

力与耦合系统的交互作用和随机能量共振*

林敏[†] 张美丽

(中国计量学院计量测试工程学院, 杭州 310018)

(2010年4月28日收到; 2010年5月31日收到修改稿)

外界对系统做功的过程就是系统状态发生变化的过程. 根据 Langevin 方程的随机动力学特性, 采用微观动力学和宏观热力学方法, 建立了基于单一随机轨线的耦合双稳系统的热力学关系. 通过力与耦合系统的功交互作用定量地刻画了能量的传递和转换关系, 揭示了耦合系统中存在着的随机能量共振现象. 从做功与能量的关系进行分析, 进一步揭示了随机共振产生的物理本质.

关键词: 耦合双稳系统, 随机热力学, 随机能量共振, 功

PACS: 05.40.Ca, 05.70.-a

1. 引言

随机共振是由 Benzi 等^[1-4] 在研究地球冰川期问题时提出来的, 并将之解释为非线性系统在弱周期力和噪声共同驱动下的协同效应. 随机共振现象涉及非线性系统、外作用信号和噪声三个基本要素, 常用 Langevin 方程来描述. 近 30 年来, 人们针对这三个要素的各自特性, 对随机共振现象进行了广泛而深入的研究^[5-18]. 传统的随机共振是通过调节噪声强度, 并以噪声强度为变量, 将系统输出信号的信噪比作为噪声强度的函数而呈现出的非单调性. 2001 年, Iwai 等^[19] 采用随机能量法分析了 Langevin 方程所描述的非平衡过程的能量转化关系, 提出了用外部驱动力所作的功作为双稳系统随机共振的一种度量^[19,20]. 随后, Seifert 等^[21-23] 对受驱动布朗粒子进行了热力学关系研究, 提出了体系的熵以及熵的产生都可以基于一条随机轨线来定义.

随机力在随机共振中有着特殊的作用. 随机力服从爱因斯坦关系的 Langevin 方程, 该方程揭示了系统的宏观现象与系统的微观涨落和外部扰动的内在联系. 由于微观涨落所产生的随机力的强度与热力学温度成正比. 因此, 采用 Langevin 方程描述的双稳系统随机共振可看作是一个热力学过程. 在

热力学系统的分析中, 常把力的效应当作力与系统及其环境相互作用来研究的, 并将注意力集中在能量参数上. 功是与过程有关的一个物理量, 做功是能量转换和传递的一种方式. 由于随机共振存在着噪声能量与信号能量的转换, 存在着无序到有序的变化, 将做功与能量引入随机共振能更加深刻地揭示这一过程的物理本质.

近年来, 人们分别研究了线性或非线性耦合的随机共振系统, 发现大量耦合的振子形成的阵列可以大大提高系统的随机共振效应. 本文将两个双稳系统通过非线性方式耦合为一多稳态系统^[24,25], 采用微观动力学和宏观热力学方法, 建立了基于单一随机轨线的耦合双稳系统的热力学关系, 通过外力对耦合系统做的功定量地刻画了能量的传递和转换关系, 揭示了耦合系统中存在着的随机能量共振现象.

2. 耦合双稳系统与外界做功

2.1. 耦合系统模型

研究随机共振的单一双稳系统模型为

$$\frac{dx}{dt} = a_0x - b_0x^3 + A\cos(\omega t) + \xi(t), \quad (1)$$

式中 a_0 和 b_0 是双稳系统固有的参数; $A\cos(\omega t)$ ($A \ll 1$ 是幅值、 ω 是频率) 是外界作用到系统的弱周期

* 国家自然科学基金(批准号:10972207)和浙江省自然科学基金(批准号:Y7080111)资助的课题.

[†] E-mail: linm@cjl. edu. cn

力,是持续起作用的; $\xi(t)$ 是热随机力,具有 $\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t)\xi(0) \rangle = 2k_B T\delta(t)$ 的统计性质,其中 k_B 为 Boltzmann 常数、 T 为热力学温度,常用强度 $D = k_B T$ 的高斯白噪声模拟热随机力. (1)式是涉及双稳系统、外界对系统的作用和热噪声三要素的 Langevin 方程,它所描述的是一个热力学系统的演化过程.

本文采用反馈耦合的方法,构建如图 1 所示的反馈耦合控制原理框图.

