

# 用多项式和阶跃函数构造网格多涡卷混沌吸引子及其电路实现\*

陈仕必<sup>1)†</sup> 曾以成<sup>1)</sup> 徐茂林<sup>2)</sup> 陈家胜<sup>1)</sup>

1)(湘潭大学材料与光电物理学院,湘潭 411105)

2)(北京信息科技大学,北京 100101)

(2010年4月10日收到;2010年6月4日收到修改稿)

提出一种利用多项式和阶跃函数构造  $N \times M$  涡卷的构造方法. 利用蔡氏电路,传统的利用多项式函数只能产生双涡卷、三涡卷,在此基础上,通过多项式平移得到相空间  $x$  方向的多涡卷,再通过多项式与阶跃函数组合来扩展相空间中指标 2 的鞍焦平衡点,使得多涡卷向  $y$  方向延伸,从而生成网格多涡卷混沌吸引子. 该构造方法的主要特征是通过光滑曲线和非光滑曲线的组合生成网格多涡卷混沌吸引子,能通过调整自然数  $N$  和  $M$  的值实现平面网格任意涡卷混沌吸引子阵列. 理论分析、数值模拟和电路仿真证实了方法的可行性.

**关键词:** 网格多涡卷混沌吸引子, 蔡氏电路, 阶跃函数, 电路实现

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Vx

## 1. 引言

近年来,由于单方向多涡卷混沌吸引子复杂的结构和动力学特性,以及在保密通信和信息隐藏等领域的应用前景,已逐步成为混沌研究领域的一个热点. 相对于分数阶多涡卷系统<sup>[1-3]</sup>,整数阶多涡卷系统由于成熟的理论基础和有效的数学工具的支撑,引起了学者们极大的兴趣和广泛的关注,已有大量的文献报道了相关结果<sup>[4-16]</sup>. 1993年, Suyken等<sup>[4]</sup>成功地构造了单方向的多涡卷系统. 之后人们在 Lorenz 系统<sup>[5]</sup>、Chen 系统<sup>[6]</sup>、Jerk 系统<sup>[7]</sup>和超混沌系统<sup>[8,9]</sup>等各种不同的混沌系统基础上构造了多涡卷混沌吸引子. 但所得的多涡卷只在一个方向上,而且涡卷数目有限. 而实际的应用往往需要多涡卷混沌吸引子向平面和立体延伸.

自 2002 年 Yalcin 等<sup>[17]</sup>成功地构造了网格多涡卷混沌系统以来,人们相继报道了许多新型网格多涡卷系统,如网格多环面系统、网格多涡卷蔡氏系统、三维多涡卷时滞系统、多方向分布多涡卷混沌系统等<sup>[18-27]</sup>,禹思敏等<sup>[24,25]</sup>报道了这方面最新的

研究结果. 多涡卷混沌吸引子,其关键因素在于非线性函数的构造上,通常采用的构造方法有分段线性函数法、正弦函数法、时滞函数法、吸引排斥函数法、饱和函数法和双曲线函数法等<sup>[4-27]</sup>. 而生成网格多涡卷所用到的构造函数多为非光滑函数的组合,其原因在于利用非光滑曲线如分段线性函数、时滞函数来组合时,设计思路简单,同时利用多个折点可以实现混沌控制. 但折点电压计算繁琐,需要电路元件较多、电路实现比较复杂. 如果用光滑曲线构造虽然不便于利用多个折点实现混沌控制,但是很容易弥补后者的不足.

本文在利用多项式构造只能得到双涡卷和三涡卷混沌吸引子的基础上<sup>[28,29]</sup>,运用多项式平移,在蔡氏系统基础上成功实现了单方向的多涡卷混沌吸引子,之后通过与阶跃函数的组合,使得多涡卷向平面上延伸,从而得到网格多涡卷混沌吸引子. 并分析该网格多涡卷混沌系统的基本动力学特性,包括平衡点、分岔图、最大李氏指数谱. 在理论分析和数值模拟的基础上,进行混沌电路的设计和仿真,证实数值模拟和电路仿真结果的一致性.

