一类非线性尘埃等离子体孤波解*

莫嘉琪†

(安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所, 上海 200240)

(2010 年 5 月 12 日收到;2010 年 5 月 25 日收到修改稿)

研究了一类非线性尘埃等离子体孤波解. 首先构造一个变分迭代, 其次决定系统的初始近似, 最后通过变分迭代方法得到了对应模型的各次近似解.

关键词: 等离子体, 变分迭代, 近似解

PACS: 02.30.Mv

1. 引 言

近年来, 学术界对于尘埃等离子体中的低频振动十分关注[1,2]. 许多学者作了关于尘埃等离子体中非线性波的研究[3], 包括有尘埃包络孤立波[4], 尘埃孤立波的调制不稳定性[5], 尘埃颗粒大小及尘埃荷电量对尘埃等离子体中各种非线性波的影响[6], 弱二维尘埃等离子体中尘埃声波在受到高阶横向扰动时的稳定性[5]等问题.

对于等离子体系统一维 KdV 方程描述的孤立子的碰撞问题已经进行了大量的研究, 包括孤立子的正碰 (head on collision) 与追碰 (overtaking collision)[7]. 如果在横向方向非线性波, 可由 Kadomtsev-Pctviashvili (KP) 方程来描述. 最近一些学者对二维 Bose Einstein 凝聚系统[8]、等离子体系统[9]及非线性晶格[10]系统传播的孤立子的碰撞问题也做了很多工作. 我们将利用广义变分迭代方法得到等离子体系统非线性广义 KP 方程的近似孤子波解. 非线性问题, 近来, 许多近似方法被发展,包括边界层法,平均法和多重尺度法等. 作者等利用同伦映射等方法也讨论了一类非线性方程孤子波解的问题[11—17]. 本文是利用广义变分迭代方法[18]得到了一类广义尘埃等离子体中非线性孤立子波的渐近解.

2. 尘埃等离子体方程

对于二维低频尘埃声波,冷尘埃等离子体满足的无量纲化的流体力学方程组为

$$\frac{\partial n_{\mathrm{d}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_{\mathrm{d}}u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(n_{\mathrm{d}}u_y)=0,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=Z_{\mathrm{d}}\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}=Z_{\mathrm{d}}\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=Z_{\mathrm{d}}n_{\mathrm{d}}+n_{\mathrm{e}},-n_{\mathrm{il}}-n_{\mathrm{ih}},$$

$$n_{\mathrm{e}}=A_{\mathrm{e0}}\exp(\beta_1 s\phi),\quad n_{\mathrm{il}}=A_{\mathrm{il0}}\exp(-s\phi),$$

$$n_{\mathrm{il}}=A_{\mathrm{il0}}\exp(-s\phi),\quad n_{\mathrm{ih}}=A_{\mathrm{ih0}}\exp(-\beta s\phi),$$

其中 u_x, u_y 分别是尘埃流体在 x 与 y 的速度分量, $n_{\mathrm{d}}, m_{\mathrm{d}}$ 分别是尘埃颗粒的密度和质量, $Q_{\mathrm{d}}=eZ_{\mathrm{d}}$ 是尘埃颗粒上的荷电, $A_{\mathrm{e0}}=\frac{n_{\mathrm{il0}}}{Z_{\mathrm{d0}}n_{\mathrm{d0}}}$, $A_{\mathrm{ih0}}=\frac{n_{\mathrm{ih0}}}{Z_{\mathrm{d0}}n_{\mathrm{d0}}}$, $\beta_1=\frac{T_{\mathrm{il}}}{T_{\mathrm{ES}}}$, $\beta_2=\frac{T_{\mathrm{iH}}}{T_{\mathrm{E}}}$, $\beta=\frac{\beta_1}{\beta_2}$, $s=\frac{Z_{\mathrm{d0}}n_{\mathrm{d0}}T_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{ih}}}{n_{\mathrm{e0}}T_{\mathrm{ih}}T_{\mathrm{il}}+n_{\mathrm{il0}}T_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{ih}}+n_{\mathrm{ih0}}T_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{il}}}$, $T_{\mathrm{e}}, T_{\mathrm{il}}, T_{\mathrm{ih}}$ 分别表示电子、低温离子与高温离子的温度.

