切变基本纬向流中β效应的赤道 Rossby 孤立波包*

宋 健[1)] 姜 楠[2)] 杨联贵[3)†]

1)(内蒙古工业大学理学院,呼和浩特 010051)

2)(天津大学机械学院,天津 300072)

3)(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

(2010 年 1 月 18 日收到;2010 年 4 月 15 日收到修改稿)

从描写赤道 Rossby 波的正压大气位涡方程出发,采用多重尺度摄动方法推导出在切变基本纬向流中具有β效应的非线性赤道 Rossby 波包演变满足非线性 Schrödinger 方程,并得到单个包络孤立子波解,分析了基本切变流,β效应对非线性赤道 Rossby 波的影响.

关键词: 赤道 Rossby 波, β效应, 非线性 Schrödinger 方程, 包络孤立子

PACS: 47.35.Fg, 92.10.Ei, 92.70.Cp

1. 引 言

大气动力学中,Rossby 波是指生命史很长结构上有组织的前后一致的大尺度永久性波动,并且这些波动具有稳定的、大振幅的孤立波特征. 特别是热带大气运动与全球气候变化有密切联系,人们对热带大气运动规律有许多新的认识,其中热带大气波动理论是低纬度大气动力学研究的重要内容. Matsuno[1]在 1966 年做了开创性的研究,得到在赤道β平面大气运动的线性波动,并分析研究了它们的特性. Domaracki 和 Loesch[2],Ripa[3]研究了赤道波与波之间的相互作用. Body[4—6]给出了非线性 Kelvin 波,并利用摄动方法从赤道β平面浅水模式原始方程导出小振幅赤道 Rossby 波随时间的演变满足 Korteweg-de Vries (KdV) 方程或者 modify Korteweg-de Vries(mKdV)方程,这些研究表明存在赤道 Rossby 孤立波. 然而对于 KdV(mKdV)型孤立波是考虑了长波近似(纬向波数 $k\to 0$)的情况,在实际大气中,特别是大气中存在大振幅的 Rossby 波,长波近似并不成立. Domaracki 和 Loesch[2],Ripa[3]和 Body[7,8]的研究都未涉及基本气流对赤道波动的影响,这与实际不相符合;赵强和刘式适[9]在考虑基本流切变对赤道波动的影响下,推导出非线性赤道 Rossby 波包演变满足非线性 Schrödinger 方程. 赵强等[10]还用多重尺度摄动法从赤道β平面浅水模式出发,描述了赤道 Rossby 孤立波振幅满足非线性 Schrödinger 方程,并分析了切变纬向流对非线性赤道 Rossby 孤立波波动的影响,但是他们都没有考虑β效应(参数β是纬度变量 y 的函数)对赤道 Rossby 波的影响. Charney 和 Straus[11]基于准地转位涡度方程构造了一个β平面通道中考虑地形、非绝热加热和摩擦的正压大气模式,这项工作开创了大气多平衡态非线性动力学的研究. 封国林等[12—16]建立了南方涛动与厄尔尼诺循环统一的海-气振荡子的随机动力学模型. 达朝究和丑纪范[17]研究了地形随时间缓变时 Rossby 波振幅的演变问题. 宋健等[18—23]在正压流体与层结流体中分别给出β效应与地形效应对 Rossby 孤立波振幅的影响. 孤立波解在非线性问题中占有重要地位, 给出了许多求孤立波解的方法[24—28], 如 Hirota's 双线性方法[29]、椭圆函数展开法[30,31]以及数值方法[32,33,34]等被广泛应用. 本文中,我们研究了在切变基本纬向流下,参数β随纬度变化时赤道 Rossby 孤立波振幅的演变,说明了即使没有基本气流切变仍可以由β效应诱导非线性 Rossby 孤立波.