\* 国家自然科学基金(批准号:60972147)和湖南省自然科学基金(批准号:08JJ5031)资助的课题.

† E-mail: molshibi@163.com

## 2. 构造网格多涡卷混沌系统

在文献[28,29]的基础上,采用多项式平移的方法成功构造单方向多涡卷混沌吸引子,其无量纲状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - \xi f(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\alpha = 15.2, \beta = 18.9, \xi = 0.05 - 1.9$  为控制参数,  $f(x) = a\varphi(x) + b\varphi^3(x)$ , 当  $\varphi(x)$  选为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \sqrt{-\frac{a}{b}} \\ &\times \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \left( \operatorname{sgn}\left(x + (2i + 1) \sqrt{-\frac{a}{b}}\right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \operatorname{sgn}\left(x - (2i + 1) \sqrt{-\frac{a}{b}}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

系统在  $x$  轴方向产生  $(2N + 2)$  涡卷混沌吸引子. 当  $\varphi(x)$  选为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \sqrt{-\frac{a}{b}} \\ &\times \left[ -\operatorname{sgn}(x) + \sum_{i=0}^{N-1} \left( \operatorname{sgn}\left(x + 2i \sqrt{-\frac{a}{b}}\right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \operatorname{sgn}\left(x - 2i \sqrt{-\frac{a}{b}}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

系统在  $x$  轴方向产生  $(2N + 1)$  涡卷混沌吸引子.

令  $N = 1, \xi = 1, a = -0.25, b = 0.35$ . 根据(1)和(2)式以及(1)和(3)式分别得4涡卷和3涡卷混沌吸引子的数值模拟结果,如图1(a),(b)所示.

研究表明,如果在(1)式中加入一阶跃函数  $f(y)$ , 可以使多涡卷向  $y$  方向延伸,从而得到  $N \times M$  网格多涡卷,其无量纲方程式如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - \xi f(x) - f(y)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= \beta[y - f(y)]. \end{aligned} \quad (4)$$

当  $f(y)$  选为

$$\begin{aligned} f(y) &= A_2 \left[ \sum_{j=0}^{M-1} (\operatorname{sgn}(y + (2j + 1)A_2) \right. \\ &\left. + \operatorname{sgn}(y - (2j + 1)A_2)) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

系统能在  $y$  轴方向上产生  $(2M + 1)$  涡卷. 当  $f(y)$  选为

$$\begin{aligned} f(y) &= A_2 \left[ -\operatorname{sgn}(y) + \sum_{j=0}^{M-1} (\operatorname{sgn}(y + (2j)A_2) \right. \\ &\left. + \operatorname{sgn}(y - (2j)A_2)) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

系统能在  $y$  轴方向上产生  $(2M)$  涡卷.

