厄尔尼诺-南方涛动时滞海气振子耦合模型的周期解*

王 雯† 徐 燕 鲁世平
(安徽师范大学数学计算机科学学院,芜湖 241003)

(2010 年 5 月 20 日收到;2010 年 6 月 3 日收到修改稿)

运用重合度理论探讨了一类非线性问题的周期解的存在性. 然后将其应用于一个厄尔尼诺-南方涛动时滞海气振子耦合模型周期解问题的研究,获得到了该模型存在周期解的新结果.

关键词: 非线性, 厄尔尼诺-南方涛动, 周期解
PACS: 02.30.Sa

1. 引 言

厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)是涉及到赤道太平洋海-气交互作用的自然现象,也是目前全球气候系统年际变化中最强的信号之一. 它的发生及变化严重地影响着全球各地的气候和生态变化. 因此, ENSO 现象在国际学术界中是非常值得关注的研究对象[1—7]. 上世纪以来,关于厄尔尼诺-南方涛动年际变化方面已经有许多研究,对赤道海气耦合系统的认识和模拟有了较大的进展[8]. 基于赤道副热带在西海岸海水上涌 Rossby 波的影响, McCreary 提出了一个关于 ENSO 振荡性的机理[9]. Suarez 和 Schopf 引入了一个 ENSO 时滞振荡机理[10],它是由具有正和负反馈的时滞微分方程来表示的. 莫嘉琪等人在大气物理,海洋气候,动力系统等方面也研究了一些有关的非线性问题[11—21]. 本文利用 Mawhin 重合度理论,研究了一个典型的 ENSO 时滞海-气振子模型的周期行为.

文献[7]考虑如下赤道太平洋的非线性时滞模型:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a\tau_1 - b_1\tau_1(t-\eta) - \varepsilon T^3, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}t} = dT - R_{\tau_1}\tau_1, \tag{2}$$

其中 T 为区域 Niño-3 的 SST 异常, τ_1 为在区域 Niño-4 的信风强度异常, η 为西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间, a 为关于 T 的正反馈系数, b_1 为由于在西海岸反射波的负反馈系数, d 为联系到 Niño-3 区域的 SST 异常到 Niño-4 区域的信风强度异常的系数, R_{τ_1} 为信风衰减系数, ε 为 SST 的立方衰减系数,这里 ε 为正的小参数. 考虑到实际现象,模型(1),(2)中的各系数一般与时间 t 有关,故本文考虑下列厄尔尼诺-南方涛动时滞海气振子模型:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a(t)\tau_1 - b_1(t)\tau_1(t-\eta) - \varepsilon T^3, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}t} = d(t)T - R_{\tau_1}(t)\tau_1, \tag{4}$$

其中 $a(t)$, $b_1(t)$, $d(t)$ 和 $R_{\tau_1}(t)$ 均是连续的 ω 周期函数.

我们的方法是首先借助于重合度理论求得较一般的非线性系统的周期解,然后将其应用于非线性时滞耦合系统(3),(4)的周期解存在性问题的研究.

2. 引 理

引理 1[22] 设 X, Y 是两个 Banach 空间, $L: D(L) \subset X \to Y$ 为指标为零的 Fredholm 算子, $\Omega \subset X$ 为有界开集, $N: X \to Y$ 为 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧的,如果下列条件

* 教育部科学技术重点项目(批准号:207047)和安徽省《应用数学》重点学科基金资助的课题.

† E-mail: wangw1221@sina.cn

满足：

1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$, $x\in\partial\Omega\cap D(L)$，均有 $Lx\neq\lambda Nx$；

2) 对任意的 $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$，均有 $QNx\neq 0$；

3) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$，其中 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 同构. 则方程 $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}\cap D(L)$ 上至少存在一个解.

3. 理论探讨

现考虑如下非线性方程组：

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=a(t)\tau(t)-b(t)\tau(t-\eta)-\varepsilon T^3(t),\tag{3'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha(t)T(t)-R(t)\tau(t)\tag{4'}$$

的 ω 周期解存在性问题. 其中 $a(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$, $R(t)$ 为以 ω 为周期的连续函数，$a_\infty=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|a(t)|$, $b_\infty=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|b(t)|$, $\alpha_\infty=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|\alpha(t)|$.

定理 1　若 $\int_0^\omega R(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$，则方程组 (3′), (4′) 至少存在一个 ω 周期解.

证明　由 (4′) 式易知

$$\tau(t)=\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s,\tag{5}$$

若 $T(t+\omega)=T(t)$，验证 $\tau(t+\omega)=\tau(t)$，

$$\begin{aligned}\tau(t+\omega)&=\int_{t+\omega}^{t+2\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t+\omega}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s\\&=\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s=\tau(t).\end{aligned}$$

将 (5) 式代入 (3′) 式中，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=&-\varepsilon T^3+a(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s\\&-b(t)\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{6}$$

故，方程组 (3′), (4′) 存在 ω 周期解当且仅当方程 (6) 存在 ω 周期解.

我们分别定义算子

$$L:D(L)\subset X,\ LT=T'$$

和

$$N:X\to X,$$

$$\begin{aligned}NT=&-\varepsilon T^3+a(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s\\&-b(t)\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $X=C_\omega=\{x\mid x\in C(R,R):x(t+\omega)\equiv x(t)\}$，其模 $|\varphi|_0=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$, $\forall\varphi\in C_\omega$, $D(L)=\{T\in C_\omega: T'\in C(R,R)\}$，显然 X 为 Banach 空间，易见，方程 (6) 可以转化为算子方程 $LT=NT$. 此外，根据算子 L 的定义，易见 $\mathrm{Ker}L=R$, $\mathrm{Im}L=\{T: T\in X,\int_0^\omega T(s)\,\mathrm{d}s=0\}$，因此，$L$ 是指标为零的 Fredholm 算子，令投影算子 P, Q 分别为

$$P:X\to\mathrm{Ker}L,\ PT=T(0),$$

$$Q:X\to\mathrm{Im}Q,\ QT=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L=R$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$，令 $K:\mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P$ 表示 $L:\mathrm{Ker}P\cap D(L)\to\mathrm{Im}L$ 的唯一逆，则

$$[Ky](t)=\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s\in D(L),$$

故，易证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的，其中 Ω 为 X 中任意有界开集.

记 $\Omega_1=\{T: T\in D(L)\subset C_\omega, LT=\lambda NT,\lambda\in(0,1)\}$. $\forall T\in\Omega_1$，得

$$\begin{aligned}T'=&-\lambda\varepsilon T^3+a(t)\lambda\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s\\&-b(t)\lambda\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{7}$$

定义

$$\|T\|_p=\left(\int_0^\omega|T(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geqslant 1,$$

则

$$\begin{aligned}\varepsilon\|T\|_4^4=&\int_0^\omega T(t)\Big[a(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\mathrm{d}s\\&-b(t)\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)ds\Big]\mathrm{d}t\\\leqslant&\int_0^\omega|T(t)|\left[a_\infty\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{\left|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1\right|}\right.\\&\times\alpha_\infty|T(s)|\,\mathrm{d}s+b_\infty\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{\left|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1\right|}\\&\left.\times\alpha_\infty|T(s)|\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=(a_\infty+b_\infty)\alpha_\infty\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1|}\left(\int_0^\omega|T(s)|\mathrm{d}s\right)^2$$

$$\leqslant(a_\infty+b_\infty)\alpha_\infty\omega^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1|}\|T\|_4^2,$$

所以,存在 $M_1>0$,使得

$$\|T\|_4\leqslant M_1,$$

$$\|T'\|_2^2=\int_0^\omega\Big[a(t)\lambda T'(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\times\alpha(s)T(s)\mathrm{d}s-b(t)\lambda T'(t)\times\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant(a_\infty+b_\infty)\alpha_\infty\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1|}\times\int_0^\omega|T'(t)|\mathrm{d}t\int_0^\omega|T(s)|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant(a_\infty+b_\infty)\alpha_\infty\omega^{\frac{5}{4}}\times\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1|}\|T'\|_2\|T\|_4,$$

故,存在 $M_2>0$,使得

$$\|T'\|_2\leqslant M_2.$$

又由唐先华的文献[23]的引理2.2,我们知道

$$|T|_0\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2\omega}}\Big[\int_0^\omega|T(s)|^2\mathrm{d}s+\int_0^\omega|T'(s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{1/2}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2\omega}}[\omega^{1/2}\|T\|_4^2+\|T'\|_2^2]^{1/2},$$

故,存在 $M>0$,使得

$$|T|_0\leqslant M.$$

取 $M^*>0$, $M^*>M$ 且满足

$$\varepsilon(M^*)^2>(a_\infty+b_\infty)\alpha_\infty\omega\frac{\mathrm{e}^{\int_0^\omega|R(u)|\mathrm{d}u}}{|\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1|}.$$

令 $\Omega=\{T:|T|_0<M^*\}$,当 $T\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时,有 $|T|=M^*$,故 $T=M^*$ 或 $T=-M^*$,

$$QNT=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Big[-\varepsilon T^3+a(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\mathrm{d}s-b(t)\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)T(s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t.$$

所以,当 $T=M^*$ 时,

$$QNT=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Big[-\varepsilon(M^*)^3+a(t)\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)M^*\mathrm{d}s-b(t)\int_{t-\eta}^{t-\eta+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_{t-\eta}^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)M^*\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Big[-\varepsilon(M^*)^3+(a(t)-b(t))\times\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\alpha(s)M^*\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t<0.$$

同理可证,当 $T=-M^*$ 时, $QNT>0$.

另一方面,令 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 满足 $J(T)=T$,作同伦 $\Phi(T,\mu)=-\mu T+(1-\mu)JQNT,\mu\in[0,1]$,则当 $T\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时,有 $T=M^*$,

$$\Phi(T,\mu)=-\mu M^*+(1-\mu)\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\Big[-\varepsilon(M^*)^3+(a(t)-b(t))\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s R(u)\mathrm{d}u}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega R(v)\mathrm{d}v}-1}\times\alpha(s)M^*\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t<0.$$

同理可证,当 $T=-M^*$ 时 $\Phi(T,\mu)>0$.

所以,有

$$\begin{aligned}&\deg(JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\\&=\deg(\Phi(T,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\\&=\deg(\Phi(T,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\\&=\deg(-I,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq0.\end{aligned}$$

故由引理1,可知方程组(3′),(4′)至少存在一个 ω 周期解.

4. ENSO 时滞海气振子耦合模型的周期解

考虑到 ε 为正的小参数,故由定理1可得下列结果:

定理2 当 $\int_0^\omega R_{\tau_1}(t)\mathrm{d}t>0$ 时,厄尔尼诺-南方涛动时滞海气振子模型(3),(4)至少存在一个 ω 周期解.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
[2] Kushnir Y, Robinson W A 2002 *J. Climate* **15** 2233
[3] Feng G L, Dong W J, Jia X J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静 2002 物理学报 **51** 1181]
[4] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 259 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 259]
[5] Liu S K, Fu Z T, Liu S D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达 2002 物理学报 **51** 10]
[6] Biondi F, Gershunov A, Cayan D R 2001 *J. Climate* **14** 5
[7] Wang C Z 2001 *J. Climate* **14** 98
[8] Neelin J D, Battisti D S, Hirst A C 1998 *J. Geophys. Res.* **103** 262
[9] McCreary J P 1983 *Mon. Wea. Rev.* **111** 370
[10] Suarez M J, Schopf P S 1988 *J. Atmos. Sci.* **45** 3283
[11] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Progress in Natural Sci.* **13** 768
[12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress in Natural Sci.* **14** 550
[13] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
[14] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、朱江 2004 物理学报 **53** 3245]
[15] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]
[16] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]
[17] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3967 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、王辉 2005 物理学报 **54** 3967]
[18] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3971 (in Chinese) [莫嘉琪、林一骅、林万涛 2005 物理学报 **54** 3971]
[19] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
[20] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chinese Science Bulletin* **48** II 5
[21] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
[22] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer)
[23] X. H. Tang, Li X 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 1140

The periodic solutions of a delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO*

Wang Wen†　Xu Yan　Lu Shi-Ping

(*College of Mathematics and Computer Science*, *Anhui Normal University*, *Wuhu*　241003, *China*)

(Received 20 May 2010; revised manuscript received 3 June 2010)

Abstract

Using Mawhin's continuation theorem, the existence of periodic solutions for a class of nonlinear problem are first discussed, and then by using it, the problem of periodic solutions for a delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO is investigated. A new result on the existence of periodic solutions to the model is obtained.

Keywords: nonlinear, ElNiño-Southern Oscillat, periodic solution

PACS: 02.30.Sa

* Project supported by the Science and Technology in Ministry of Education of China (Grant No. 207047), the Key Discipline Foundation of Applied Mathematics in Anhui Province.

† E-mail: wangw1221@sina.cn