---

* 国家自然科学基金(批准号:40876010), 中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08), 公益性行业科研专项(批准号:GYHY200806010), LASG 国家重点实验室专项经费, 上海市教育委员会建设计划项目(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090164) 资助的课题.

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

假设电子和离子的流动速度小于它们的热运动速度，我们将用传统的摄动方法来并作一些变量变换，可获得如下典型的 KP 方程[8]：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]+3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0. \qquad (1)$$

不难得到方程(1)有如下单孤子解：

$$u=-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right], \qquad (2)$$

其中 k,l 为常数，$\omega=4/c^2$，c 是线性尘埃声波的传播速，显然(2)式的振幅为 $-k^2/2$. 我们还可得到双孤子解和三孤子解等. 并且发现振幅相等的两(三)个孤立子在相互作用区域振幅的最大值可以是单个孤立子振幅的 4(9) 倍[19]. 可以想象，如果有 N 个孤子发生相互作用在特殊的条件下，在相互作用区域振幅的最大值就可能会达到 N^2 倍. 在等离子体中如果出现这种情况，由于出现超高密度电荷的聚集就有可能会导致放电击穿现象. 因而我们还有必要讨论广义 KP 方程的孤立子波解.

3. 广义 KP 方程孤立子解

作为方程(1)的更一般的情形,进一步考虑如下尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的广义非线性 KP 方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]+3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=f(t,x,y,u), \qquad (3)$$

其中 $f(t,x,y,u)$ 为二维低频尘埃声波的扰动项，设它是关于其变量为充分光滑的有界函数.

我们将利用广义变分迭代方法得到尘埃等离子体中的低频振动广义 KP 方程(3)的近似孤子波解[18]. 今引入泛函 F：

$$F[u]=u-\int_0^t\int_0^x\lambda(\tau,\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\xi^3}-6\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\right]+3\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial y^3}-f(t,x,y,\bar{u})\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi, \qquad (4)$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的限制变量[18]，λ 为 Lagrange 乘子. 泛函(4)的变分 δF 为

$$\delta F=\delta u-\lambda\Big|_{\xi=x,\tau=t}\delta u+\int_0^t\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\Big|_{\xi=x}\delta u\mathrm{d}\tau+\int_0^x\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\Big|_{\tau=t}\delta u\mathrm{d}\xi-\int_0^t\int_0^x\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi\partial\tau}\delta u\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\right].$$

令 $\delta F=0$. 于是有

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi\partial\tau}=0,\ \xi\leqslant x,\tau\leqslant t,$$

$$\lambda\Big|_{\xi=x,\tau=t}=1,\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\Big|_{\xi=x}=\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\Big|_{\tau=t}=0. \qquad (5)$$

(5)式的解为 $\lambda=1$. 因此由(4)式，我们构造如下变分迭代：

$$u_{n+1}=u_n-\int_0^t\int_0^x\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial u_n}{\partial\tau}+\frac{\partial^3 u_n}{\partial\xi^3}-6u_n\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\right]+3\frac{\partial^3 u_n}{\partial\eta^3}-f(t,x,y,u_n)\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,$$
$$n=1,2,\cdots. \qquad (6)$$

由(6)式，当选取初始近似 $u_0(t,x,y)$ 后，可得依次得到 $u_n(n=0,1,2,\cdots)$.