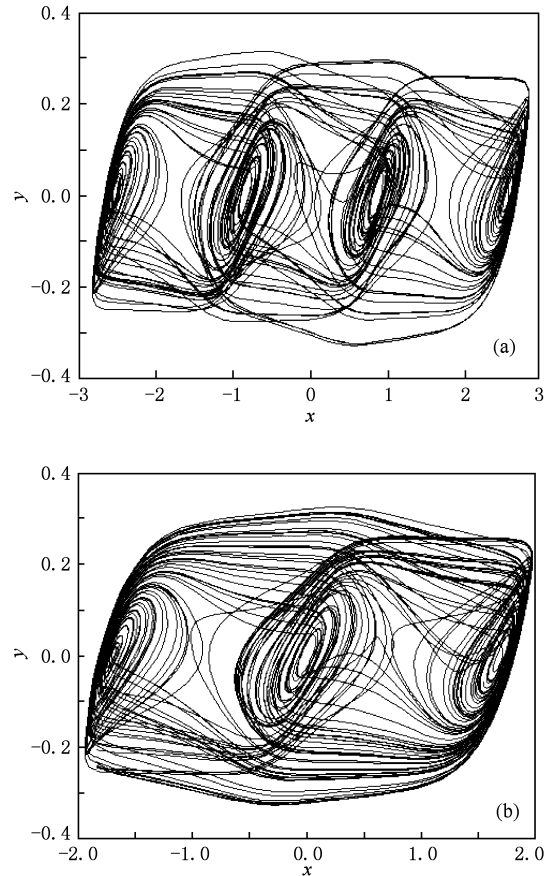


图1 单方向多涡卷混沌吸引子 (a) 4 涡卷混沌吸引子, (b) 3 涡卷混沌吸引子

注意到用(2)–(6)式生成网格多涡卷混沌吸引子时,网格涡卷的数量由  $f(x)$  和  $f(y)$  的具体形式及参数决定,根据(2),(3)式和(5),(6)式的不同组合,结合(4)式可以产生任意的  $N \times M$  网格多涡卷混沌吸引子. 例如,令  $N = 2, M = 1$ , 参数选择:  $\xi = 1, a = -0.25, b = 0.35, A_2 = 0.2$ , 分别得  $6 \times 3, 5 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子的数值模拟结果如图2(a),(b)所示.

## 3. 系统的动力学分析

下面分析网格多涡卷混沌吸引子的基本动力学特性. 令(4)式中的  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 得平衡点方

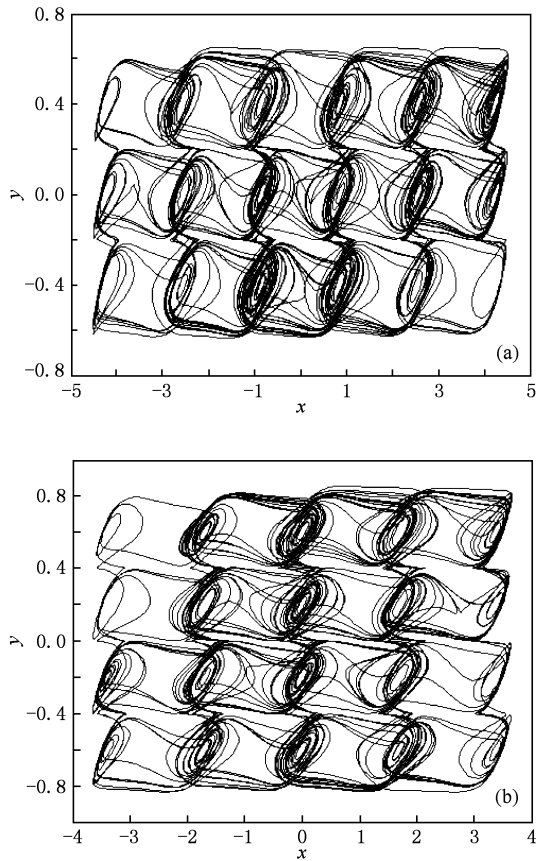


图2 网格多涡卷混沌吸引子 (a) 6×3 网格多涡卷混沌吸引子, (b) 5×4 网格多涡卷混沌吸引子

程为

$$\begin{aligned} \alpha[y - \xi f(x) - f(y)] &= 0, \\ x - y + z &= 0, \\ -\beta[y - f(y)] &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

式中取典型值  $\xi = 1.0$  时, 以  $3 \times 2$  网格多涡卷混沌吸引子为例, 得  $x-y$  相平面上的平衡点分布如图 3 所示, 图中用符号“ $\times$ ”表示指标 2 的鞍焦平衡点, 注意到指标 2 的鞍焦平衡点共有  $3 \times 2$  个, 每个对应的平衡点产生一个涡卷, 故网格涡卷的数量也为  $3 \times 2$  个.

