

环形耦合 Duffing 振子间的同步突变*

吴勇峰[†] 张世平 孙金玮 Peter Rolfe

(哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

(2010年5月6日收到; 2010年5月27日收到修改稿)

以环形耦合 Duffing 振子系统为研究对象, 分析了耦合振子间的同步演化过程. 发现在弱耦合条件下, 如果所有振子受到同一周期策动力的驱动, 那么系统在经历倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态的相变时, 各振子的运动轨迹之间将出现由同步到不同步再到同步的两次突变现象. 利用其中任何一次同步突变现象可以实现系统相变的快速判别, 并由此补充了利用倍周期分岔与混沌态的这一相变对微弱周期信号进行检测的方法.

关键词: Duffing 振子, 同步突变, 相变, 微弱信号检测

PACS: 05.45.Xt

1. 引言

强噪声背景下微弱信号的检测一直是国内外学者研究的热点. 1992年 Birk^[1]首次尝试将混沌振子用于微弱信号检测; 1997年 Wang等^[2]提出利用微弱信号的扰动引发混沌振子在混沌态和大尺度周期态的相互转换即相变, 通过相变的判别来检测信号. 该方法对小信号极度敏感和对噪声免疫能力强, 能达到比传统方法更低的信噪比工作门限, 因此近年来得到了不断改进和迅速发展^[3-12], 所采用的模型也从单一振子^[3]发展到周期相态更稳定、抗噪能力更强的耦合振子系统^[12].

Pecora和Carroll^[13]首次实现了耦合振子系统的同步, 之后各国学者们取得了大量研究成果, 主要是集中在耦合振子系统混沌态时的振子间同步控制方法和实现条件^[14-17], 并应用到如激光混沌同步^[18]、保密通信^[19]、振动系统参数识别^[20]等实际领域. 而对于耦合振子系统在不同状态转换时各振子间的同步规律, 至今未见相关的研究报道.

本文采用横向 Lyapunov 指数分析了环形耦合 Duffing 振子系统在相变时的各振子运动轨迹, 发现如果所有振子受同一周期策动力驱动时, 各振子运动轨迹之间将会出现两次同步突变的现象: 当系统从倍周期分岔转换到混沌态时, 所有耦合振子的运

动轨迹将从同步状态变化到不同步状态; 当系统从混沌态转换到大尺度周期态时, 所有耦合振子的运动轨迹将从不同步状态变化到同步状态. 这种同步关系的改变是随系统相变而发生的突变, 在这里定义为同步突变. 进一步研究表明, 系统只有在弱耦合条件下才具有上述的两次同步突变现象.

对微弱周期信号进行检测时, 利用这种同步突变现象, 只需根据振子间是否同步就可以实现系统相变的快速判别.

2. 环形耦合 Duffing 振子的同步突变分析

文献[12]对一个振子加载扰动, 即两振子受到不同大小的周期策动力驱动, 它们的运动轨迹不存在同步关系. 为使耦合振子间存在着相同的制约关系, 本文令每个振子被同一周期策动力驱动, 得到了各振子运动轨迹间的同步变化规律.

本文构造如下环形耦合 Duffing 振子系统:

$$\dot{x}_i = y_i,$$

$$\dot{y}_i + \xi y_i - x_i + x_i^3 - k(x_{i-1} - x_i) = f \cos(\omega t) \quad (i = 1, 2, \dots, N; N \geq 2), \quad (1)$$

式中 N 表示振子个数, ξ 为阻尼比, $f \cos(\omega t)$ 为周期策动力, $k(x_{i-1} - x_i)$ 为相邻振子间的线性耦合项, $k(x_N - x_1)$ 为首、尾两振子的耦合项, 其中 k 为耦合

* 国家高技术研究发展计划(批准号:2007AA06Z228)和哈尔滨科技创新人才研究专项资金(批准号:2009RFLXS006)资助的课题.

[†] E-mail: viewu306@yahoo.cn

系数,表示耦合强度,在该系统中所有振子间的耦合强度保持一致.

第 i 和 $i-1$ 个振子间的最大横向 Lyapunov 指数^[21]为

$$\lambda_{(i,i-1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(D_t/D_0), \quad (2)$$

其中 $D = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$, D_t 为振子间相轨迹在 t 时刻的距离. 将最大横向 Lyapunov 指数作为耦合振子系统同步的判据,只有当所有 $\lambda_{(i,i-1)}$ 都小于零时,各振子才能达到稳定同步状态^[21-23].