* 内蒙古自然科学重点基金(批准号: 2009ZD01)和内蒙古教育厅基金(批准号: NJZY08005)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:lgyang@imu.edu.cn

2. 方程的推导

2.1. 控制方程与边界条件

Charney[35]指出,在无凝结潜热释放大气中,热带大气运动是水平和准无辐散的,该模型中只存在 Rossby 波而滤去了重力波. 采用一个简单的模式方程,其中考虑β随纬度变量y变化,这样赤道 Rossby 的正压位涡方程[36]为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\beta(y)y+\nabla^2\psi-\frac{\beta^2(y)y^2}{c_0^2}\psi\right]=0,\tag{1}$$

式中,ψ是流函数,∇^2为二维 Laplace 算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\tag{2}$$

$c_0^2=gh$是重力波速的平方,方程(1)中β是纬度变量y的函数. 热带赤道附近的波动运动在远离赤道时可以认为波动消失,即相当于取如下边界条件:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,y\to\pm\infty.\tag{3}$$

若令

$$t=\frac{L}{U}t^*,\ (x,y)=L(x^*,y^*),$$
$$\psi=(UL)\psi,\beta=\frac{U}{L^2}\beta^*,\tag{4}$$

其中$L=\sqrt{\dfrac{c_0}{\beta}}$是赤道 Rossby 变形半径,$U$是速度特征量,带星号的量均为无量纲量. 将(4)式代入方程(1),得到无量纲形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}^2\psi+J(\psi,\boldsymbol{\nabla}^2\psi)+\frac{\mathrm{d}\beta(y)y}{\mathrm{d}y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\tag{5}$$

式中$\boldsymbol{\nabla}^2=\nabla^2-y^2$, $J(a,b)=\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial y}-\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial x}$为 Jacobi 算子. 方程(5)中无量纲的星号已略去.

无量纲下的边界条件为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,y\to\pm\infty.\tag{6}$$

2.2. 非线性 Schrödinger 方程

取总流函数为纬向流与扰动流函数的和为

$$\psi(y)=-\int^y\bar{u}(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon\tilde{\psi},\tag{7}$$

式中,前一项假定基本纬向流仅为y的函数,ε是无量纲赤道 Rossby 数,表征非线性的强弱,$\tilde{\psi}$是扰动流函数. 将(7)式代入方程(5)和(6),得到扰动流函数的方程与边界条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+p(y)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}+\varepsilon J(\tilde{\psi},\boldsymbol{\nabla}^2\psi)=0,\tag{8}$$

其中$p(y)=\dfrac{\mathrm{d}\beta(y)y}{\mathrm{d}y}-\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}y^2}$,

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}=0,\ y\to\pm\infty.\tag{9}$$

由于地球大气运动具有多时空尺度的特征,除了快变量x和t外,可以引入如下慢时空变量[2]:

$$T_1=\varepsilon t,T_2=\varepsilon^2t,X_1=\varepsilon x,X_2=\varepsilon^2x.\tag{10}$$

将(10)式代入方程(8)得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+p(y)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}+\varepsilon\Big[2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_1}+\frac{\partial}{\partial T_1}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+p(y)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial X_1}\\&+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_1}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X_1}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+J(\tilde{\psi},\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi})\Big]+\varepsilon^2\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial X_1^2}+2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_2}\Big)\\&+2\frac{\partial}{\partial T_2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_1}+\frac{\partial}{\partial T_2}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+p(y)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial X_2}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial X_1^2}+2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_2}\Big)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_1}\\&+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X_2}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X_1}\boldsymbol{\nabla}^2\tilde{\psi}+2J\Big(\tilde{\psi},\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial X_1}\Big)\Big]+O(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{11}$$

假设扰动流函数有如下的小参数展开形式[37]:

$$\tilde{\psi}=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots,\tag{12}$$

将(12)式代入方程(11)得到各阶摄动问题的方程与边界条件.