下面分析控制参数  $\xi, A_2$  的物理意义, 根据 (2)–(6) 式及图 3, 参数  $A_2$  可控制  $f(y)$  的高度和宽度, 从而控制平衡点的相对位置以及涡卷的形状与大小, 这对实际电路的设计与实验是很有价值的. 仿真结果表明, 随着涡卷数量的增加, 状态变量会超出有源器件 (如运算放大器等) 的动态范围, 可通过调整  $A_2$  解决这一问题. 另一方面, 参数  $\xi$  可控制平衡点  $x$  方向的位置, 随着参数  $\xi$  的变化, 系统从倍周期分岔进入混沌状态. 因此,  $\xi$  是生成网格多涡卷混沌吸引子的重要参数, 一般选取  $\xi = 0.05$ –

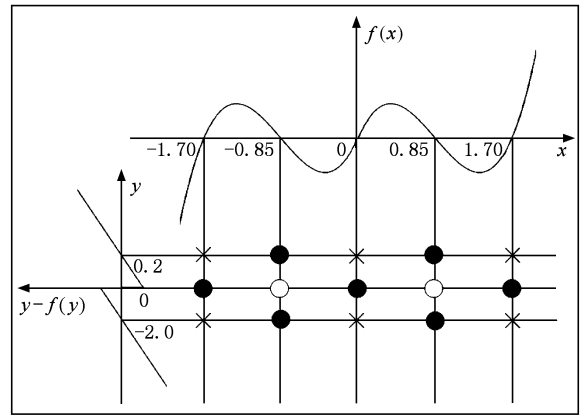


图3  $3 \times 2$  网格多涡卷平衡点分布

1.9, 为了便于生成网格多涡卷混沌吸引子以及电路实现, 选取典型参数  $A_2 = 0.2, \xi = 1.0$ .

根据 (2)–(6) 式, 得指标 2 的鞍焦平衡点的 Jacob 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 2\xi\alpha a & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

对应的特征多项式为  $\lambda^3 + (1 - 2\xi\alpha a)\lambda^2 + (\beta - \alpha - 2\xi\alpha a)\lambda - 2\xi\alpha\beta a = 0$ , 令  $\alpha = 15.2, \beta = 18.9, \xi = 1.0, a = -0.25$ , 得特征值为  $\gamma = -9.0942, \sigma \pm \omega j = 0.2471 \pm 3.9666j$ , 说明图 3 中的标记为“ $\times$ ”的平衡点为指标 2 的鞍焦点.

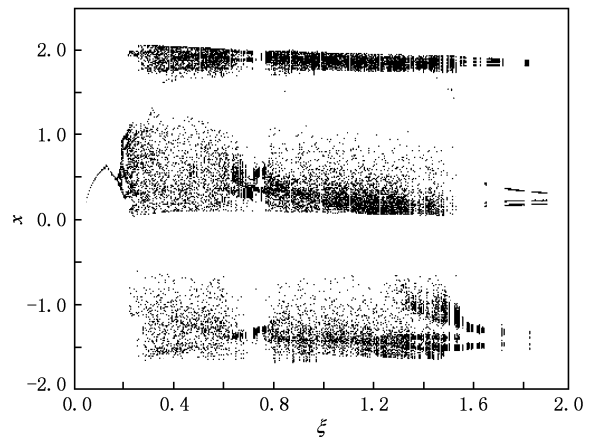


图4 分岔图

根据 (4) 式, 计算随控制参数  $\xi$  变化时网格多涡卷混沌吸引子的分岔图与最大李亚普洛夫指数分别如图 4 和图 5 所示, 证实了网格多涡卷蔡氏系统当控制参数  $\xi \in [0.19, 0.67] \cup [0.76, 1.49]$  处于混沌状态.