令 $N=2, \xi=0.32, k=0.1, \omega=1$, 耦合系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 + 0.32y_1 - x_1 + x_1^3 \\ &- 0.1(x_2 - x_1) = f \cos(t), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 + 0.32y_2 - x_2 + x_2^3 \\ &- 0.1(x_1 - x_2) = f \cos(t). \end{aligned} \quad (3)$$

同时增大每个振子的周期策动力的幅值 f , 系统将依次经历围绕焦点的周期振荡、同宿轨道、倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态,这里只对 $f > 0.2$ 之后的倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态进行分析. 通过 (2) 式可得到最大横向 Lyapunov 指数的变化图,如图 1 所示.

从图 1 可以看出,当周期策动力 $f < 0.27$ 时,最大横向 Lyapunov 指数为负,说明两个振子间相平面轨迹同步. 图 2 以 $f=0.25$ 为例,可以看出两个振子同时处于倍周期分岔状态,且具有相同的相平面轨迹,以相同的周期分岔速度走向混沌态.

当周期策动力 f 增大到 0.27 后,此时图 1 中的

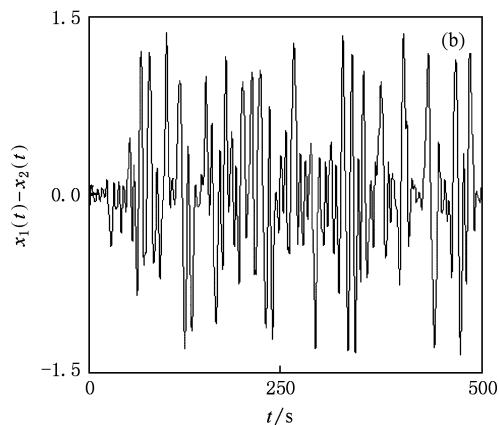
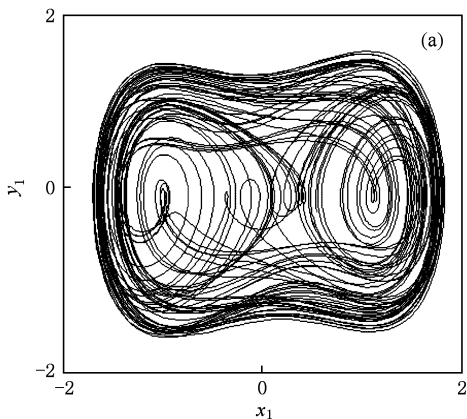


图 3 $f=0.30$ 时 (a) 振子 1 的相平面轨迹, (b) 振子间的同步误差

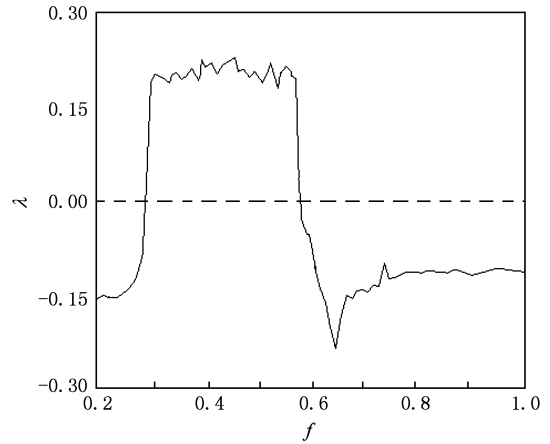


图 1 最大横向 Lyapunov 指数

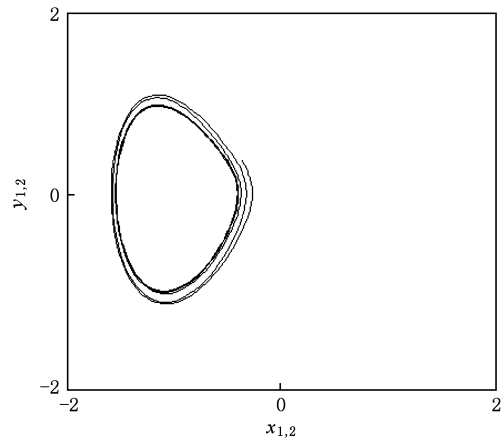


图 2 $f=0.25$ 时两个振子的相平面轨迹

最大横向 Lyapunov 指数由负变为正,即振子间由同步状态突变为不同步状态.

如图 3(a) 中的相平面轨迹所示,系统已由倍周期分岔进入到混沌态. 如图 3(b) 中的振子间同步误差

差所示,振子间的运动轨迹迅速分离不再存在同步效应.