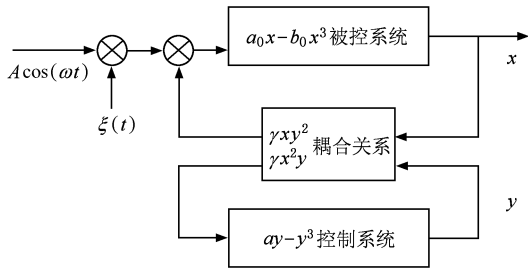


图 1 耦合双稳系统原理图

图 1 耦合控制过程中各变量与参数之间的关系可用如下的耦合方程来表示

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x - b_0 x^3 - \gamma x y^2 + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (2a)$$

$$\frac{dy}{dt} = a y - y^3 - \gamma x^2 y, \quad (2b)$$

式中 γ 是耦合系数. 对于并不满足随机共振匹配条件的被控双稳系统 ($a_0 x - b_0 x^3$), 通过调节控制双稳系统 ($a y - y^3$) 的参数 a 和耦合参数 γ , 使之能人为地产生随机共振或共振的效应更为强烈.

(2)式描述的是布朗粒子处于静态势函数 $V(x, y)$ 为

$$V(x, y) = -\frac{a_0}{2} x^2 + \frac{b_0}{4} x^4 - \frac{a}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 + \frac{\gamma}{2} x^2 y^2 \quad (3)$$

中的过阻尼运动. 耦合系数 γ 和参数 a 的变化影响耦合系统的势函数结构, 从而将对系统的共振产生影响. 考虑周期外力 $A \cos(\omega t)$ 的作用, 耦合系统随时间变化的势函数为

$$U(x, y, t) = V(x, y) - A x \cos(\omega t), \quad (4)$$

记 $\mathbf{X} = (x, y), \zeta(t) = (\xi(t), 0)$, 则(2)式可改写为下式所示的力平衡方程

$$0 = -\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \zeta(t) - \nabla U(\mathbf{X}, t). \quad (5)$$

由于作用到耦合系统的周期力 $A \cos(\omega t)$ 和随

机力 $\xi(t)$ 都是沿 x 方向的, 因而能产生共振的运动也只能是沿着 x 方向.

2.2. 外力对耦合系统所作的功

在外力作用下, 耦合双稳系统的平衡将被破坏, 运动状态的改变必将伴随有能量的转移, 这个转移的能量就是功. 本文采用基于单一随机轨线进行定义^[23].

用 $d\mathbf{X}$ 点积(5)式, 可得能量平衡方程

$$0 = -\left(-\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \zeta(t)\right) \cdot d\mathbf{X} + \nabla U(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X}, \quad (6)$$

由于 $dU(\mathbf{X}, t) = \nabla U(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} + \frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dt$ 是系统内能的变化, 则可得

$$\frac{\partial U(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dt = -\left(-\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \zeta(t)\right) \times d\mathbf{X} + dU(\mathbf{X}, t), \quad (7)$$

记 $dQ = -\left(-\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \zeta(t)\right) \cdot d\mathbf{X}$ 表示耦合系统与外界的热量交换, 则耦合双稳系统的热力学方程为

$$dW = dQ + dU, \quad (8)$$

外力对耦合系统每个周期所作的功为

$$W = \frac{1}{n} \int_{t_0}^{n\tau+t_0} \left\langle \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \right\rangle dt = A\omega \frac{1}{n} \int_{t_0}^{n\tau+t_0} \langle x \sin(\omega t) \rangle dt, \quad (9)$$

式中, $\tau = 2\pi/\omega$ 是外力的周期, τ_0 是初始的瞬变时间, $\langle \cdot \rangle$ 表示求集合平均. 由于 $x(t)$ 是随机变量, 其统计均值^[2]可表示为

$$\langle x(t) \rangle = X(D) \cos[\omega t + \varphi(D)], \quad (10)$$

式中

$$X(D) = \frac{A \langle x^2 \rangle_0}{D} \frac{2r_k}{\sqrt{4r_k^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi(D) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2r_k}\right),$$

其中 $r_k = \frac{\sqrt{2}a_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{a_0^2}{4D}\right)$ 为 Kramers 逃逸率, $\langle x^2 \rangle_0$ 是由 D 决定的静态未扰动系统 ($A = 0$) 的方差. 因此, (9)式可进一步表示为功 W 与噪声强度 D 之间的函数关系

$$W(D) = A\omega \frac{1}{n} \int_{t_0}^{n\tau+t_0} X(D) \times \cos[\omega t + \varphi(D)] \sin(\omega t) dt. \quad (11)$$

(11)式表明噪声强度 D 的变化将影响输出 $x(t)$ 的幅值 $X(D)$ 和相位 $\varphi(D)$, 从而必将影响外力对耦合系统所作的功 W . 由于在不同周期交换的热量、内能的变化和外力的作功并不相同. 本文采用计算 $x(t)$ 单一轨线的多个周期平均值, 并略去初始瞬态的变化.