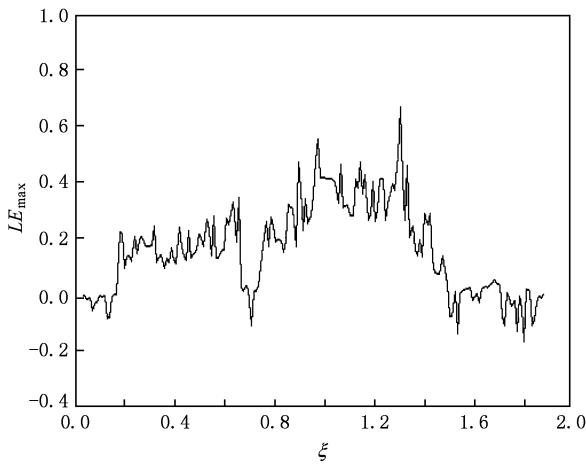


图5 最大李氏指数谱

### 4. 网格多涡卷电路设计

#### 4.1. 多项式函数发生器的电路设计

根据(2)式,以  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌电路为例,设计多项式  $f(x)$  发生器,如图6所示,图中取  $R_a = 1 \text{ k}\Omega, R_c = R_{10} = R_{11} = R_{13} = R = 10 \text{ k}\Omega$ ,运放采用 AD712,乘法器采用 AD633. 电源电压  $E = \pm 15 \text{ V}$ ,电压饱和值  $\pm |V_{\text{sat}}| = \pm 13.5 \text{ V}$ ,则,  $\frac{R_{10}}{R_9} = \frac{10}{R_9} = a = 0.25, \frac{R_{13}}{R_{12}} = \frac{10}{R_{12}} = b = 0.35, \frac{R_c}{R_b} \times 13.5 = \frac{10}{R_b} \times 13.5 = \sqrt{-\frac{a}{b}} = 0.85$ ,即  $R_9 = 40 \text{ k}\Omega, R_{12} = 28.6 \text{ k}\Omega, R_b = 158.8 \text{ k}\Omega$ . 当增加输入端运放数量到  $2N$  时,同时运

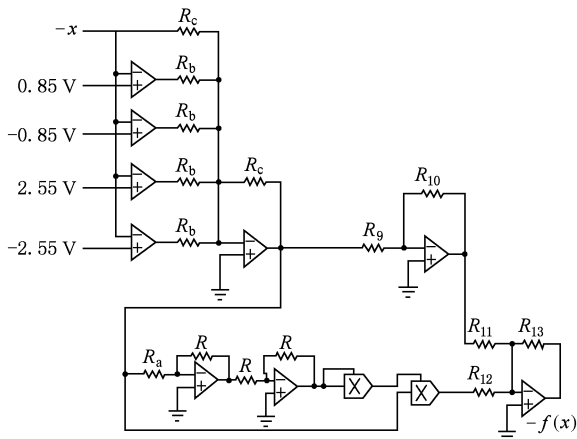


图6  $6 \times 3$  涡卷混沌电路的多项式函数发生器

放输入电压按  $\pm (2i + 1) \sqrt{-\frac{a}{b}} = \pm (2i + 1) \times 0.85$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) 增加时,可以实现系统在  $x$  轴方向产生  $(2N + 2)$  涡卷混沌吸引子.

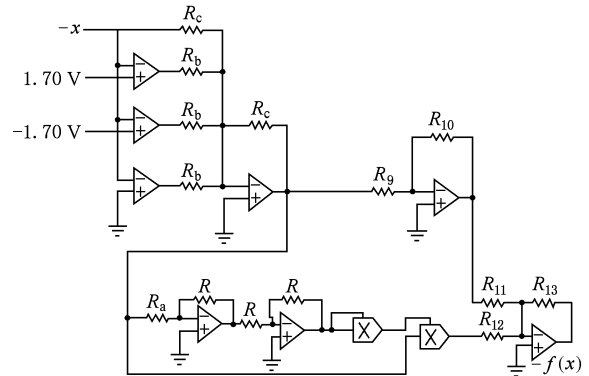


图7  $5 \times 4$  涡卷混沌电路的多项式函数发生器

根据(3)式,得  $5 \times 4$  多涡卷混沌电路的多项式函数发生器  $f(x)$  如图7所示,当增加输入端运放数量到  $2N - 1$  时,同时运放输入电压按  $\pm (2i) \sqrt{-\frac{a}{b}} = \pm (2i) \times 0.85$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) 增加时,可以实现系统在  $x$  轴方向产生  $(2N + 1)$  涡卷混沌吸引子.