当 f 继续增加大于 0.57 后,此时最大横向 Lyapunov 指数由正变为负,意味着两个振子又转变为同步状态.如图 4 中的相平面轨迹所示,系统由混沌态进入到大尺度周期态,两个振子的相平面轨迹迅速收敛到同一个周期轨道.

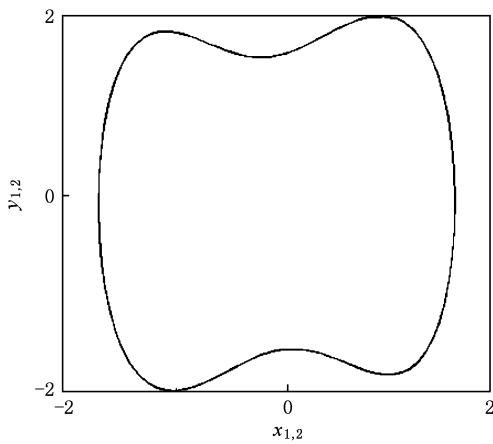


图 4 $f=0.59$ 时两个振子的相平面轨迹

上述研究表明了双耦合系统在历经倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态的相变过程中,各振子运动轨迹间经历了由同步到不同步再到同步的两次突变.

分析 $N=3,4,5$ 的环形耦合 Duffing 振子系统,同样可以得到两次同步突变的现象.这里以 $N=5$ 为例,取系统参数 $\xi=0.32, k=0.1, \omega=1$,周期策动力为 $0.2\cos(t)$,所有振子间的最大横向 Lyapunov 指数随周期策动力变化的情况如图 5 所示.系统在历经倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态的相变过程中,各振子间同样存在由同步到不同步再到同步

的两次突变.

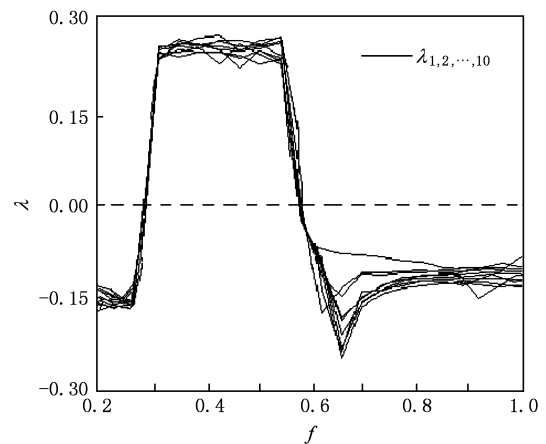


图 5 $N=5$ 时所有最大横向 Lyapunov 指数

3. 耦合系数 k 的影响

在研究中发现,振子耦合强弱程度不同时,其同步规律也不相同,并非都具有上述的两次同步突变现象.此外耦合系数大小的影响在振子数为 $N=2$ 和 $N \geq 3$ 时的两种情况又不一样.

3.1. 振子数为 $N=2$ 的情况

当振子数为 $N=2$ 时,耦合的强弱对系统的倍周期分岔、混沌态、大尺度周期三种状态的相变没有任何影响,只是影响到了突变规律.

在弱耦合时($0 < k < 0.12$),如上面已讨论的图 1 所示,耦合振子随着系统的相变出现了两次同步突变.

随着耦合强度的增强($0.12 < k < 0.2$),如图 6 (a)所示,系统在混沌态时产生了同步状态与不同步状态交替出现的现象,因此系统发生相变时振子

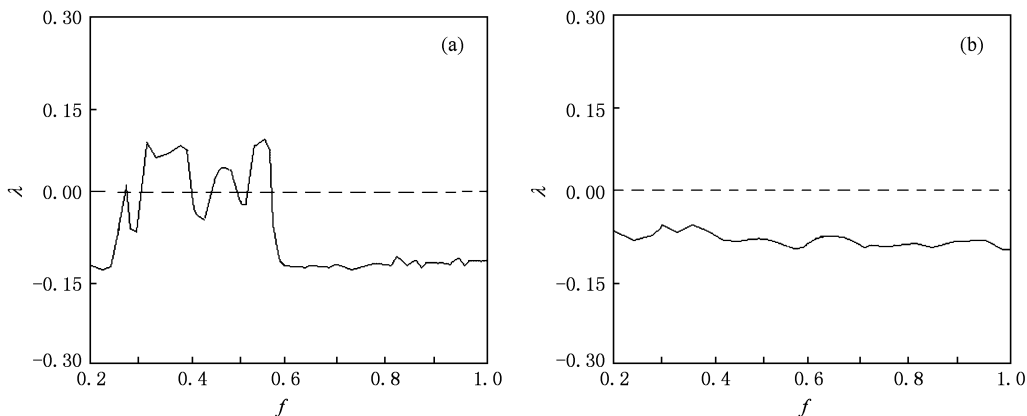


图 6 最大横向 Lyapunov 指数 (a) $k=0.16$, (b) $k=0.3$

间没有了同步突变的变化规律.

