March 2010; revised manuscript received 30 April 2010)

Abstract

Based on the ideas of the hyperbola function expansion method, we obtained some analytical solutions of the combined KdV-mKdV (cKdV) equations by introducing new expansion functions. One of the single soliton solutions has the kink-antikink structure, and this solution reduces to the kink-like solution and the bell-like solution under different limitations. Theoretical analysis shows that the cKdV equation has both propagated-type and non-propagated-type solitary wave solutions. We also investigated the stability of the single solitary wave solution with double kinks numerically. The results indicate that the solution may be stable or unstable, depending on different sets of parameters.

Keywords: cKdV equation, single soliton solution with double kinks, stability

PACS: 04.30.Nk, 02.90.+p

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10575082, 11047010), the Key Program of the Science and Technology Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 209128) and the Science and Technology Innovation Program of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNKJXGC-03-53).

[†] E-mail: shiyu@nwnu.edu.cn