#### 4.2. 阶跃函数发生器的电路设计

根据(5)式,以  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌电路为例,设计阶跃函数  $f(y)$  产生器,如图8所示,图中取  $R_c = 1 \text{ k}\Omega, R$  为反相器电阻,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . 则  $\frac{R_c}{R_d} \times 13.5 = \frac{1}{R_d} \times 13.5 = 0.2$ ,所以  $R_d = 67.5 \text{ k}\Omega$ . 当增加输入端运放数量到  $2M$  时,同时运放输入电压按  $\pm (2j + 1) A_2$  ( $j = 0, 1, \dots, M - 1$ ) 增加时,可以实现系统在  $y$  轴方向产生  $(2M + 1)$  涡卷混沌吸引子.

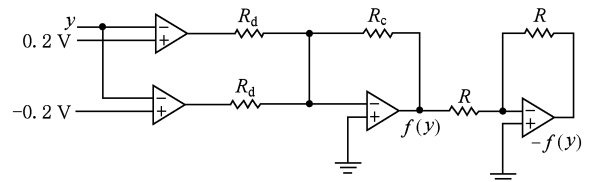


图8  $6 \times 3$  涡卷混沌电路的阶跃函数发生器

根据(6)式,得  $5 \times 4$  网格多涡卷混沌电路的阶跃函数  $f(y)$ ,如图9所示. 当增加输入端运放数量到  $(2M - 1)$  时,同时运放输入电压按  $\pm (2j) A_2$  ( $j =$

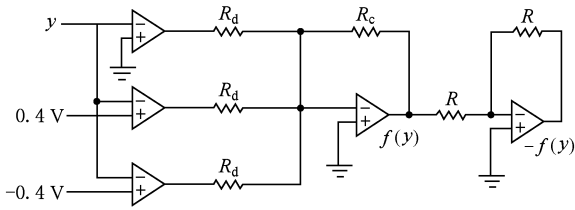


图9 5×4 涡卷混沌电路的阶跃函数发生器

0, 1, ..., M - 1) 增加时, 可以实现系统在 y 轴方向产生 (2M) 涡卷混沌吸引子.

### 4.3. 基于无量纲方程的网格多涡卷蔡氏电路设计

$$\text{由(4)式, 得 } \frac{R_f}{R_1} = \frac{R_f}{R_2} = \frac{R_f}{R_3} = \alpha, \frac{R_f}{R_4} = \frac{R_f}{R_5} = \frac{R_f}{R_6} = 1,$$

$\frac{R_f}{R_7} = \frac{R_f}{R_8} = \beta$ , 令  $\alpha = 15.2, \beta = 18.9, \xi = 1.0$ , 取  $R_f = 100 \text{ k}\Omega$ , 得出图 10 中的各个参数值为  $R_1 = R_2 = R_3 = 6.58 \text{ k}\Omega, R_4 = R_5 = R_6 = 100 \text{ k}\Omega, R_7 = R_8 = 5.44 \text{ k}\Omega, R_0 C_1$  为时间尺度变换因子, 取  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega, C_1 = 10 \text{ nF}, R$  为反相器电阻值, 取  $R = 10 \text{ k}\Omega$ .