对于$O(\varepsilon^0)$阶,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{\nabla}^2\psi_0+p(y)\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=0,\tag{13}$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=0,\ y\to\pm\infty. \tag{14}$$

假设 ψ_0 有如下形式的分离变量解

$$\psi_0=A(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_0(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}, \tag{15}$$

其中 c.c. 表示它前项的共轭,$A(X_1,X_2;T_1,T_2)$为复振幅,k 为纬向波数. 将(15)式代入方程(13)和(14)得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_0}{\mathrm{d}y^2}+\left(\frac{kp(y)}{k\bar{u}-\omega}-k^2-y^2\right)\Phi_0=0, \tag{16}$$

$$\Phi_0(y)=0,\quad y\to\pm\infty. \tag{17}$$

在方程(16)中,$k\bar{u}-\omega$ 为 Doppler 位移频率. 方程(16)与边界条件(17)构成 Sturm-Liouville 方程的本征问题,对于确定的基本风速 $\bar{u}$ 与常数 β,这就是给定的本征值问题,则 $\Phi_0(y)$是可以完全确定的本征函数. 对于一般的速度廓线 $\bar{u}(y)$与 $\beta(y)$,这是一个变系数问题,很难获得解析解. 对于不考虑基本气流影响($\bar{u}=0$)且 β 是常数, 方程(16)为 Weber 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_0}{\mathrm{d}y^2}+\left(-\frac{k}{\omega}-k^2-y^2\right)\Phi_0=0, \tag{18}$$

Weber 方程的本征值为

$$-k^2-\frac{k}{\omega}=2n+1\quad(n=0,1,2,\cdots), \tag{19}$$

其中 n 为经向模态数. 相应的本征函数为

$$\Phi_0(y)=C_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{H}(y)\quad(n=0,1,2,\cdots), \tag{20}$$

这里 C_n 为任意常数,$\mathrm{H}_n(y)$是 n 阶 Hermite 多项式. 另外,在本阶问题中,只能确定波的空间结构,而不能确定波振幅随时间的演变. 为了确定波振幅 $A(X_1,X_2;T_1,T_2)$的演变,继续求解高阶问题.

对于 $O(\varepsilon^1)$阶,有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi_1+p(y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\&=-\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\nabla^2\psi_0\\&\quad-p(y)\frac{\partial\psi_0}{\partial X_1}-2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial X_1}\\&\quad-J(\psi_0,\nabla^2\psi_0)\equiv F_1,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0,\ y\to\pm\infty, \tag{22}$$

由 $\psi_0=A(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_0(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}$ 与方程(16)得

$$\begin{aligned}F_1=&\frac{p(y)\Phi_0}{\bar{u}-c}\left(\frac{\partial A}{\partial T_1}+c_1\frac{\partial A}{\partial X_1}\right)+\mathrm{i}k\left(\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\right)_y\\&\times\Phi_0^2A^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.},\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $c=\dfrac{\omega}{k}$, $c_1=c+\dfrac{2k^2(\bar{u}-c)^2}{p(y)}$, $\left(\dfrac{p(y)}{\bar{u}-c}\right)_y$ 是 $\dfrac{p(y)}{\bar{u}-c}$ 对 y 的一阶导数, 这里已假设 $\bar{u}\neq c$. 利用消去长期项得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_0}{\bar{u}-c}\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Phi_0\mathrm{d}y\frac{\partial A}{\partial T_1}+\int_{-\infty}^{+\infty}c\frac{\Phi_0}{\bar{u}-c}\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Phi_0\mathrm{d}y\times\frac{\partial A}{\partial X_1}+\int_{-\infty}^{+\infty}2k^2\Phi_0^2\mathrm{d}y\frac{\partial A}{\partial X_1}=0, \tag{24}$$

令

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(y)\Phi_0^2}{(\bar{u}-c)^2}\mathrm{d}y,\quad I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}2k^2\Phi_0^2\mathrm{d}y, \tag{25}$$

方程(24)简化为

$$\frac{\partial A}{\partial T_1}+c_{\mathrm{g}}\frac{\partial A}{\partial X_1}=0, \tag{26}$$

其中 $c_{\mathrm{g}}=c+\dfrac{I_1}{I}$. 在 $O(\varepsilon^1)$阶问题中, 波振幅 $A(X_1,X_2;T_1,T_2)$以 c_{g} 速度传播,从物理意义上讲 c_{g} 就是波的群速度. 此时方程(21)为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi_1+p(y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\mathrm{i}kA^2Q(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}, \tag{27}$$

