

标准模型中两类中性玻色子混合圈链图传播子的重整化及其 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 反应截面*

陈学文^{1)2)†} 方祯云¹⁾ 张家伟¹⁾ 钟涛¹⁾ 涂卫星¹⁾

1) (重庆大学理论物理研究所, 重庆 400030)

2) (重庆科技学院数理系, 重庆 401331)

(2010年1月8日收到; 2010年4月16日收到修改稿)

采用电弱统一标准模型, 对光子 γ 和中间玻色子 Z_0 混合圈链图传播子的构架方式及其重整化问题作了详细分析与讨论, 并完成了有关解析计算, 获得了由参与电弱相互作用的各种混合圈构成的 γ 和 Z_0 的重整化链图传播子的解析计算结果. 此外, 我们还将此结果应用于高能物理中备受关注的一类轻子反应 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 中, 获得了在 γ 和 Z_0 所构架出的重整化混合圈链图传播中 $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 反应截面的解析计算结果, 并将本文所获得的这一理论计算结果与实验观测值作了对比分析, 发现本文理论计算结果与实验观测值符合非常好, 并由此也获得了有关辐射修正的重要信息. 本文研究结果也可作为探讨一般复杂传播子的理论研究与应用提供某些参考.

关键词: 标准模型, 链图传播子, 重整化, 辐射修正

PACS: 11.10.-z, 11.15.-q, 11.25.Db

1. 引言

电弱统一标准模型 (SM) 是上世纪粒子物理学中最具影响的唯象理论之一^[1], 在描述电磁与弱相互作用中取得了巨大成功, 其理论预言的新物理已被许多实验证实. 自 SM 提出以来, 国际上出现许多相关理论研究工作, 其中涉及精确检验标准模型的理论计算工作一直备受学术界关注, 而这些理论计算工作本身也对 SM 理论的发展起到了十分重要的推动作用. 在涉及理论计算的研究工作中, 采用量子场论微扰理论作物理计算是其中重要研究工作之一. 由于量子场论微扰计算基于逐阶进行, 当涉及高阶 (圈图) 计算时, 将会出现发散困难, 需要采用重整化技术有效分离掉非物理的发散量而保留物理的重整化有限量. 然而, 做这样的逐阶重整化计算不但十分困难, 而且即使能够完成所有各高阶的重整化计算, 也无法获得涉及所有无穷高阶 (各种圈图) 的具有物理意义的计算结果. 这是因为, 即

使能够获得这一计算结果但也仍将会是一个发散量^[2]. 这表明目前量子场论仍存在某些不够完善之处, 有可能是某种正确理论的渐近表述^[3]. 虽然如此, 在量子场论中也并非不能考虑涉及部分无穷高阶 (圈图) 的重整化计算问题. 因为按 Dyson 的重整化思想^[2] 而建立的无穷高阶链图传播子理论, 不但仍可满足重整化^[4], 而且重整化后的计算结果仍可以是一个有限量^[5]. 这无疑表明了量子场论微扰理论计算中, 仍可以考虑这样一种较为特殊的涉及无穷高阶 (圈图) 的重整化计算模式, 即重整化链图传播子计算模式. 这是因为, 在量子场论中若考虑 (采用) 各种重整化链图传播子作计算仍具有理论上的合理性与正确性以及计算上的精确描述性^[6].

重整化有限量的贡献 (辐射修正) 通常都十分微小, 但对物理问题的深入研究却十分重要^[7-12]. 因而能考虑到无穷高阶链图修正与仅考虑有限高阶的圈图修正相比, 无疑将会更加精细地反映辐射修正的物理效应, 进而也会更有利于对物理问题的深入研究. 在 SM 中, 由于参与相互作用的粒子间会

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2003CB716300)、国家自然科学基金 (批准号: 10175096) 和中国工程物理研究院基金 (批准号: 2008T0401, 2008T0402) 资助的课题.

† E-mail: 20080601011@cqu.edu.cn

发生多种不同物理过程的相互作用,因而要考虑由各种不同物理过程圈图构成的链图传播子的构架问题是极其复杂的,致使目前完成的关于 SM 的大量理论计算工作多属于低阶树图近似计算,或有限高阶的圈图辐射修正计算,而未涉及无穷高阶混合圈链图辐射修正问题.

在本文中,我们将在 SM 中采用链图传播子这一计算模式,对模型中的规范场与费米场相互作用下所涉及到的光子 γ 和中间玻色子 Z_0 参与的相互作用部分作相关研究. 详细分析并合理解决了由各种不同物理过程混合圈图构成的 γ 和 Z_0 混合圈链图传播子的构架方式及其重整化问题,给出了一种简洁有效的处理方法,并最终解析计算出这类十分复杂的混合圈链图传播子函数 $D_{\gamma,C}^{(m-chain)}(k^2)$ 和 $D_{Z,C}^{(m-chain)}(k^2)$; 进而,我们又将此结果应用到高能物理中备受关注的一类轻子反应 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 中,获得了 γ 和 Z_0 重整化链图传播下的反应截面,并将此结果与 OPAL collaboration^[13], SLC^[14], Tasso collaboration^[15], Mark^[16], JADE collaboration^[17], L3 collaboration^[18], 以及 LEP(ALEPH)^[19] 等一系列实验观测结果作了对比. 研究表明,本文所考虑的这种重整化混合圈链图传播子给出的理论计算结果与实验结果符合很好.

2. SM 模型中的 γ 和 Z_0 混合圈链图传播子构架方式及解析结果

在 SM 中,涉及 γ 和 Z_0 与费米场相互作用拉氏量为^[20]

$$L_I = -ie \sum_{f=l,q} Q_f \bar{\psi}_f \gamma_\lambda \psi_f A_\lambda + \frac{ie}{2\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W} \times \sum_{f=l,q,\nu_l} [\bar{\psi}_f \gamma_\lambda (c_V^f + c_A^f) \psi_f] Z_\lambda. \quad (1a)$$

由相互作用拉氏量可知,光子可与三种轻子 (e, μ, τ) 和六种夸克 (u, c, d, s, t, b) 发生相互作用; 中间玻色子除与三种轻子和六种夸克发生相互作用外,还可与三种中微子 (ν_e, ν_μ, ν_τ) 发生弱相互作用.