进一步加大耦合强度后 ($k > 0.2$), 如图 6(b) 所示, 最大横向 Lyapunov 指数在系统任何状态下始终都小于零, 表明振子间一直处于同步状态, 因此将不会有任何突变的产生.

3.2. 振子数为 $N \geq 3$ 的情况

当振子数为 $N \geq 3$ 时, 耦合的强弱将对系统的相变产生影响. $N \geq 3$ 时的变化规律基本一致, 这里以 $N = 3$ 为例.

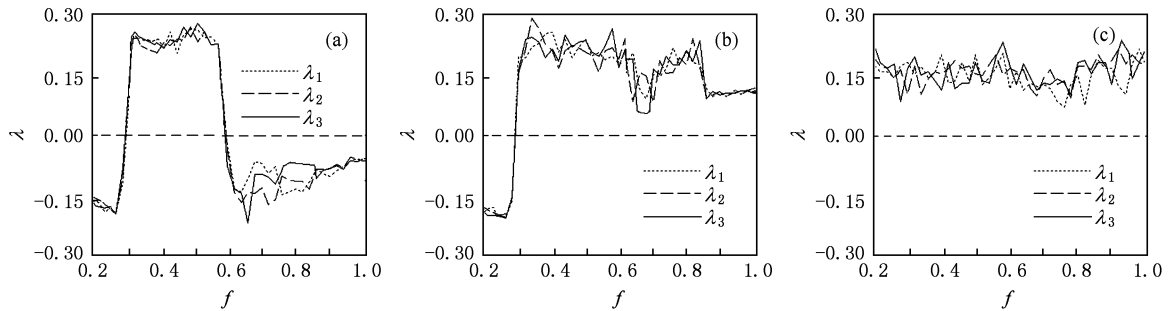


图 7 三个最大横向 Lyapunov 指数 (a) $k = 0.1$, (b) $k = 0.38$, (c) $k = 0.7$

以上分析表明, 只有在弱的耦合强度时, 系统才会出现两次同步突变的现象.

4. 利用同步突变判别系统相变

上述的两次同步突变是伴随着系统相变产生的, 因此可以根据其中的一次同步突变来实现相变的判别, 如利用第一个突变规律判别倍周期分岔与混沌态的相变, 也可利用第二个突变规律判别混沌态与大尺度周期态的相变, 下面以微弱周期信号的检测为例进行说明.

构造如下环形耦合 Duffing 振子检测系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i + \xi y_i - x_i + x_i^3 - k(x_{i-1} - x_i) &= f \cos(\omega t) + s(t) \\ (i &= 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $s(t) = a \cos(\omega t) + n(t)$, $a \cos(\omega t)$ 为待检测信号, 其幅值 a 为 2×10^{-5} V, 其频率取值和周期策动力 $f \cos(\omega t)$ 的频率相同, 同时为检验噪声对这种同步规律的影响, 加入功率为 1 W 的高斯白噪声 $n(t)$, 其信噪比为

$$\gamma_{\text{SNR}} = 10 \lg \frac{(2 \times 10^{-5})^2}{1} = -94 \text{ dB}. \quad (5)$$

在弱耦合条件下 ($0 < k < 0.35$), 系统依次出现两次相变, 随系统相变振子间将出现两次同步突变, 如图 7(a) 所示.

随着耦合强度的增强 ($0.35 < k < 0.45$), 系统只出现倍周期分岔到混沌态的相变, 但之后始终保持在混沌态, 因此只出现了一次由同步到不同步的突变现象, 如图 7(b) 所示.

进一步加大耦合强度后 ($k > 0.45$), 系统就一直处于混沌态没有任何相变, 因此各耦合振子始终保持在不同步的状态, 如图 7(c) 所示.

信号和噪声加入时间段如图 8 所示, 这里的高斯白噪声的幅值大小为示意图.