这里

$$Q(y)=\left(\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\right)_y\Phi_0^2. \tag{28}$$

假设方程(27)有如下谐波解

$$\psi_1=B(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_1(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}, \tag{29}$$

将(29)式代入方程(27)与(22)得

$$B\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}y^2}-4k^2\Phi_1-y^2\Phi_1+\frac{kp(y)}{k\bar{u}-\omega}\Phi_1\right)=\frac{1}{2\bar{u}-2c}Q(y)A^2, \tag{30}$$

$$\Phi_1(y)=0,\ y\to\pm\infty, \tag{31}$$

在方程(30)中,A 和 B 是两个相互联系的变量,由于 A 和 B 都是慢变量 X_1,X_2,T_1,T_2 的函数,并且 B 与 A^2 成比例. 不妨设 $B=A^2$,则

$$\psi_1=A^2(X_1,X_2;T_1,T_2)\Phi_1(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(kx-\omega t)}+\mathrm{c.c.}$$

对于 $O(\varepsilon^2)$阶,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi_2+p(y)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=F_2, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0,\ y \to \pm\infty, \tag{33}$$

方程(32)中,

$$\begin{aligned} F_2 = \Big\{ & \frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Phi_0\Big[\frac{\partial A}{\partial T_2} + c_1\frac{\partial A}{\partial X_2} \\ & + \mathrm{i}k\frac{\bar{u}-c}{p(y)}(c+2c_g-3\bar{u})\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2}\Big] \\ & + \mathrm{i}k|A|^2 A\Big[\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}y} \\ & + \Phi_0\Phi_1\Big(\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y + \frac{\Phi_0}{2}\Big(\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y\Big]\Big\} \\ & \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + \mathrm{c.c.} + \square, \end{aligned} \tag{34}$$

这里 $\left(\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\right)_y$ 是 $\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}$ 对变量 y 的导数,□ 表示与 $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 和 $\mathrm{e}^{\pm 3\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 有关的其他项.

消去长期项

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_2}{\bar{u}-c}\Phi_0\mathrm{d}y = 0, \tag{35}$$

将 F_2 代入(35)式得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(y)}{(\bar{u}-c)^2}\Phi_0^2\mathrm{d}y\Big(\frac{\partial A}{\partial T_2} + c_1\frac{\partial A}{\partial X_2}\Big) \\ & + \mathrm{i}k\int_{-\infty}^{+\infty} c\,\frac{c+2c_g-3\bar{u}}{\bar{u}-c}\Phi_0^2\mathrm{d}y\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} \\ & + \mathrm{i}k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_0}{\bar{u}-c}\Big[\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}y} + \Phi_0\Phi_1\Big(\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y \\ & + \frac{\Phi_0}{2}\Big(\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y\Big]\mathrm{d}y|A|^2 A = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

令

$$\alpha = -\frac{I_2}{I},\delta = -\frac{I_3}{I}, \tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned} I_2 &= k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c+2c_g-3\bar{u}}{\bar{u}-c}\Phi_0^2\mathrm{d}y, \\ I_3 &= k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_0}{\bar{u}-c}\Big[\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}y} \\ & \quad + \Phi_0\Phi_1\Big(\frac{p(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y + \frac{\Phi_0}{2}\Big(\frac{Q(y)}{\bar{u}-c}\Big)_y\Big]\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

方程(36)化为

$$\mathrm{i}\Big(\frac{\partial A}{\partial T_2} + c_1\frac{\partial A}{\partial X_2}\Big) + \alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \delta|A|^2 A = 0, \tag{38}$$

α 和 δ 分别是频散系数和非线性系数(即 Landau 系数),它们与 $\beta(y)$ 和 $\bar{u}(y)$ 有关.