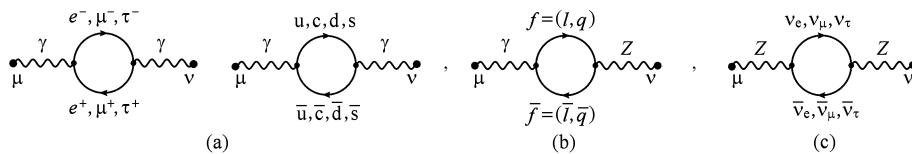


图1 SM 中两类中性传播子圈图(共 31 种不同物理过程的圈图) (a) 光子真空极化圈图, (b) γZ_0 混合项真空极化圈图, (c) 中间玻色子自能圈图

用. 由于 t, b 夸克的质量很重,因此对光子和中间玻色子圈图贡献的作用十分微小,因而在考虑光子和中间玻色子圈图修正时可以不考虑 t 和 b 带来的修正.

(1a) 式中是用夸克的弱作用本征态来描述的 $\psi_{d'}, \psi_{s'}$, 夸克弱作用本征态与其质量本征态 ψ_d, ψ_s 满足 CKM 矩阵变换关系^[20]

$$\begin{pmatrix} \psi_{d'} \\ \psi_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix}. \quad (1b)$$

以上两式中, e 为电磁相互作用耦合常数, $\psi_l(x)$ 与 $\bar{\psi}_l(x)$ ($l = e, \mu, \tau$) 为轻子(反轻子)旋量场与共轭旋量场算子, $\psi_q(x)$ 与 $\bar{\psi}_q(x)$ ($q = u, c, t, d, s, b$) 为夸克(反夸克)旋量场与共轭旋量场算子, $A_\lambda(x)$ 为光子矢量场算子, Z_λ 为中间玻色子场算子, θ_C 为 Cabibbo 角(本文中取 $\sin\theta_C = 0.23$), θ_W 为温伯格角,其定义为 $\cos\theta_W = m_{W^\pm}/m_Z$, c_V^f 和 c_A^f 是轻子、夸克和中微子的矢量和轴矢量中性流耦合常数,在 SM 中, Q_f, c_V^f, c_A^f 的值如表 1 所示.

表 1 Q_f, c_V^f, c_A^f 在标准模型中的值

f	Q_f	c_A^f	c_V^f
e, μ, τ	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2 + 2\sin^2\theta_W$
u, c, t	$2/3$	$1/2$	$1/2 - 4/3\sin^2\theta_W$
d, s, b	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2 + 2/3\sin^2\theta_W$
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$1/2$	$1/2$

规范场 (γ, Z_0) 参与多种相互作用,包括与轻子和夸克发生相互作用. 此外, Z_0 还与中微子场发生相互作用. 因此在 SM 中 $\gamma\gamma$ 光子真空极化共有如图 1(a) 所示的 7 种“圈图”,而对于 γZ_0 和 $Z_0\gamma$ 真空极化也同样共有如图 1(b) 所示的 7 种不同物理过程的“圈图”,由于 Z_0 还与中微子场发生耦合,因而 Z_0 圈图除图 1(a) 所示的物理过程外,还有图 1(c) 所示的 3 种物理过程所呈现的自能圈图.

由上述分析可知,在电弱统一理论中 γ, Z_0 共出现多达 31 种不同物理过程的真空极化圈图,因而 γ 和 Z_0 混合圈链图传播子必然包含十分复杂的内部

相互作用. 我们经过分析发现, 对于 γ 和 Z_0 混合圈链图传播子, 其构成可由单纯的光子 γ 链图传播子 $D_\gamma^{(\text{chain})}(k^2)$ ($D_\gamma^{(\text{chain})}(k^2)$ 中仅含有各种光子真空极化, 不含有中间玻色子参与的相互作用) 和单纯的

中间玻色子 Z_0 链图传播子 $D_Z^{(\text{chain})}(k^2)$ ($D_Z^{(\text{chain})}(k^2)$ 中仅含有各种中间玻色子自能相互作用, 不含有光子参与的相互作用), 以及 γZ_0 真空极化经各种复杂的排列组合而构成. 其构成方式由图 2 所示.