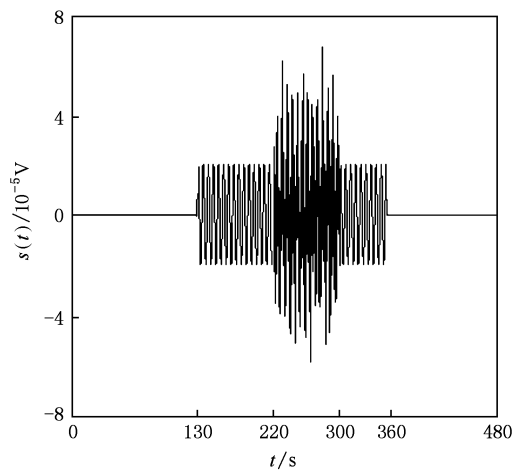


图 8 待检测信号

取系统参数为 $N = 2$, 即采用 2 个振子的双耦合检测系统, $\xi = 0.32$, $k = 0.1$, $\omega = 1$. 在信号检测时, 两次同步突变现象都可以用来对系统的相变进行判别, 过程分别如下:

1) 混沌态与大尺度周期态之间的相变检测

调节周期策动力幅值 f , 使两个振子处于混沌态向大尺度周期态过渡的临界状态, 此时两个振子运

动轨迹误差不为零,即处于不同步状态,由此可判定此时外部没有加载信号;

当 $t = 130$ s 时,外部开始加载周期信号.此时如图 9 所示,两个振子的同步误差为零,即由不同步状态突变为同步状态,可判定系统发生了混沌态到大尺度周期态的相变,即系统检测到了周期信号.而且加入的噪声对系统同步状态没有任何影响.

当 $t = 360$ s 时,外部周期信号被撤除.此时如图 9 所示,系统由同步状态突变为不同步状态,可判定系统发生了大尺度周期态到混沌态的相变,即表示周期信号消失.

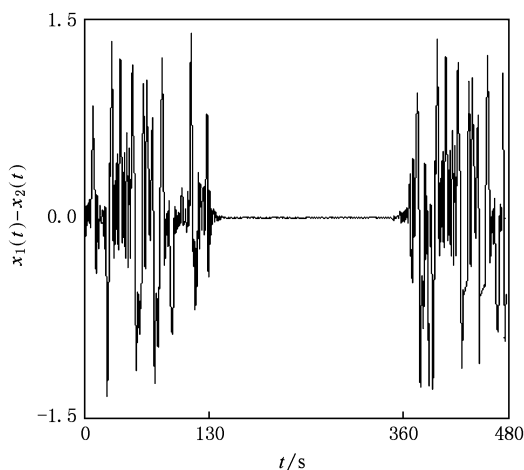


图 9 检测时两振子间同步误差

2) 倍周期分岔与混沌态之间的相变检测

调节周期策动力幅值 f ,使振子处于倍周期分岔态向混沌态过渡的临界状态,系统将在这两种状态之间产生相变.

如图 10 所示,这时同步状态随时间的变化与图 9 刚好相反.外部没有周期信号时,系统处于倍周期分岔态,振子间的同步误差为零即保持同步状态;只有在外加载周期信号时,系统处于混沌态,两个振子不同步,可判定系统检测到了周期信号.同样,在加入噪声期间系统状态的判别没有受到任何

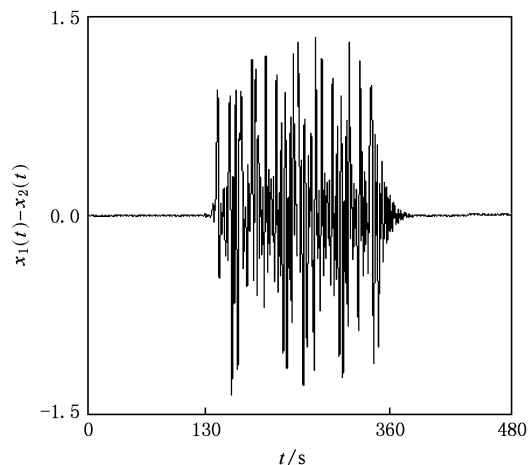


图 10 检测时两振子间同步误差

影响.

上述实验表明,用同步突变可以准确快速地判别系统相变,从而实现对微弱信号的检测,与常用的特征指数法 (Lyapunov 指数、Floquet 指数)、Poincare 截面法、图像识别法等相变判别法相比,判决标准简便易行,计算复杂度低,运算量小,只需根据振子间是否同步即可判别.

5. 结 论

1) 发现弱耦合条件下,环形耦合 Duffing 振子随周期策动力的变化从倍周期分岔到混沌态时,耦合振子间的运动轨迹出现从同步到不同步的突变现象;从混沌态到大尺度周期态时,耦合振子间的运动轨迹出现从不同步到同步的突变现象.

2) 利用这种同步突变现象,只需计算振子间的同步误差,就可以实现系统相变的快速判别.

3) 此外,目前混沌振子微弱信号检测普遍采用混沌态到大尺度周期态相变来判别,而利用倍周期分岔到混沌态的相变来判别信号有无,应该是对现有的混沌振子微弱信号检测技术的补充.

[1] Birx D I 1992 *IEEE Int. Joint Conf. Neural Networks* **22** 881
 [2] Wang G Y, Tao G L, Chen X, Lin J Y 1997 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **18** 209 (in Chinese) [王冠宇、陶国良、陈行、林建亚 1997 仪器仪表学报 **18** 209]
 [3] Li Y, Yang B J, Lin H B, Liu X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese) [李月、杨宝俊、林红波、刘晓华 2005 物

理学报 **54** 1994]
 [4] Yuan Y, Li Y, Danilo P M, Yang B J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0958
 [5] Wang Y C, Zhao Q C, Wang A B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2373
 [6] Li Y, Yang B J, Yuan Y, Liu X H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1072
 [7] Zhai D Q, Liu C X, Liu Y, Xu Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 0816

- (in Chinese) [翟笃庆、刘崇新、刘尧、许喆 2010 物理学报 **59** 0816]
- [8] Xiang X Q, Shi B C 2010 *Chaos* **20** 013104
- [9] Li Y, Yang B J, Deng X Y 2004 *Chin. Phys. Lett.* **13** 1368
- [10] Li Y, Xu K, Yang B J, Yuan Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3353 (in Chinese) [李月、徐凯、杨宝俊、袁野 2008 物理学报 **57** 3353]
- [11] Wang Y S, Jiang W Z, Zhao J J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2053 (in Chinese) [王永生、姜文志、赵建军、范洪达 2008 物理学报 **57** 2053]
- [12] Li Y, Lu P, Yang B J, Zhao X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1672 (in Chinese) [李月、路鹏、杨宝俊、赵雪平 2006 物理学报 **55** 1672]
- [13] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [14] Yanchuka S, Maistrenko Y, Mbsekilde E 2003 *Chaos* **13** 388
- [15] Guan S G, Li K, Lai C H 2006 *Chaos* **16** 023107
- [16] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 503
- [17] Ren H P, Han C Z, Liu D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1202
- [18] Zhu S Q, Luo X Q, Fang J X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 727
- [19] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 706 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 706]
- [20] Qin W Y, Wang H J, Gao H S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 42 (in Chinese) [秦卫阳、王红瑾、高行山 2008 物理学报 **57** 42]
- [21] Liu Z H, Chen S G, Hu B 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2817
- [22] Wang T B, Qin T F, Chen G Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 (in Chinese) [王铁邦、覃团发、陈光旨 2001 物理学报 **50** 1851]
- [23] Qian Y, Song X Y, Shi W, Chen G Z, Xue Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4420 (in Chinese) [钱郁、宋宣玉、时伟、陈光旨、薛郁 2006 物理学报 **55** 4420]

Abrupt change of synchronization of ring coupled Duffing oscillator*

Wu Yong-Feng[†] Zhang Shi-Ping Sun Jin-Wei Peter Rolfe

(School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 6 May 2010; revised manuscript received 27 May 2010)

Abstract

The ring coupled Duffing oscillator was investigated, a phenomenon was observed when analyzing the synchronization evolution between coupled oscillators, which shows that if all oscillators are driven by the same periodic driving force, the motion trajectory between weakly coupled oscillators will generate two abrupt changes from synchronization to non-synchronization and then to synchronization in the phase transition of period-doubling bifurcation, chaotic state and large-scale periodic state. Any synchronous abrupt change can be used to rapidly identify system phase transition, and thus a weak periodic signal detection method was proposed based on the phase transition of period-doubling bifurcation and chaotic state.

Keywords: Duffing oscillator, abrupt change of synchronization, phase transition, weak signal detection

PACS: 05.45.Xt

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2007AA06Z228) and Technology Innovation Talent Special Foundation of Harbin, China (Grant No. 2009RFLXS006).

[†] E-mail: viewu306@yahoo.cn