方程(38)就是描述切变基本流中 β 效应下赤道 Rossby 波包振幅演变的非线性 Schrödinger 方程,它反映了赤道 Rossby 波的特性. 做坐标变换[37]

$$T = T_2, X = \frac{1}{\varepsilon}(X_2 - c_g T_2) = X_1 - c_g T_1, \tag{39}$$

则(37)式化为标准的非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial T} + \alpha\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \delta|A|^2 A = 0. \tag{40}$$

若基本气流不存在切变($\bar{u}$ = 常数)时,当 β 是纬度变量 y 的函数,由(28)式知 $Q(y)\neq 0$,这时 $\delta\neq 0$,方程(40)仍是非线性 Schrödinger 方程. 这说明即使没有基本气流水平切变,只要 β 效应存在,赤道 Rossby 波振幅演变也满足非线性 Schrödinger 方程. 只有当基本流无切变,β 是常数时,方程(40)中的非线性项消失.

方程(40)有如下单个包络孤立波解

$$\begin{aligned} A(X,T) = & \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}M\mathrm{sech}M(X-2\alpha\xi T) \\ & \times \exp\{\mathrm{i}[\xi X - \alpha(\xi^2 - M^2)T]\}, \end{aligned} \tag{41}$$

式中 M 和 ξ 分别是 Rossby 包络孤立波的振幅和移速,它们的值由 $A(X,T)$ 的初始状态决定. 将(15)和(41)式代入(7)式得

$$\begin{aligned} \psi(y) = & -\int^{y}\bar{u}(s)\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}Msech\varepsilon M(x-Vt) \\ & \times \Phi_0\exp[\mathrm{i}(Kx-\Omega t)], \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned} V &= c_g + 2\varepsilon\alpha\xi, \\ K &= k + \varepsilon\xi, \\ \Omega &= \omega + \varepsilon\xi c_g + \alpha\varepsilon^2(\xi^2 - M^2). \end{aligned} \tag{43}$$

(42)和(43)式说明赤道 Rossby 包络孤立波传播速度 V 等于线性 Rossby 波的群速度加上一个小修正量,载波波数 K 等于线性 Rossby 波波数 k 加上一个小修正量,载波频率 Ω 等于线性 Rossby 波的频率 ω 加上两项小修正量且与它的波振幅有关,显示非线性的特征. 这说明赤道大气中 Rossby 波与切变基本气流、β 效应的的非线性相互作用,可以使大气中形成具有 sech 形状的孤立子. 此外,孤立波的存在还必须有 $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(y)\Phi_0^2}{(\bar{u}-c)^2}\mathrm{d}y\neq 0$,这表示不能产生正压不稳定[38]. 事实上,一旦产生正压不稳定,就不可能保持恒定波型了.

3. 结　论

在正压流体中,应用多重尺度摄动法,从描写赤道 Rossby 波位涡度方程推导出在切变基本纬向

流中 β 是纬度变量 y 的函数下,非线性赤道 Rossby 波包演变满足非线性 Schrödinger 方程,并得到其包络孤立波解. 这说明赤道大气中 Rossby 波与切变的基本气流,β 效应的非线性相互作用,可以使大气中形成 Rossby 包络孤立子,而且这种孤立波是不需要长波近似条件的频散波. 它可以解释赤道大气中西移 Modons 最后通过能量频散而崩溃消失,并进一步说明即使没有基本气流切变,仍由 β 效应诱导非线性出 Rossby 孤立波. 基本气流切变、非线性 β 效应显然都是 Rossby 孤立波产生的重要因子.

[1] Matsuno T 1966 *J. Meteor. Soc. Japan* **44** 25

[2] Domaracki A, Loesch A Z 1977 *J. Atmos. Sci.* **34** 486

[3] Ripa P 1982 *J. Phys. Oceanogr.* **12** 97

[4] Body J P 1980a *J. Phys. Oceanogr.* **10** 1

[5] Body J P 1980b *J. Phys. Oceanogr.* **10** 1699

[6] Body J P 1984 *Dyn. Atmos. Oceans* **8** 173

[7] Body J P 1985 *J. Phys. Oceanogr.* **15** 46

[8] Body J P 1983 *J. Phys. Oceanogr.* **13** 428

[9] Zhao Q, Liu S K 2001 *Chin. J. Atmos. Sci.* **25** 133 (in Chinese) [赵 强、刘式适 2001 大气科学 **25** 133]