4. 方程的近似解与精确解

首先选取尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的非线性广义 KP 方程(3)的零次近似为对应的典型的 KP 方程(1)的孤立子解(2)，即

$$u_0(t,x,y)=-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right]. \qquad (7)$$

将(7)式代入(6)式，得到具有扰动的非线性广义 KP 方程(3)的一次近似

$$u_1(t,x,y)=-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right]+\int_0^t\int_0^x f\left(\tau,\xi,y,-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{k\xi+ly-\omega\tau}{2}\right]\right)\times\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi. \qquad (8)$$

将(7)，(8)式代入(6)式，得到具有扰动的非线性广义 KP 方程(3)的二次近似

$$u_2(t,x,y)=-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right]+g(t,x,y)+\int_0^t\int_0^x\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial g}{\partial\tau}+\frac{\partial^3 g}{\partial\xi^3}-6u_0\frac{\partial g}{\partial\xi}-6g\frac{\partial u_0}{\partial\xi}\right]+3\frac{\partial^3 g}{\partial\eta^3}-f\left(\tau,\xi,y,-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{k\xi+ly-\omega\tau}{2}\right]+g(\tau,\xi,\eta)\right)\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi,$$

其中 u_0 由(7)式表示，而

$$g(t,x,y)=\int_0^t\int_0^x f\left(\tau,\xi,y,-\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{k\xi+ly-\omega\tau}{2}\right]\right)$$

$$\times \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\xi . \tag{9}$$

继续利用迭代式(6), 可以得到具有扰动的非线性广义 KP 方程(3)的更高的 $n(n=3,4,\cdots)$ 次近似 $u_n(t,x,y)$ 为

$$\begin{aligned} u_n(t,x,y) = & -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right] \\ & + g(t,x,y) + G_n(t,x,y), \\ & (n = 2,3,\cdots), \end{aligned}$$

其中 $g(t,x,y)$ 由(9)式表示, $G_n(t,x,y)\ (n=3,4,\cdots)$ 为逐次已知的函数, 其结构从略.

这时我们便得到序列 $\{u_n(t,x,y), n=0,1,2,\cdots\}$, 可以证明, $\{u_n(t,x,y)\}$ 在 $(t,x,y)\in[0.T]\times[0,M]^2$ 上为一致收敛的序列, 其中 T,M 为任意大的正常数. 由函数 $f(t,x,y,u)$ 的假设和(6), (7)式不难看出极限函数

$$u(t,x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x,y)$$

就是尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的非线性广义 KP 方程(3)的精确解.

5. 举 例

现在来考虑一个简单的例子. 设尘埃等离子体中的低频振动非线性广义 KP 方程(3)的扰动项为 $f = A\exp[-(kx+ly-\omega t)]$, 其中 A,k,l 为常数, $\omega = 4/c^2$, c 是线性尘埃声波的传播速为一个正常数. 这时由(3)式, 尘埃等离子体中具有扰动的非线性广义 KP 方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right] + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ & = A\exp[-(kx+ly-\omega t)]. \end{aligned} \tag{10}$$

用变分迭代关系式(6). 仍取方程(10)解 $U(t,x,y)$ 的初始近似 U_0 为孤立子,

$$U_0(t,x,y) = -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right]. \tag{11}$$

由(11), (6), (9)式, 得到(10)式解 $U(t,x,y)$ 的一次近似 U_1 为

$$\begin{aligned} U_1(t,x,y) = & -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right] \\ & - \frac{1}{kl}[\exp(-kx)-1] \\ & \times [(\exp(\omega t)-1]\exp(-ly). \end{aligned} \tag{12}$$

由(11), (12), (6)式, 可求出具有扰动的非线性广义 KP 方程(10)解 $U(t,x,y)$ 的二次近似 U_2 为

$$\begin{aligned} U_2(t,x,y) = & -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right] \\ & - \frac{1}{kl}[\exp(-kx)-1] \\ & \times \left[(\exp(\omega t)-1]\exp(-ly)\right. \\ & - \int_0^t\int_0^x \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial\tau} + \frac{\partial^3\bar{g}}{\partial\xi^3}\right.\right. \\ & \left. - 6U_0\frac{\partial\bar{g}}{\partial\xi} - 6\bar{g}\frac{\partial U_0}{\partial\xi}\right] + 3\frac{\partial^3\bar{g}}{\partial\eta^3} \\ & \left. - A\cos\omega\tau\right] + \bar{g}(\tau,\xi,\eta)\Big]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \end{aligned}$$

其中 U_0 由(11)式表示, 而

$$\begin{aligned} \bar{g}(t,x,y) = & -\frac{1}{kl}[\exp(-kx)-1] \\ & \times[(\exp(\omega t)-1]\exp(-ly). \end{aligned}$$