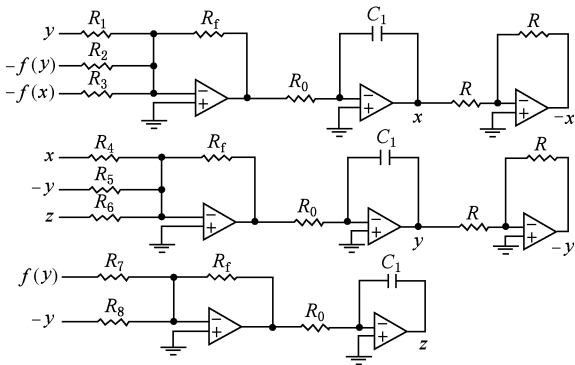


图10 基于无量纲状态方程的网格多涡卷蔡氏电路

## 5. Pspice 仿真

将图 6 的输出信号  $-f(x)$  和输入信号  $-x$  与图 10 的输入信号  $-f(x)$  和输出信号  $-x$  相连, 将图 8 的输出信号  $-f(y), f(y)$  和输入信号  $y$  与图 10 的输出信号  $-f(y), f(y)$  和输入信号  $y$  相连, 得到  $6 \times 3$  网格多涡卷混沌吸引子的电路仿真结果如图 11 所示. 将图 7 的输出信号  $-f(x)$  和输入信号  $-x$  与图 10 的输入信号  $-f(x)$  和输出信号  $-x$  相连, 将图 9 的输出信号  $-f(y), f(y)$  和输入信号  $y$  与图 10 的

输出信号  $-f(y), f(y)$  和输入信号  $y$  相连, 得到  $5 \times 4$  网格多涡卷混沌吸引子的电路仿真结果如图 11 所示. 由此可见, 电路仿真结果和计算模拟是完全一致的.

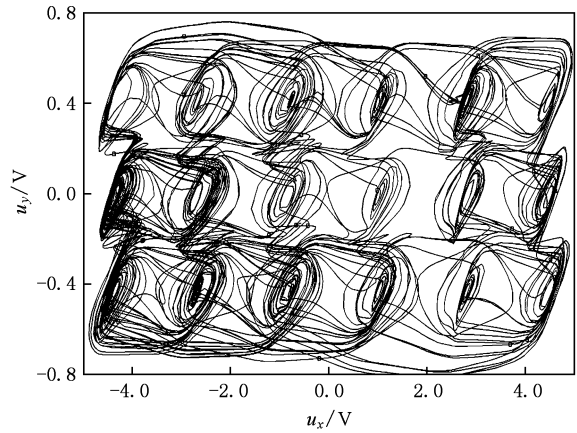


图11 6×3 网格多涡卷的电路仿真

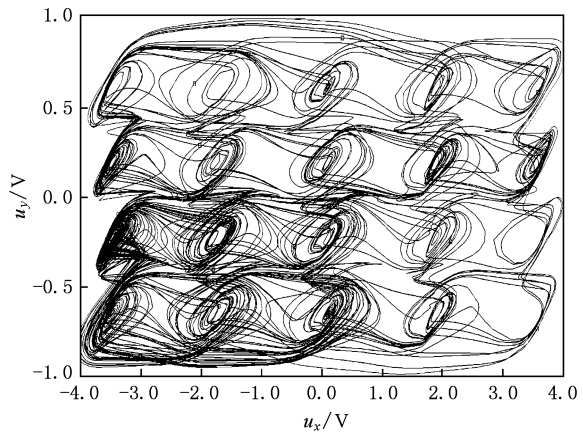


图12 5×4 网格多涡卷的电路仿真

## 6. 结 论

提出了一种利用多项式和阶跃函数构造  $N \times M$  涡卷的构造方法. 分析了该网格多涡卷混沌系统的基本动力学特性, 包括平衡点、分岔图、最大李亚谱诺夫指数谱. 在理论分析的基础上进行了混沌电路设计, 电路仿真与数值模拟的一致性证实了该构造方法的可行性. 该构造方法同时结合了光滑与非光滑曲线两类非线性函数构造多涡卷混沌吸引子的优点, 电路结构简单便于实现, 同时参数可调, 可以实现混沌控制. 为其他光滑曲线构造网格多涡卷混沌吸引子提供了一定的借鉴意义. 然而, 这种新型

网格多涡卷混沌吸引子在工程中的应用还有待于更深入的研究.