3. 数值仿真结果与分析

对于如图 1 所示的耦合控制原理框图, 将耦合系统中的其中一个作为固定参数的被控系统, 而另一个参数可调的系统则作为控制系统. 被控系统、控制系统和耦合关系的不同参数取值, 将呈现出各不相同的共振特性. 通过调节噪声强度的大小, 着重分析外力与耦合系统之间的力学相互作用, 并通过周期力对系统作功的大小来定量地刻画能量的传递与转换关系. 数值仿真采用四阶 Runge-Kutta 法, 初始时间 τ_0 取为 20τ , 选择 $n = 50$.

1. 被控系统的参数取 $a_0 = 0.05, b_0 = 1$, 作用到系统的周期力幅值 $A = 0.05$, 频率 $\omega = 0.02\pi$, 当设定控制系统的参数 $a = 1$, 耦合系数 $\gamma = -0.18$ 时, 通过调节噪声强度 D 能使耦合系统产生随机能量共振, 如图 2 所示. 图 2 中的横坐标是噪声强度 D , 纵坐标是周期性外力对耦合系统所作的功 W . 图 2 表明随着噪声强度的变化, 外力对耦合系统所作的功的大小也随之而变, 且呈现出明显的非单调峰值特性. 在无噪声存在 ($D = 0$) 时, 外力对耦合系统所作的功仅为 $W = 0.0053$, 表明噪声在外力对耦合系统作功或能量转换过程中能起积极的作用.

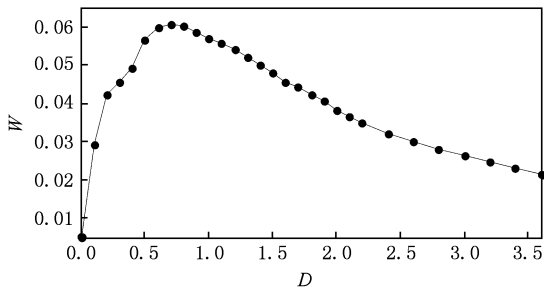


图2 $a_0 = 0.05, a = 1, \gamma = -0.18$ 时 W 与 D 关系曲线

2. 保持作用到系统的周期力幅值 $A = 0.05$, 频率 $\omega = 0.02\pi$ 不变, 而被控系统的参数改为 $a_0 = 0.5, b_0 = 1$. 由于势垒高度太高, $x(t)$ 只能在一个势阱内波动, 外力对系统所做的功极小. 采用图 1 所示

的耦合控制方法, 设定控制系统的参数 $a = 1$, 耦合系数 $\gamma = 0.28$, 通过调节噪声强度 D 也能使耦合系统产生随机能量共振, 如图 3 所示. 比较图 2 和图 3, 功的峰值都发生在 $D = 0.7$ 附近, 相同的输入力作用到具有不同参数的耦合系统, 所作功的大小与噪声强度之间呈现出大体相同的变化曲线.

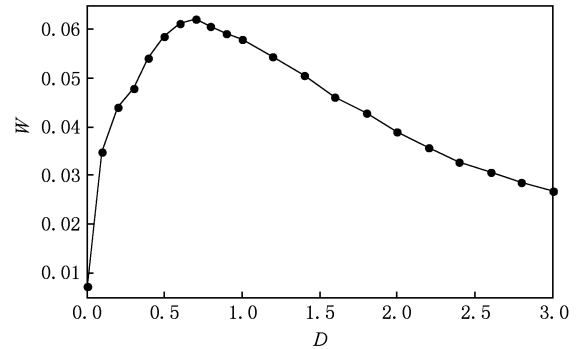


图3 $a_0 = 0.5, a = 1, \gamma = 0.28$ 时 W 与 D 关系曲线

3. 被控系统的参数取 $a_0 = 1, b_0 = 1$, 作用到系统的周期力幅值 $A = 0.3$, 频率 $\omega = 0.1\pi$, 当 $a = 8$, $\gamma = 0.04$ 时, 通过调节噪声强度 D 能使耦合系统产生随机能量共振, 如图 4 所示. 由于作用到耦合系统的外力幅值 A 较大、频率 ω 较高, 对耦合系统所作的功也较大, 且功的大小对噪声强度的敏感区域也较宽.

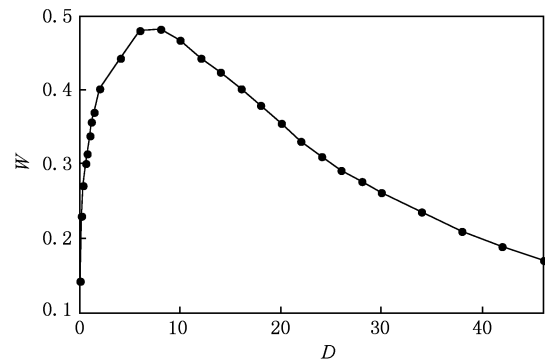


图4 $a_0 = 1, a = 8, \gamma = 0.04$ 时 W 与 D 关系曲线

4. 结 论

研究了布朗粒子在耦合双稳系统中的过阻尼运动, 分析了耦合系统的内能变化、热量交换和外界作功的关系. 从 Langevin 方程出发建立了基于单一轨线的耦合双稳系统的热力学关系, 揭示了耦合

系统中存在着的随机能量共振现象,并分析比较了不同参数的耦合双稳系统从外界获取能量的能力. 能量是物质运动的一种普遍量度,适用于各种运动形态. 将做功与能量引入随机共振能更加深刻地揭

示这一过程的物理本质,并适用于其他不同领域的随机共振研究. 本文对耦合双稳系统随机能量的研究只有初步的,完整的理论方法还有待进一步研究.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** 1453
- [2] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)]
- [4] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [5] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [6] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [7] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 952
- [8] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [9] Lin M, Mao Q M, Zheng Y J, Li D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5021 (in Chinese) [林 敏、毛谦敏、郑永军、李东升 2007 物理学报 **56** 5021]
- [10] Wang C J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030503
- [11] Lin M, Fang L M, Zheng Y J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1725
- [12] Dong X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010502
- [13] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wang W J, Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、郭 焱、汪文津、胡世广 2005 物理学报 **54** 1118]
- [14] Lin M, Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
- [15] Dong X J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0070
- [16] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张 莉、刘 立、曹 力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [17] Lin L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林 灵、闫 勇、梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]
- [18] Guo Y F, Xu W, Wang L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040503
- [19] Iwai T 2001 *Phys. A* **300** 350
- [20] Dan D, Jayannavar A M 2005 *Phys. A* **345** 404
- [21] Saikia S, Roy R, Jayannavar A M 2007 *Phys. Lett. A* **369** 367
- [22] Sekimoto K 2007 *Phys. Rev. E* **76** 060103(R)
- [23] Seifert U 2008 *Eur. Phys. J. B* **64** 423
- [24] Lin M, Huang Y M, Fang L M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2048 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅、方利民 2008 物理学报 **57** 2048]
- [25] Lin M, Fang L M, Zhu R G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2638 (in Chinese) [林 敏、方利民、朱若谷 2008 物理学报 **57** 2638]

Interaction of force and coupled system and stochastic energetic resonance*

Lin Min[†] Zhang Mei-Li

(College of Metrology Technology and Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 28 April 2010; revised manuscript received 31 May 2010)

Abstract

The process of work done on the system by the external force is equivalent to the process of change in system state. The thermodynamic relations of coupled bistable system based on single stochastic trajectories are established by using microcosmic dynamics and macroscopic thermodynamic methods, according to the stochastic dynamics described by Langevin equation. The transmission and conversion relations of energy are quantitatively characterized via interaction of force and work of coupled system, which reveals the coupled system exhibiting stochastic energetic resonance phenomenon. Through analyzing relationship between work done and energy, the physical nature of produced stochastic resonance is further revealed.

Keywords: coupled bistable system, stochastic thermodynamics, stochastic energetic resonance, work

PACS: 05.40.Ca, 05.70.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972207) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y7080111).

[†] E-mail: linn@cjl.u.edu.cn