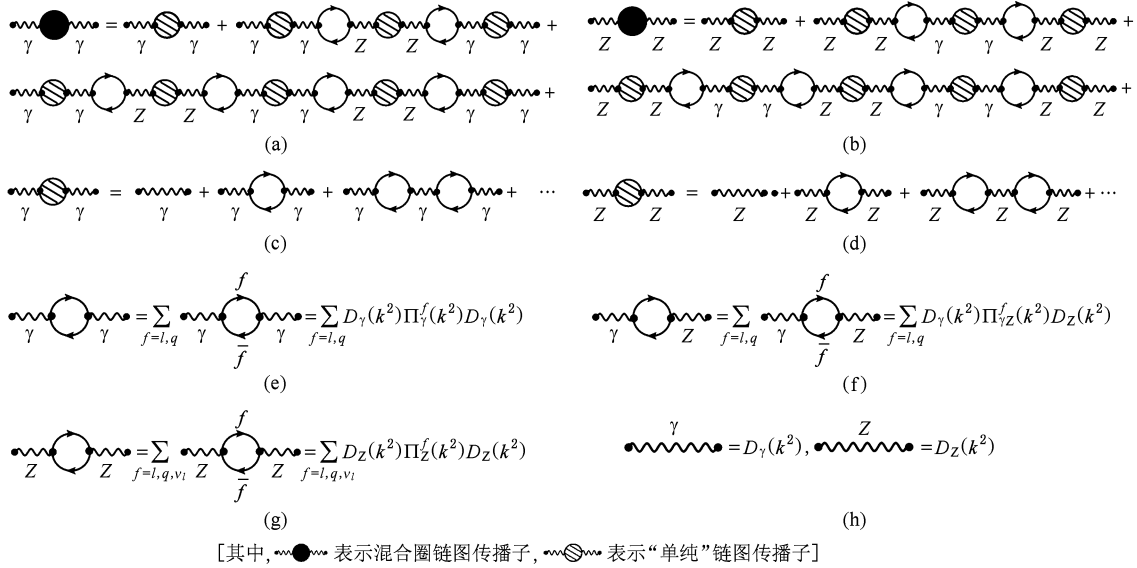


图 2 SM 中两类中性玻色子混合链图传播子构成方式 Feynman 图 (a) 光子混合圈链图传播子 $D_\gamma^{(\text{m-chain})}(k^2)$, (b) 中间玻色子“混合圈”链图传播子 $D_Z^{(\text{m-chain})}(k^2)$, (c) 单纯的光子圈链图传播子 $D_\gamma^{(\text{chain})}(k^2)$, (d) 单纯的中间玻色子圈链图传播子 $D_Z^{(\text{chain})}(k^2)$, (e) 光子高阶(单圈图)传播子(其中 $f = l, q$ 分别表示如下轻子和夸克对: $(e, \bar{e}), (\mu, \bar{\mu}), (\tau, \bar{\tau}), (u, \bar{u}), (c, \bar{c}), (d, \bar{d}), (s, \bar{s})$ 由光子产生再湮灭成光子的单圈), (f) γZ_0 混合单圈图传播子, (g) 中间玻色子单圈图传播子(其中 $f = l, q, \nu_l$ 分别表示三种轻子, 四种夸克和三种中微子由 Z 产生再湮灭成 Z 的单圈), (h) γ, Z_0 树图传播子

由图 2 可以看出, 树图阶 γ 和 Z_0 传播子无内部相互作用; 而在 γ, Z_0 作“链图”传播时, 传播子内部将出现无穷多个复杂的相互作用过程. 而两种混合圈链图传播子均含有多达 31 种不同物理过程的圈图发散量, 因此计算两个混合圈链图传播子函数的重整化有限量归结为求 31 种圈图发散的重整化有限量. 而对于这 31 种圈图重整化有限量的计算十分复杂. 文献[21, 22]曾在量子电动力学(QED)理论

中详细计算讨论光子圈图重整化有限量, 并给出了有限量 $\Pi_{\gamma,c}^e(k^2)$ 的严格解析计算结果. 在本文中我们借鉴文献[21, 22]的处理方法来处理本文所涉及的另外 30 种圈图重整化有限量的分离与计算, 差别仅仅出现在质量、耦合常数、矢量流和轴矢量流常数上而已. 至此, 我们经过复杂的计算完成了另外 30 种圈图重整化有限量 $\Pi_{\gamma,c}^f(k^2), \Pi_{Z,c}^f(k^2), \Pi_{\gamma Z,c}^f(k^2), \Pi_{Z,\gamma,c}^f(k^2)$ 的严格解析结果

$$\Pi_{\gamma,c}^f(k^2) = \frac{Q_f^2 k^4 \delta_{\mu\nu}}{\pi^2} \left[-\frac{5}{36} k^2 + \frac{m_f^2}{3k^4} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2m_f^2}{3k^2} - \frac{8m_f^4}{3k^4} \right) \cdot F_f(k^2) \right], \quad (2)$$

其中

$$F_f(k^2) = \frac{-1}{4k^2} \cdot \begin{cases} [1/\sqrt{b_f(k^2)}] \{ \ln[\sqrt{b_f(k^2)} - 1] / [\sqrt{b_f(k^2)} + 1] \} & (k^2 > 0), \\ [1/\sqrt{a_f(k^2)}] \{ 2 \arctg[1/\sqrt{a_f(k^2)}] \} & (-4m_f^2 \leq k^2 < 0), \\ [1/\sqrt{b_f(k^2)}] \{ \ln[1 - \sqrt{b_f(k^2)}] / [1 + \sqrt{b_f(k^2)}] + i\pi \} & (k^2 \leq -4m_f^2), \end{cases} \quad (3)$$

$$\Pi_{\gamma Z,c}^f(k^2) = \Pi_{Z,\gamma,c}^f(k^2) = c_V^f \Pi_{\gamma,c}^f(k^2), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{Z,C}^f(k) = & \frac{c_V^{f2} + c_A^{f2}}{2\pi^2} \left[-\frac{1}{2}(k^2 + m_Z^2) + \left(\frac{2m_f^4 + m_f^2 k^2}{m_Z^2} - 2m_f^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{2m_f^4 k^2}{m_Z^4} \right) J_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{m_f^2}{k^2} \right) (4m_f^2 + k^2) J_2 \right] \\ & + \frac{c_V^{f2} - c_A^{f2}}{\pi^2} \left[-\frac{m_f^2(k^2 + m_Z^2)}{m_Z^2} + \left(\frac{2m_f^4 k^2}{m_Z^4} - \frac{2m_f^4}{m_Z^2} + m_f^2 \right) J_1 - \frac{m_f^2(4m_f^2 + k^2)}{k^2} J_2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$J_1 = \frac{1}{b_f(k^2)} \cdot \begin{cases} (-2) \arctan[1/b_f(k^2)] & (m_Z^2 \leq 4m_f^2), \\ \ln \frac{[1 + b_f(k^2)]}{[1 - b_f(k^2)]} - i\pi & (m_Z^2 \geq 4m_f^2), \end{cases} \quad (6a)$$

$$J_2 = \frac{1}{a_f(k^2)} \cdot \begin{cases} \ln \frac{[a_f(k^2) + 1]}{[a_f(k^2) - 1]} - i\pi & (k^2 \geq 0), \\ (-2) \arctan \frac{1}{a_f(k^2)} & (-4m_f^2 \leq k^2 \leq 0), \\ \ln \frac{[1 + a_f(k^2)]}{[1 - a_f(k^2)]} - i\pi & (k^2 \leq -4m_f^2). \end{cases} \quad (6b)$$