[10] Zhao Q, Fu Z T, Liu S K 2001 *Adv. Sci.* **18** 418

[11] Chraney J G, Straus D M 1980 *J. Atmos. Sci.* **37** 1157

[12] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[13] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]

[14] Feng G L, Gao X Q, Dong W J, Li J P 2008 *Chaos Solitons and Fractals* **37** 487

[15] Feng G L, Gong Z Q, Zhi R, Zhang D Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2745

[16] Feng G L, Wang Q G, Hou W, Gong Z Q, Zhi R 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2853 (in Chinese) [封国林、王启光、侯 威、龚志强、支 蓉 2009 物理学报 **58** 2853]

[17] Da C J, Chou J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2595 (in Chinese) [达朝究、丑纪范 2008 物理学报 **57** 2595]

[18] Song J, Yang L G, Da C J, Zhang H Q 2009 *Atmos. Ocea. Sci. Lett.* **2** 18

[19] Song J, Yang L G 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2873

[20] Song J, Yang L G 2009 *Proc. Geophys.* **25** 543 (in Chinese) [宋 健、杨联贵 2010 地球物理学进展 **25** 543]

[21] Song J, Yang L G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 383 (in Chinese) [宋 健、杨联贵 2010 物理学报 **59** 383]

[22] Song J, Lai J F 2010 *Acta Phys. Sin* **59** 4756 (in Chinese) [宋 健、赖俊峰 2010 物理学报 **59** 4756]

[23] Song J, Yang L G 2010 *Plateau Meteor.* **29** 1137

[24] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[25] Fan E G, Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 1409]

[26] Mao J J, Yang J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4999 (in Chinese) [毛杰健、杨建荣 2005 物理学报 **54** 4999]

[27] Zhu H P, Zheng C L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4999 (in Chinese) [朱海平、郑春龙 2006 物理学报 **55** 4999]

[28] Chen X F, Mo J Q, Zhang W J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7397 (in Chinese) [陈贤峰、莫嘉琪、张伟江 2009 物理学报 **58** 7397]

[29] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健、杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]

[30] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[31] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]

[32] He W P, Feng G L, Dong W J, Li J P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3258 (in Chinese) [何文平、封国林、董文杰、李建平 2004 物理学报 **53** 3258]

[33] He W P, Feng G L, Wu Q, Wan S Q, Chou J F 2008 *Non. Pro. Geophys.* **15** 601

[34] Zhou L, Gong Z Q, Zhi R, Feng G L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7380 (in Chinese) [周 磊、龚志强、支 蓉、封国林 2008 物理学报 **57** 7380]

[35] Charney J G 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 607

[36] Gill A E 1982 *Atmosphere-Oean Dynamics* (San Diego: Academic Press) pp444—447

[37] Jeffrey A, Kawahara T 1982 *Asymptotic Methods in Nonlinear Waves Theory* (Melbourne: Pitman Publishing Inc.) pp256—266

[38] Kuo H L 1949 *J. Meteor.* **6** 105

Equatorial Rossby envelope solitary waves with β effect in a shear flow*

Song Jian[1)] Jiang Nan[2)] Yang Lian-Gui[3)†]

1) (*College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

2) (*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

3) (*School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *China*)

(Received 18 January 2010; revised manuscript received 15 April 2010)

Abstract

With a simple model of shallow-water on an equatorial beta plane, the nonlinear equatorial Rossby waves in a shear flow with beta effect are investigated by the asymptotic method of multiple scales. The nonlinear Schrödinger equation, satisfied by large amplitude Rossby envelope solitary waves in shear basic flow with beta effect, is derived. The effects of basic flow shear and beta effect on the nonlinear equatorial Rossby waves are also analyzed.

Keywords: equatorial Rossby wave, β effect, nonlinear Schrödinger equation, envelope soliton

PACS: 47.35.Fg, 92.10.Ei, 92.70.Cp

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2009ZD01) and the Educational Department of Inner Mongolia, China (Grant No. NJZY08005).

† Corresponding author. E-mail: lgyang@imu.edu.cn