- [1] Deng W, Lü J H 2006 *Chaos* **16** 043120
- [2] Ahmad W M 2005 *Chaos, Solitons Fractals* **25** 727
- [3] Deng W 2007 *Int. J. Bifurc. Chaos* **17** 3965
- [4] Suyken J A K, Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **40** 861
- [5] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems Seattle, WA* p768
- [6] Zhang C X, Yu S M, Lü J H, Chen G R 2008 *The 9th International Conference for Young Computer Scientists, Hunan* p2840
- [7] Yalcin M E 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **34** 1659
- [8] Wang F G, Liu C X, Lu J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3289 (in Chinese) [王发强、刘崇新、逯俊杰 2006 物理学报 **55** 3289]
- [9] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 0025 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 0025]
- [10] Liu M H, Yu S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5707 (in Chinese) [刘明华、禹思敏 2006 物理学报 **55** 5707]
- [11] Wang F Q, Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1983 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2007 物理学报 **56** 1983]
- [12] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3337 (in Chinese) [谌龙、彭海军、王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [13] Zhang C X, Yu S M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0119
- [14] Li R, Duan Z S, Wang B 2008 *Int. J. Bifurc. Chaos* **18** 1865
- [15] Luo X H, Li H Q, Dai X G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7511 (in Chinese) [罗小华、李华青、代祥光 2008 物理学报 **57** 7511]
- [16] Xu F, Yu P 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **362** 252
- [17] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 23
- [18] Lü J H, Chen G R, Yu X H, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **51** 2476
- [19] Lü J H, Han F, Yu X, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [20] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2005 *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'05) Kobe, Japan* p23
- [21] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 149
- [22] Bao B C, Liu Z, Xu J P, Zhu L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1540 (in Chinese) [包伯成、刘中、许建平、朱雷 2010 物理学报 **59** 1540]
- [23] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [24] Yu S M, Tang W K S 2009 *Chaos, Solitons Fractals* **39** 821
- [25] Zhang C X, Yu S M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 0120 (in Chinese) [张朝霞、禹思敏 2009 物理学报 **58** 0120]
- [26] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 2537
- [27] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 2889
- [28] Zhong G Q J 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **41** 934
- [29] Li Y, Yu S M, Dai Q Y, Liu M H, Liu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3938 (in Chinese) [李亚、禹思敏、戴青云、刘明华、刘庆 2006 物理学报 **55** 3938]

## Construction of grid multi-scroll chaotic attractors and its circuit implementation with polynomial and step function\*

Chen Shi-Bi<sup>1)†</sup> Zeng Yi-Cheng<sup>1)</sup> Xu Mao-Lin<sup>2)</sup> Chen Jia-Sheng<sup>1)</sup>

1) (School of Material Science and Photoelectronic Physics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

2) (Beijing Information Technology Institute, Beijing 100101, China)

(Received 10 April 2010; revised manuscript received 4 June 2010)

### Abstract

A constructing approach to generating  $N \times M$ -scroll attractors with polynomial and step function is reported. In Chua's circuit, only two or three scrolls can be generated by traditional polynomial function. On this basis, the multi-scroll of  $x$  direction in phase space is obtained by polynomial shift. And then the saddle-focus equilibrium points with index-2 in phase space are extended by combining both polynomial and step function, which makes it possible to extend the multi-scroll in  $y$  direction. Then the grid multi-scroll chaotic attractors are generated. The main feature of this constructing approach is generating grid multi-scroll chaotic attractors by combining both smooth curves and non-smooth curves for the first time. And the arbitrary planar grid multi-scroll chaotic attractors array can be generated by adjusting the values of natural numbers  $N$  and  $M$ . The effectiveness of this method has been verified by theoretical analysis, numerical simulation and circuit simulation.

**Keywords:** grid multi-scroll chaotic attractors, Chua's circuit, step function, circuit implementation

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Vx

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60972147) and the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 08JJ5031).

† E-mail: molshibi@163.com