式中, $b_f(k^2) = -a_f(k^2) = 1 + 4m_f^2/k^2$; m_f ($f=1, 2, \dots, 7$) 分别表示对应的轻子和夸克质量, 包括标准模型中因存在夸克混合 (见(1b)式) 而产生的夸克有效质量: $m_1 = m_e, m_2 = m_\mu, m_3 = m_\tau, m_4 = m_u, m_5 = m_c, m_6 = (\cos\theta_C - \sin\theta_C)m_d, m_7 = (\cos\theta_C + \sin\theta_C)m_s$.

至此, 我们已完成了对 $D_\gamma^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 和 $D_Z^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 的重整化计算并获得其混合圈链图传播子重整化有限量 $D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 和 $D_{Z,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$, 只需将 $\Pi_j^f(k^2)$ (j 表示 $\gamma, Z_0, \gamma Z_0, Z_0 \gamma$) 用 $\Pi_{j,C}^f(k^2)$ 代替即可, 而 $D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 和 $D_{Z,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 里所包含的各项均为含物理有限的费米圈. 如图 2 所表示的光子重整化混合圈链图传播子函数 $D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$, 虽然每项均存在解析结果, 然而 $D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 却是由众多求和项的分布而形成的一个十分复杂的无穷函数级数构成, 因而需要对其做合理归类处理后方能有效计算出光子重整化混合圈链图传播子收敛的有限函数级数结果. 文献[23]曾在 SU(2) 不变耦合模型中对核子链图传播子 $S_{F,C}^{(chain)}(p)$ 的构架方式做了详细讨论, 并将其表示成便于有效计算的无穷函数级数形式. 类似于文献[23], 我们同样可以将图 2(c) 所示的光子链图传播子 $D_{\gamma,C}^{(chain)}(k^2)$ 表示成便于有效计算的无穷函数级数形式 (由于夸克具有色自由度, 因此对于 $\Pi_{\gamma,C}^f(k^2)$ 再乘以 3)

$$D_{\gamma,C}^{(chain)}(k^2) = \frac{D_\gamma(k^2)}{1 - D_\gamma(k^2) \cdot \sum_{f=1,q} \Pi_{\gamma,C}^f(k^2)}. \quad (7)$$

而对于图 2(d) 所示的中间玻色子链图传播子 $D_{Z,C}^{(chain)}(k^2)$, 我们经过分析同样可将其表示成一个收敛的级数形式

$$D_{Z,C}^{(chain)}(k^2) = \frac{D_Z(k^2)}{1 - D_Z(k^2) \cdot \sum_{f=1,q,v_l} \Pi_{Z,C}^f(k^2)}. \quad (8)$$

至此, 通过(4), (7), (8)式便可获得光子重整化混合圈链图传播子的构架方式, 我们通过相应的计算处理便可将光子重整化混合圈链图传播子表示成

$$\begin{aligned} D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2) &= \frac{1}{k^2 - \sum_{f=1,q} [1 + D_{Z,C}^{(chain)}(k^2) c_V^{f2}] \cdot \Pi_{\gamma,C}^f(k^2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

经过同样的分析讨论, 我们也可获得中间玻色子重整化混合圈链图传播子的解析结果

$$\begin{aligned} D_{Z,C}^{(m\text{-chain})}(k^2) &= \frac{1}{k^2 + m_Z^2 - \sum_{f=1,q} [1 + D_{\gamma,C}^{(chain)}(k^2) c_V^{f2}] \cdot \Pi_{Z,C}^f(k^2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

在标准模型中除了图 2(a), (b) 所示的两种类型中性玻色子混合圈链图传播子外, 还存在如图 3 所示的另外两种类型的交叉混合圈链图传播子

类似于对 $D_{\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$ 的分析, 经过计算后便可表示出其重整化混合圈链图传播子

$$D_{\gamma,Z,C}^{(m\text{-chain})}(k^2) = D_{Z\gamma,C}^{(m\text{-chain})}(k^2)$$

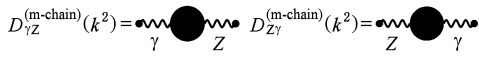


图3 交叉混合圈链图传播子

$$= \frac{D_{\gamma,C}^{(chain)}(k^2) \Pi_{\gamma Z,C}^f(k^2) D_{Z,C}^{(chain)}(k^2)}{1 - \Pi_{\gamma Z,C}^f(k^2) D_{\gamma,C}^{(chain)}(k^2) \Pi_{Z\gamma,C}^f(k^2) D_{Z,C}^{(chain)}(k^2)} \quad (11)$$

表2给出了光子 γ 和中间玻色子 Z_0 混合圈链图传播子对其树图传播子修正的模的大小比较. 其中, E_{cm} 表示质心系能量, $R_\gamma = D_{\gamma,C}^{(m-chain)}(k^2)/D_\gamma(k^2)$ 和 $R_Z = D_{Z,C}^{(m-chain)}(k^2)/D_Z(k^2)$ 分别表示链图传播子对树图传播子的修正量. 可以看出, 链图相对树图的修正量十分微小, 并符合电磁修正和弱修正的数量级.

表2 链图传播子对树图传播子的相对修正量

E_{cm}/GeV	$ R_\gamma $	$ R_Z $
1	1.00940	1.00355
10	1.01266	1.00354
50	1.01460	1.00351
91.2	1.01519	1.00349
200	1.01475	1.00344
1000	1.01388	1.00305

3. SM 中两类中性玻色子混合圈链图传播子的重整化

在所获得的 SM 里的两类中性传播子 γ 和 Z_0 混合圈链图传播子的解析计算结果(9)和(10)式中, 呈现出的均为有限结果. 而为了获得这样的计算结果, 除了采用 Dyson 正则化方案从本问题涉及的各种各样的圈函数里分离出各种各样的发散部分和有限部分之外, 还将其中的所有发散部分在计算中给予去掉而仅保留其有限部分. 做这样的处理是否合理显然取决于所去掉的发散部分是否可以通过合理地全部吸收进 SM 理论中的有关参量中(即重整化)给予说明. 下面, 我们对此给予讨论.

在 SM 中涉及本文两类中性玻色子混合圈链图传播子中的三个物理参数(不考虑 SM 中希格斯玻色子质量和费米子质量, 因在本文考虑的链图传播子理论中未涉及这些物理参量): 精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{g^2 s_w^2}{4\pi} (s_w \equiv \sin\theta_w),$$

中间玻色子质量 m_Z 以及 Weinberg 参量 s_w^2 , 其数值由实验定出.

对于光子真空极化 $\Pi_\gamma^f(k^2)$,

$$\Pi_\gamma^f(k^2) = \Pi_{\gamma,d}^f(0) + \Pi_{\gamma,c}^f(k^2), \quad (12)$$

其中, $\Pi_{\gamma,d}^f(0)$ 是二次发散量, $\Pi_{\gamma,c}^f(k^2)$ 是重整化有限量, 可以引入抵消项 $\delta e = \sum_{f=l,q} \Pi_{\gamma,d}^f(0)$. 对于图2(c)所示的光子链图传播子, 逐阶引入抵消项, 进而可将其表示成如(7)式所示.

对于 γZ_0 混合圈图, 根据 Feynman 规则可得到其与光子真空极化的关系: $\Pi_{\gamma Z}^f(k^2) = \Pi_{Z\gamma}^f(k^2) = c_V^f \Pi_\gamma^f(k^2)$, 对 $\Pi_{\gamma Z}^f(k^2), \Pi_{Z\gamma}^f(k^2)$ 进行正规化处理, 分离出的重整化有限量即为(4)式, 因而对于 γZ_0 混合圈图, 可以引入抵消项 $c_V^f \delta e$ 来消除发散.

对图2和图3所示的四种混合圈链图传播子分析后可以看出, 对于任意高阶圈图, 会对等地(以相同的个数)出现 $\Pi_\gamma^f(k^2), \Pi_{\gamma Z}^f(k^2), \Pi_{Z\gamma}^f(k^2)$ 和 $\Pi_Z^f(k^2)$, 因而在引入抵消项 δe 的同时还会引入 $2 c_V^f \delta e$. 引入抵消项 $(1 + 2c_V^f) \delta e$ 相当于重新定义了 SM 理论中的耦合常数 e ; 换句话说, 对耦合常数 e 作了相应重整化处理 $e \Rightarrow e_R$

$$e_R^2 = [1 + (1 + 2c_V^f) \delta e] e^2. \quad (13)$$

对于中间玻色子自能 $\Pi_Z^f(k^2)$,

$$\Pi_Z^f(k^2) = \Pi_{\gamma,d_1}^f(-m_Z^2) + (k^2 + m_Z^2) \Pi_{\gamma,d_2}^f(-m_Z^2) + \Pi_{\gamma,c}^f(k^2), \quad (14)$$

其中, $\Pi_{\gamma,d_1}^f(-m_Z^2)$ 是二次发散量, $\Pi_{\gamma,d_2}^f(-m_Z^2)$ 是对数发散量, $\Pi_{\gamma,c}^f(k^2)$ 是重整化有限量, 可以引入抵消项 $\delta s_w^2 = \sum_{f=l,q,v_l} \Pi_{\gamma,d_1}^f(-m_Z^2)$ 和 $\delta m_Z^2 =$

$\sum_{f=l,q,v_l} \Pi_{\gamma,d_2}^f(-m_Z^2)$. 对于图2(d)所示的中间玻色子链图传播子, 逐阶引入抵消项, 进而可将其表示成

(8)式所示. 引入抵消项 δs_w^2 和 δm_Z^2 后, 相当于重新定义了理论中的温伯格参量 \hat{s}_w^2 和中间玻色子质量 \hat{m}_Z ; 换句话说, 对这两个物理参量同样也作了相应重整化处理 $s_w^2 \Rightarrow \hat{s}_w^2, m_Z \Rightarrow \hat{m}_Z$

$$\hat{s}_w^2 = s_w^2 / (1 - \delta s_w^2), \quad (15)$$

$$\hat{m}_Z^2 = m_Z^2 \left(1 - \frac{e_R^2}{4\hat{s}_w^2 \hat{c}_w^2} \delta m_Z^2 \right). \quad (16)$$

类似于对 $D_\gamma^{(chain)}(k^2)$ 和 $D_Z^{(chain)}(k^2)$ 的处理方式, 同样可对光子混合圈链图传播子 $D_\gamma^{(m-chain)}(k^2)$ 和中间玻色子混合圈链图传播子 $D_Z^{(m-chain)}(k^2)$ 进行重整化处理.

至此, 我们完成了在 SM 中考虑(涉及)两类中性玻色子混合圈链图传播子理论中的有关重整化

问题的处理.

4. 两类中性玻色子混合圈链图传播子

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应截面的解析计算

在本文中,我们将所获得的 SM 模型中的两类

中性玻色子重整化混合圈链图传播子,应用于高能物理中备受关注的一类轻子反应 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的计算研究里.

根据标准模型, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应 Feynman 图由图 4 给出.

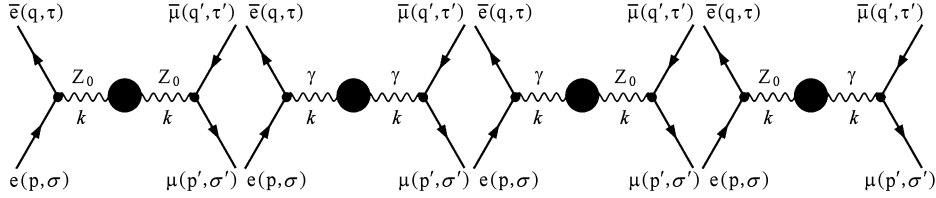


图 4 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应 Feynman 图

根据粒子物理学理论,可以证明, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

的非极化微分截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 在质心系可以表示为^[24]

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}}{d\Omega} = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{m_e^2 m_\mu^2}{4p_0} \frac{|p'|}{q_0} \frac{1}{4} \sum_{\sigma, \sigma', \tau, \tau' = 1}^2 |M|^2. \quad (17)$$

利用 Feynman 规则可得其散射振幅 M 为

$$\begin{aligned} M = & (-e^2) \delta_{\mu\nu} \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\nu \nu_{q'\tau'} D_{\gamma, C}^{(\text{m-chain})}(k^2) \bar{\nu}_{q\tau} \gamma_\mu u_{p\sigma} \\ & - \rho^2 e^2 \delta_{\mu\nu} \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\nu (c_V + c_A \gamma_5) \\ & \times \nu_{q'\tau'} D_{Z, C}^{(\text{m-chain})}(k^2) \bar{\nu}_{q\tau} \gamma_\mu (c_V + c_A \gamma_5) u_{p\sigma} \\ & - \rho e^2 \delta_{\mu\nu} \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\nu (c_V + c_A \gamma_5) \\ & \times \nu_{q'\tau'} D_{\gamma Z, C}^{(\text{m-chain})}(k^2) \bar{\nu}_{q\tau} \gamma_\mu u_{p\sigma} \\ & - \rho e^2 \delta_{\mu\nu} \bar{u}_{p'\sigma'} \gamma_\nu \nu_{q'\tau'} D_{Z\gamma, C}^{(\text{m-chain})}(k^2) \\ & \times \bar{\nu}_{q\tau} \gamma_\mu (c_V + c_A \gamma_5) u_{p\sigma} \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\rho = 1/2 \sin\theta_W \cos\theta_W$; c_V, c_A 分别表示电子和 μ 子的轴矢量流和矢量流常数(式中把 c_V^e, c_V^μ 和 c_A^e, c_A^μ 统一用 c_V, c_A 表示).

我们经过相当冗长的计算后,得到(17)式中的

关键计算量 $\sum_{\sigma, \sigma', \tau, \tau' = 1}^2 |M|^2$, 进而可得到非极化微分截面的最终结果

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} [A_{00}(1 + \cos^2\theta) + A_{11} \cos\theta], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_{00} = & |R_\gamma|^2 + 2\rho^2 |R_\gamma R_Z^*| \text{Re}(\chi) c_V^2 \\ & + 2\rho^3 c_V (c_V^2 + c_A^2) [|\chi|^2 |R_\gamma R_{Z\gamma}^*| \\ & + \text{Re}(\chi) |R_\gamma R_{Z\gamma}^*|] \\ & + 2\rho^2 c_V^2 \text{Re}(\chi) |R_{\gamma Z} R_{Z\gamma}^*| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \rho^4 |\chi|^2 (c_V^2 + c_A^2)^2 |R_Z|^2 \\ & + 2\rho c_V [\text{Re}(\chi) |R_\gamma R_{Z\gamma}^*| + |R_\gamma R_{Z\gamma}^*|] \\ & + \rho^2 (c_V^2 + c_A^2) [|R_{Z\gamma}|^2 \\ & + |\chi|^2 |R_{Z\gamma}|^2], \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & 4\rho^2 c_A^2 \text{Re}(\chi) |R_\gamma R_Z| \\ & + 8\rho^4 |\chi|^2 c_V^2 c_A^2 |R_Z|^2 \\ & + 4\rho^2 c_A^2 \text{Re}(\chi) |R_{\gamma Z} R_{Z\gamma}^*|^2 \\ & + 8\rho^3 c_V c_A^2 |\chi|^2 [|R_Z R_{Z\gamma}^*| \\ & + \text{Re}(\chi) |R_Z R_{Z\gamma}^*|], \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\chi = \frac{k^2}{k^2 + m_Z^2 - im_Z \Gamma_Z}, \quad (20c)$$

$$\text{其中, } R_{\gamma Z} = \frac{D_{\gamma Z, C}^{(\text{m-chain})}(k^2)}{D_\gamma(k^2)}, R_{Z\gamma} = \frac{D_{Z\gamma, C}^{(\text{m-chain})}(k^2)}{D_Z(k^2)}.$$

若令(20(a), 20(b))式中 $R_\gamma, R_Z = 1, R_{\gamma Z} = R_{Z\gamma} = 0$, 便得到树图阶非极化微分截面

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{tree})}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} [A_0(1 + \cos^2\theta) + A_1 \cos\theta], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} A_0 = & 1 + 2\rho^2 \text{Re}(\chi) c_V^2 \\ & + \rho^4 |\chi|^2 (c_V^2 + c_A^2)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$A_1 = 4\rho^2 \text{Re}(\chi) c_A^2 + 8\rho^4 |\chi|^2 c_V^2 c_A^2. \quad (23)$$

对(19), (21)式完成积分 $\left[\int d\Omega \right]$, 便得到相应的总截面

$$\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{cm}}^2} A_{00}, \quad (24)$$

$$\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{tree})} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{cm}}^2} A_0. \quad (25)$$

为了进一步讨论本文链图传播子理论对树图传播子理论的修正物理效应,以便能很好地与实验观测结果作比较,图5给出了质心能量从4 GeV到160 GeV时, $\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}$ 和 $\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{tree})}$ 与相关实验观测值的比较.可以看出 $\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}$ 对 $\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{tree})}$ 的修正相对较小(修正随质心能量的变化有所变化,我们通过计算机选点做数值计算发现修正总体在1%—2%之间),且它们均与实验结果符合得很好.

根据(19)式可以看出,弱相互作用带来了 forward-backward 不对称性 ($A_1 \neq 0$),原因在于弱

耦合是矢量流-轴矢量流耦合.为了具体计算由于弱作用带来的不对称性,定义

$$A_{FB} \equiv \frac{F - B}{F + B}, \quad (26)$$

$$F = \int_0^1 \frac{d\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}}{d\Omega} d\Omega,$$

$$B = \int_{-1}^0 \frac{d\sigma_{\text{unpol.}}^{(\text{chain})}}{d\Omega} d\Omega. \quad (27)$$

对(19)和(20)式完成相应的积分计算后可得到

$$A_{FB} = \frac{3\rho^2 \text{Re}(\chi) c_A^2 |R_Y R_Z| + 6\rho^4 |\chi|^2 c_V^2 c_A^2 |R_Z|^2}{2 |R_Y|^2 + 4\rho^2 |R_Y R_Z^*| \text{Re}(\chi) c_V^2 + 2\rho^4 |\chi|^2 (c_V^2 + c_A^2)^2 |R_Z|^2}. \quad (28)$$

为了讨论由于弱作用带来的微分截面对散射角的不对称性,图6给出了 forward-backward 不对称性随质心能量的变化.

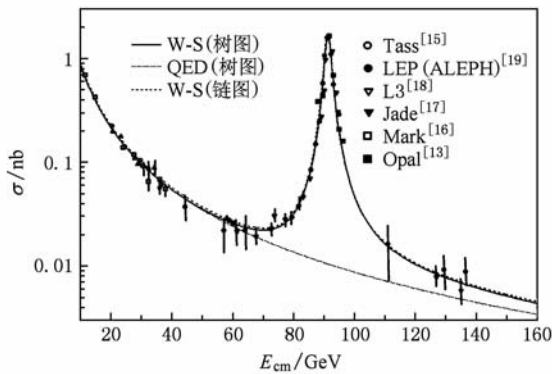


图5 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应非极化总截面随质心能量的变化以及与实验结果的比较

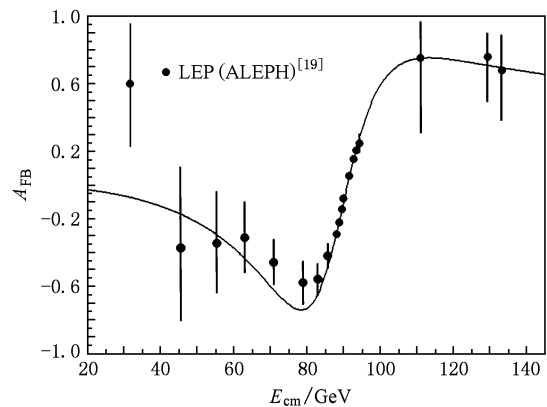


图6 forward-backward 不对称性 A_{FB} 随质心能量的变化以及与实验结果的比较

5. 总结与展望

本文在电弱统一标准模型中,考虑传递电磁相互作用和弱相互作用时的 γ 和 Z_0 传播子中出现各种复杂混合圈时,详细分析了相应链图传播子的构架方式及其重整化问题,并最终解决了由31种不同物理过程的重整化圈图构成 γ 和 Z_0 的重整化混合圈链图传播子的构架问题,进而求出了SM中两类中性玻色子 γ 和 Z_0 的重整化混合圈链图传播子函数;并利用这种特殊的传播子函数,对 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应截面作了严格理论计算.而这一理论计

算结果与实验观测值符合得非常好;这也表明了本文所考虑的计算模式不但是合理正确的,而且具有一定学术参考意义.

关于量子场论重整化问题的研究,自Dyson^[24]于上世纪中期作为开创者与奠基人首先在QED中建立起一套系统的重整化思想以来,在半个多世纪的时间里,对重整化基础理论与计算方法的研究工作一直未停止过.其中,特别值得提到的是Salam^[25]对赝标介子理论、旋量电动力学以及自旋为0的玻色子的电动力学中,可以利用Dyson方程消去微扰论所有高阶的一切发散的相乘重整化的严格证明及其可重整化场论的证明;Weinberg^[26]对量子场论微扰论中任意高阶圈图发散度的分析与重整化积分收敛问题的证明;Zimmerman^[27]对复杂Feynman

图的积分性质由 Euclidean 动量空间延伸到 Minkovski 动量空间所作出的贡献,以及对重整化中减除被积函数式方法的创建; Bogoliubov 和 Parasiuk^[28]对 Dyson 重整化理论的发展所作出的贡献; Hepp^[29]对重整化 Feynman 积分的收敛性问题作的理论研究; Epstein 和 Glaser^[30]对保持所有定域场论性质的重整化问题的研究; 由 'tHooft 所建立起的维数正规化方法^[31]; 由 Appelquist^[32], Bergère 和 Zuber^[33], 以及 Bergère 和 Lam^[34]等在参量空间重整化问题上所作的研究. 所有这些工作已为今后关于各种唯象模型中的重整化问题的研究奠定了坚实的理论基础,而随之关于重整化理论与计算方法的研究便层出不穷,而这些研究工作已在国际重要学术刊物上不断有所报道. 直到本世纪,关于重整化问题及其计算方法的研究工作仍是国

际上热点研究问题之一. 然而需要提到的是,到目前为止,有关在各种唯象模型中的重整化问题的研究,仍多限于逐阶(即有限高阶)作重整化处理. 而这样的处理,与必须引入相应的抵消项有关,为此也需要涉及对场量(共轭场量)作重整化处理,而这些作重整化处理后的重整化常数如何全部吸收进理论中的物理参量(如各种耦合常数以及物理质量等)中,仍是十分困难的工作. 而要涉及微扰论的所有各高阶情形,则异常困难、复杂. 本文考虑的链图传播子重整化模式,不但可以考虑到微扰论部分无穷高阶情形,而且还可以将各抵消项中的重整化常数合理地吸收进理论中的有关物理参量(e, m_Z, s_w^2)中; 因而这一重整化及其计算模式无疑具有一定理论研究意义与学术参考价值.

- [1] Weinberg S 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264
- [2] Dyson F J 1952 *Phys. Rev.* **85** 631
- [3] ZHU H Y 1960 *Quantum Field Theory* (Beijing: Science Press) pp316—356 (in Chinese) [朱洪元 1960 量子场论 (北京: 科学出版社) pp316—356]
- [4] Dyson F J 1949 *Phys. Rev.* **75** 486.
- [5] Zhang Z C, Xu J, Fang Z Y, Gao F, Jiang Z F, Jiang M 2007 *J. Chongqing Univ.* **30** 95 (in Chinese) [张忠灿、徐进、方祯云、高飞、蒋再富、蒋敏 2007 重庆大学学报 **30** 95]
- [6] Jiang M, Fang Z Y, Sang W L, Gao F 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2681
- [7] Denner A, Kraus E, Roth M 2004 *Phys. Rev. D* **70** 033002
- [8] Greub C, Liniger P 2001 *Phys. Rev. D* **63** 054025
- [9] Jack I, Jones D R T, Worthy L A 2007 *Phys. Rev. D* **75** 045014
- [10] Kidonakis N, Owens J M 2001 *Phys. Rev. D* **63** 054019
- [11] Qiang L, Li G J, Chong S L 2002 *Phys. Rev. D* **66** 115008
- [12] Jin L G, Li C S, Oakes R J, Zhu S H 2000 *Phys. Rev. D* **62** 053008
- [13] OPAL Collaboration 1997 *Phys. Lett. B* **391** 221
- [14] SLC 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1701
- [15] TASSO Collaboration 1988 *Z. Phys. C* **40** 163
- [16] Mark J. 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1238
- [17] JADE Collaboration 1986 *Z. Phys. C* **30** 371
- [18] L3 Collaboration 1996 *Phys. Lett. B* **370** 195
- [19] LEP(ALEPH) 1997 *Phys. Lett. B* **399** 329
- [20] Particle Data Group 2008 *Phys. Lett. B* **667** 125, 145
- [21] Zhang Z C, Zhang Y, Fang Z Y, Jiang M, Sun H J, Gao F 2005 *Chongqing Univ.* **28** 108 (in Chinese) [张忠灿、张宇、方祯云、蒋敏、孙红娟、高飞 2005 重庆大学学报 **28** 108]
- [22] Zhang Z C, Gao F, Fang Z Y, Zhang Y, Sun H J, Jiang M 2005 *Chongqing Univ.* **28** 101 (in Chinese) [张忠灿、高飞、方祯云、张宇、孙红娟、蒋敏 2005 重庆大学学报 **28** 101]
- [23] Pan Y, Wang K J, Fang Z Y, Wang X Y, Peng Q J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4817 (in Chinese) [潘宇、王凯俊、方祯云、汪先友、彭庆军 2008 物理学报 **57** 4817]
- [24] Dyson F J 1949 *Phys. Rev.* **75** 486
- [25] Salam A 1951 *Phys. Rev.* **82** 217
- [26] Weinberg S 1960 *Phys. Rev.* **118** 838
- [27] Zimmerman W 1968 *Commun. Math. Phys.* **11** 1
- [28] Bogoliubov N N, Parasiuk O S 1957 *Acta Math.* **97** 208
- [29] Hepp K 1966 *Comm. Math. Phys.* **2** 301
- [30] Epstein H Glaser V 1973 *Ann. Phys.* **77** 536
- [31] 't Hooft G 1971 *Nucl. Phys. B* **33** 173
- [32] Appelquist T 1969 *Ann. of Phys.* **54** 27
- [33] Bergère M C, Zuber J B 1974 *Comm. Math. Phys.* **35** 113
- [34] Bergère M C, Lam Y M P 1974 *Comm. Math. Phys.* **39** 1

Renormalization of two neutral mixing-loop chain propagators in standard model and its $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ cross section *

Chen Xue-Wen^{1)2)†} Fang Zhen-Yun¹⁾ Zhang Jia-Wei¹⁾ Zhong Tao¹⁾ Tu Wei-Xing¹⁾

1) (*Institute of Theoretical Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China*)

2) (*Institute of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China*)

(Received 8 January 2010; revised manuscript received 16 April 2010)

Abstract

Adopting the electroweak standard model, We analyzed the framework forms of photon γ and neutral gauge boson Z_0 mixing-loop chain propagators and the relevant renormalization. Based on this, We obtained the analytic results of renormalized γ and Z_0 mixing-loop chain propagators composed of different physical loops that participate in electroweak interactions. In addition, We applied our result to an important type of lepton interaction in high energy physics: $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$, then obtained the analytic result of cross section via renormalized γ and Z_0 mixing-loop chain propagators. Furthermore, we compared the result with a series of experimental results, and found that the result of this paper is in good agreement with the experimental results. This study would offer certain academic reference to the theoretical study and application of common complex propagators.

Keywords: standard model, chain propagator, renormalization, radiation correction

PACS: 11.10.-z, 11.15.-q, 11.25.Db

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2003CB716300), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175096), and the Foundation of China Academy of Engineering Physics (Grant Nos. 2008T0401, 2008T0402).

† E-mail: 20080601011@cqu.edu.cn