继续利用迭代式(6), 可以得到具尘埃等离子体中的低频振动有扰动的非线性广义 KP 方程(10)解 $U(t,x,y)$ 的更高的 $n(n=3,4,\cdots)$ 次近似 $U_n(t,x,y)$ 为

$$\begin{aligned} U_n(t,x,y) = & -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{kx+ly-\omega t}{2}\right] \\ & - \frac{1}{kl}[\exp(-kx)-1] \\ & \times[(\exp(\omega t)-1]\exp(-ly) \\ & + \bar{G}_n(t,x,y),\ n = 3,4,\cdots, \end{aligned}$$

其中 $\bar{G}_n(t,x,y)\ (n=3,4,\cdots)$ 为逐次已知的函数, 其结构从略.

这时我们便得到序列 $\{U_n(t,x,y), n=0,1,2,\cdots\}$. 由上节的讨论知, $\{U_n(t,x,y)\}$ 在 $(t,x,y)\in[0.\bar{T}]\times[0,\bar{M}]^2$ 上为一致收敛的序列, 其中 $\bar{T},\bar{M}$ 为任意大的正常数. 并且极限函数

$$U(t,x,y) = \lim_{n\to\infty} U_n(t,x,y)$$

就是尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的非线性广义 KP 方程(10)的精确解.

6. 结 论

广义变分迭代方法的优点是通过泛函的极值来得到对应的 Lagrange 乘子. 再加上选择合理的初始近似, 就能较快速度地得到高精度的近似解.

由本文得到的具有扰动的广义 KP 方程(3)是尘埃等离子体中的低频振动单孤子波近似解. 用同样的方法还可得到双孤子波、三孤子波等等的近似表示式. 进而可求得相应的物理性态, 例如, 通过

求出的各孤立波的波峰值, 并采取相应措施避免各孤立波由于“共振”现象而出现的超高密度电荷的聚集, 而导致的放电击穿现象等等. 关于这方面的情形, 本文不再进一步讨论.

[1] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y 1990 *planet. Space Sci.* **38** 543

[2] Shukla P K, Silin V P 1992 *Phys. Script.* **45** 508

[3] Duan W S, Shi Y R 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **18** 321

[4] Duan W S, Parkes J L, Li M M 2005 *Phys. Plasmas* **12** 022106

[5] Chen J H, Duan W S 2007 *Phys. Plasmas* **14** 083702

[6] Meuris P 1997 *Planet Space Sci.* **45** 449

[7] Han J N, Yang X X, Tiao T X, Duan W S 2008 *Phys, Lett.* A **372** 4817

[8] Li S C, Han J N, Duan W S 2009 *Physica* B **404** 1235

[9] Han J N, Du S L, Duan W S 2008 *Phys. Plasmas* **15** 112104

[10] Yang X X, Duan W S, Han J N, Li S C 2008 C*hin Phys.* B **17** 2985

[11] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.*, **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]

[12] Mo J Q, Yao J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7419 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2009 物理学报 **58** 7149]

[13] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930. (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]

[14] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、程　燕 2009 物理学报 **58** 4379]

[15] Mo J Q, Chen X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1403(in Chinese) [莫嘉琪、陈贤峰 2010 物理学报 **59** 1403]

[16] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[17] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

[18] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]

[19] Zhong S R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2178 (in Chinese) [仲生仁 2010 物理学报 **59** 2178]

The solution for a class of nonlinear solitary waves in dusty plasma*

Mo Jia-Qi†

(*Department of Mathemtics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

(*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240, *China*)

(Received 12 May 2010; revised manuscript received 25 May 2010)

Abstract

A class of nonlinear solitary waves in dusty plasma is considered. Firstly, a variational iteration is constructed. Then the initial approximate solution is determined. Finally, using the method of the variational iteration, each degree approximation for corresponding model is found.

Keywords: plasma, variational iteration, approximate solution

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the R & D Special Fund for Public Welfare Industry (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y6090164).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn