

约瑟夫森结中周期解及其稳定性的解析分析*

张立森[†] 蔡理 冯朝文

(空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2010年5月8日收到; 2010年9月2日收到修改稿)

针对交流激励下电阻-电容分路的约瑟夫森结, 采用增量谐波平衡法推导了系统中周期解的解析表达式, 并运用 Floquet 理论分析了周期解的稳定性. 发现系统处于稳定周期状态的同时, 还存在着丰富的不稳定周期解. 通过计算 Floquet 乘数, 得到了系统稳定周期解失稳时的临界参数值, 并确定了系统发生的分岔类型, 从理论上证明了系统随激励电流幅值的增加由倍周期分岔通向混沌. 解析分析与数值计算结果具有很好的一致性.

关键词: 约瑟夫森结, 增量谐波平衡法, 周期解, 分岔

PACS: 03.75.Lm, 05.45.-a

1. 引言

约瑟夫森 (Josephson) 结作为一种超导器件, 具有工作频率高、速度快、灵敏度高、噪声低和功耗小等优点, 一直以来备受学者们关注^[1-8]. Josephson 结已经在电压标准^[2]、超导量子干涉仪^[3]、可调谐振器^[4]、静噪电路^[5]和 Josephson 二极管^[6]等方面得到了很好的应用. 特别是, 以 Josephson 结为核心元件构成的超导量子系统, 由于其良好的量子相干性和可控性, 因此可作为理想的量子比特的物理载体, 在未来量子计算领域很有吸引力^[9-11].

另一方面, Josephson 结具有高度的非线性, 为研究混沌提供了一个理想的物理系统, 因此 Josephson 结及相关电路中的复杂动力学行为引起了很多学者的研究兴趣^[12-16]. Huberman 等人首先采用数值仿真的方法, 发现了交流激励下 Josephson 结中的混沌现象^[12]. 随后, Octavio 进一步对射频偏置的 Josephson 结中的分岔、混沌和间歇等行为进行了详细的数值分析^[13]. Jensen 等研究了直流偏置的 Josephson 结与串并联谐振器的耦合电路中的级联分岔^[14]. 王震宇等用数值模拟方法研究了电阻分路的 Josephson 结与 RLC 谐振器耦合电路中的混沌行为^[15]. 雷佑铭等针对一类谐和共振激励作用下的

Josephson 结系统, 研究了系统中的混沌生成与控制问题^[16].

然而, 由于 Josephson 结的强非线性, 使得我们无法得到 Josephson 结及相关电路系统中的精确解析解. 因此, 已有的研究大多采用定性的方法 (如数值仿真等) 来获得系统的解轨道, 而对 Josephson 结电路系统的定量分析尚不多见, 特别是对系统分岔类型的判定缺乏严格的理论依据. 目前, 关于非线性系统的定量分析方法主要有摄动法、平均法、渐近法、多尺度法以及 Volterra 泛函级数法等^[17], 但是这些方法的适用范围都有一定的局限性, 如大多只针对弱非线性系统. 为了研究强非线性系统中的周期振动问题, Lau 等人提出了增量谐波平衡 (incremental harmonic balance, IHB) 法^[18]. IHB 法是一种半解析的定量分析方法, 对弱非线性和强非线性系统都适用, 因此被广泛应用于各种类型的动力学系统中^[19-22].

本文以交流激励下电阻-电容分路的 Josephson 结为研究对象, 对系统的动力学行为进行了定量分析. 首先, 采用增量谐波平衡法来获得系统中不同形式周期解的近似解析表达式. 然后运用 Floquet 理论来判定周期解的稳定性和系统发生的分岔类型, 从理论上论证了在一定参数范围内, 交流激励下 Josephson 结系统随激励电流幅值的增加由倍周期分岔通向混沌.

* 国家高技术研究发展计划 (863) (批准号: 2008AAJ225) 和空军工程大学研究生科技创新计划 (批准号: D×2010405) 资助的课题.

[†]E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn

2. Josephson 结的模型和方程

在交流激励下,电阻-电容分路的 Josephson 结的等效电路如图 1 所示^[12,13]. C 和 R 分别为结电容和正常态电阻, I_{ext} 为外部交流偏置电流. 根据 KCL 定律可得描述该电路的状态方程为

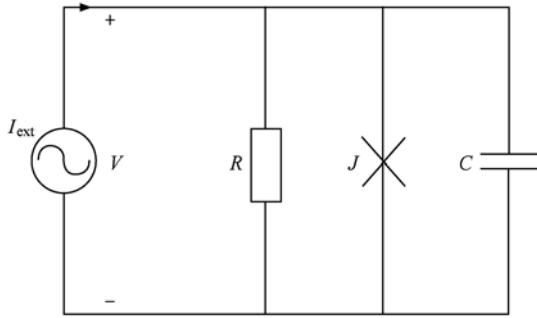


图 1 交流偏置的约瑟夫森结的等效电路

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2e} \frac{d\alpha}{dt} &= V, \\ C \frac{dV}{dt} &= -\frac{V}{R} - I_c \sin\alpha + I_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $I_{\text{ext}} = F \cos(\Omega t)$, V 为结两边的电压, α 为 Josephson 结两边的位相差, I_c 为 Josephson 结的临界电流, \hbar 为约化普朗克常数, e 为基本电荷量.

作如下归一化处理: $\omega_c = 2eI_c R / \hbar$, $\tau_0 = \omega_c t$, $\omega = \Omega / \omega_c$, $\beta = \omega_c RC$, $v = V / (I_c R)$, $f = F / I_c$, 则方程 (1) 的无量纲形式为

$$\frac{d\alpha}{d\tau_0} = v, \quad (2a)$$

$$\frac{dv}{d\tau_0} = \frac{1}{\beta} [-\sin\alpha - v + f \cos(\omega\tau_0)]. \quad (2b)$$

已有的研究表明,这个看似简单的二阶非自治系统中存在着丰富的非线性动力学行为^[12,13].

3. Josephson 结中周期解析解及其稳定性的理论推导

3.1. 用 IHB 法求解系统的周期解

令 $\tau = \omega\tau_0$, $x = \alpha$, $y = v = x'$, 将 (2a) 式代入 (2b) 式, 则方程 (2) 可整理为

$$\omega^2 \beta x'' + \omega x' + \sin x - f \cos \tau = 0. \quad (3)$$

假设 x_0 是取 $\beta = \beta_0$, $\omega = \omega_0$, $f = f_0$ 时系统 (3) 的一

个初始猜测解, 并且令

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, \beta = \beta_0 + \Delta\beta, \\ \omega &= \omega_0 + \Delta\omega, f = f_0 + \Delta f, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\Delta x, \Delta\beta, \Delta\omega, \Delta f$ 均表示小的增量. 将方程 (3) 左边进行一阶 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \beta_0 \cdot \Delta x'' + \omega_0 \cdot \Delta x' + \cos x_0 \cdot \Delta x \\ + \omega_0^2 x_0'' \cdot \Delta\beta + (2\beta_0 \omega_0 x_0'' + x_0') \Delta\omega \\ - \cos \tau \cdot \Delta f + r(x_0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $r(x_0) = \omega_0^2 \beta_0 x_0'' + \omega_0 x_0' + \sin x_0 - f_0 \cos \tau$ 称为不平衡项, 用来控制解的精度, 满足 $r = 0$ 的 x_0 即是我们要求的方程 (3) 的周期解.

设周期解 x_0 的 Fourier 级数展开式为

$$x_0(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left[a_i \cos\left(\frac{i\tau}{m}\right) + b_i \sin\left(\frac{i\tau}{m}\right) \right], \quad (6)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta x(\tau) &= \Delta a_0 + \sum_{i=1}^N \left[\Delta a_i \cos\left(\frac{i\tau}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta b_i \sin\left(\frac{i\tau}{m}\right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $N = mN_0$, m 为系统作周期运动的周期数, N_0 为求解系统周期 1 解时 N 的取值.

再令

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N], \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{A} = [\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_N, \Delta b_1, \dots, \Delta b_N], \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = [1, \cos(\tau), \dots, \cos(N\tau), \sin(\tau), \dots, \sin(N\tau)], \quad (10)$$

则有 $x_0 = \mathbf{E} \mathbf{A}^T$, $x_0' = \mathbf{E}' \mathbf{A}^T$, $x_0'' = \mathbf{E}'' \mathbf{A}^T$; $\Delta x = \mathbf{E} \Delta \mathbf{A}^T$, $\Delta x' = \mathbf{E}' \Delta \mathbf{A}^T$, $\Delta x'' = \mathbf{E}'' \Delta \mathbf{A}^T$. 将 (6) — (10) 式代入 (5) 式, 得

$$\begin{aligned} k_1 \mathbf{E}'' \Delta \mathbf{A}^T + k_2 \mathbf{E}' \Delta \mathbf{A}^T + k_3 \mathbf{E} \Delta \mathbf{A}^T \\ + l_1 \Delta \beta + l_2 \Delta \omega + l_3 \Delta f + r = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega_0^2 \beta_0, k_2 = \omega_0, k_3 = \cos(\mathbf{E} \mathbf{A}^T), \\ l_1 &= \omega_0^2 \mathbf{E}'' \mathbf{A}^T, l_2 = 2\omega_0 \beta_0 \mathbf{E}' \mathbf{A}^T + \mathbf{E}' \mathbf{A}^T, \\ l_3 &= -\cos \tau, \\ r &= \omega_0^2 \beta_0 \mathbf{E}'' \mathbf{A}^T + \omega_0 \mathbf{E}' \mathbf{A}^T \\ &\quad + \sin(\mathbf{E} \mathbf{A}^T) - f_0 \cos \tau. \end{aligned} \quad (12)$$

对 (11) 式进行 Galerkin 平均过程, 可得

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{A}^T = \mathbf{L}_1 \Delta \beta + \mathbf{L}_2 \Delta \omega + \mathbf{L}_3 \Delta f + \mathbf{R}, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_0^{2m\pi} \mathbf{E}^T (k_1 \mathbf{E}'' + k_2 \mathbf{E}' + k_3 \mathbf{E}) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 L_1 &= - \int_0^{2m\pi} E^T l_1 d\tau, L_2 = - \int_0^{2m\pi} E^T l_2 d\tau, \\
 L_3 &= - \int_0^{2m\pi} E^T l_3 d\tau, \\
 R &= - \int_0^{2m\pi} E^T r d\tau. \tag{14}
 \end{aligned}$$

由于 K 是非奇异矩阵, 所以有

$$\Delta A^T = K^{-1} (L_1 \Delta \beta + L_2 \Delta \omega + L_3 \Delta f + R). \tag{15}$$

增量谐波平衡法求解系统周期解的过程如下: 给定 A 的初始值以及各参数的增量值, 通过 (15) 式计算 ΔA , 再根据下式:

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \tag{16}$$

进行迭代, 直到满足

$$\|R\| < \varepsilon, \tag{17}$$

停止本次迭代, 得到对应参数值下系统的解 $x = EA^T$, 其中 $0 < \varepsilon < 1$ 为预先给定的误差. 然后更新参数值, 并用上一次迭代的终值作为初值, 重复以上迭代过程, 这样就可得到参数值不断改变时对应的系统的周期解.

3.2. 周期解的稳定性分析

周期解的稳定性可以通过计算 Floquet 乘数来判定. 设 x_0 为通过 IHB 法得到的系统的周期解, 给 x_0 加入一个小扰动 Δx , 即令 $x = x_0 + \Delta x$, 则在 x_0 处对系统进行线性化, 可得如下时变微分方程:

$$X' = Y(\tau)X, \tag{18}$$

其中 $X = (\Delta x, \Delta x')^T$, 而且

$$Y(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_0 & -1 \\ \frac{\omega^2 \beta}{\omega^2 \beta} & \frac{\omega^2 \beta}{\omega^2 \beta} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

显然 $Y(\tau)$ 是周期矩阵, 且其周期与 x_0 的周期相同.

根据文献 [19] 提供的计算 Floquet 乘数的方法, 将周期 $T = 2m\pi$ 分成 N_k 个等长的子区间, 则第 k 个子区间为 $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$. 由于 $Y(\tau)$ 关于 τ 连续, 所以当 N_k 足够大时, 在每个子区间内可以认为 $Y(\tau)$ 是常数矩阵, 即

$$Y_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Y(\tau) d\tau \approx Y(\tau_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y_k & -1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $y_k = -\cos[x_0(\tau_k)]/(\omega^2 \beta)$. 单值矩阵 (monodromy matrix) M 为

$$M = \prod_{i=N_k}^1 [\exp(Y_i \Delta_i)]. \tag{21}$$

M 的特征值即是系统的 Floquet 乘数.

根据 Floquet 理论^[23], 若系统所有 Floquet 乘数的模值均小于 1, 则系统的周期解是稳定的; 若至少有一个 Floquet 乘数模值大于 1, 则系统的周期解是不稳定的. 而且, 如果有一个实 Floquet 乘数沿负实轴穿出单位圆, 其余 Floquet 乘数均位于单位圆内, 则表明系统发生了倍周期分岔.

4. 周期解的计算及分岔机理分析

在本文中, 我们固定参数 $\beta = 1.0, \omega = 0.5$, 通过改变偏置电流幅值 f 来计算系统的周期解, 并利用 Floquet 理论来分析周期解的稳定性, 以及系统随 f 变化时发生的分岔行为.

4.1. 周期 1 和第一次分岔

取 $m = 1, N_0 = 5, \varepsilon = 1 \times 10^{-5}$, f 取值从 $f_0 = 1.50$ 开始, 增量 $\Delta f = 1 \times 10^{-4}$. 通过增量谐波平衡法计算系统的周期解及 Floquet 乘数, 发现当 f 由 1.5369 增加到 1.5370 时, 系统有一个实 Floquet 乘数沿负实轴穿出单位圆, 而另一个 Floquet 乘数小于 0 且位于单位圆内. 根据 Floquet 理论, 此时系统发生了倍周期分岔. 因此, 系统第一次倍周期分岔发生在 $f \in (1.5369, 1.5370)$ 内, Floquet 乘数在分岔点附近的变化情况如表 1 所示. 另外, 采用数值积分法得到的系统第一次倍周期分岔点为 $f \approx 1.5348$, 与运用增量谐波平衡法和 Floquet 理论得到的结果近似相等.

表 1 第一个分岔点附近 Floquet 乘数的变化

f	1.5366	1.5367	1.5368	1.5369	1.5370
ρ_1	-0.990671907	-0.993499024	-0.996328012	-0.999158873	-1.001991612
ρ_2	-3.51576×10^{-6}	-3.50575×10^{-6}	-3.49580×10^{-6}	-3.48590×10^{-6}	-3.47604×10^{-6}

当 $1.50 \leq f \leq 1.5369$ 时, 系统存在稳定的周期 1 解, 此时所有 Floquet 乘数均位于复平面上的单位圆内. 用 $x_i^s(\tau), x_i^u(\tau)$ 分别表示系统稳定和不稳定

周期 i 的解析解. 例如, 取 $f = 1.51$, 采用增量谐波平衡法计算得到系统稳定周期 1 的近似解析表达式为

$$\begin{aligned}
 x_1^s(\tau) = & -0.985607 - 1.243319 \times 10^{-1} \cos(\tau) \\
 & - 4.042081 \times 10^{-1} \cos(2\tau) \\
 & - 1.356466 \times 10^{-2} \cos(3\tau) \\
 & - 4.604360 \times 10^{-2} \cos(4\tau) - 1.412273 \\
 & \times 10^{-2} \cos(5\tau) + 2.602672 \sin(\tau) \\
 & + 2.917606 \times 10^{-1} \sin(2\tau) \\
 & + 4.74890 \times 10^{-2} \sin(3\tau)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 3.070038 \times 10^{-2} \sin(4\tau) \\
 & - 5.819292 \times 10^{-3} \sin(5\tau), \quad (22)
 \end{aligned}$$

其时域波形和相图(注意到 $y(\tau) = x'(\tau)$)如图 2 所示,图中实线、点线分别代表采用增量谐波平衡法和直接对方程(3)进行数值积分(图中用 NI 表示)得到的结果.图 2 显示两种方法得到的结果是吻合的,从而说明本文分析结果是正确的.

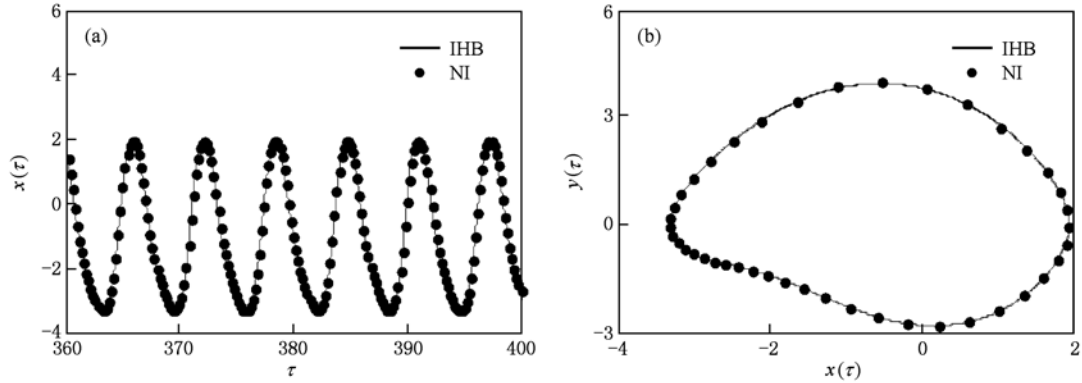


图 2 $f = 1.51$ 时系统的稳定周期 1 解 (a)时域波形;(b)相图

值得注意的是,在 $1.50 \leq f \leq 1.5369$ 范围内,系统不仅存在上述稳定的周期 1 解,而且我们通过计算发现,在选取某些初猜解 x_0 的情况下,还能得到不稳定周期 1 的解析解,这时相应的 Floquet 乘数的最大模值大于 1.例如,仍取 $f = 1.51$,可得如下不稳定的周期 1 解:

$$\begin{aligned}
 x_1^u(\tau) = & 2.450095 \times 10^{-4} + 1.830773 \\
 & \times 10^{-1} \cos(\tau) + 1.179296 \\
 & \times 10^{-4} \cos(2\tau) + 1.352217 \\
 & \times 10^{-1} \cos(3\tau) + 1.819582 \\
 & \times 10^{-5} \cos(4\tau) + 1.898138
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times 10^{-2} \cos(5\tau) \\
 & + 2.879573 \sin(\tau) - 1.094269 \\
 & \times 10^{-4} \sin(2\tau) + 1.465292 \\
 & \times 10^{-1} \sin(3\tau) - 2.729175 \\
 & \times 10^{-5} \sin(4\tau) + 1.259940 \\
 & \times 10^{-2} \sin(5\tau), \quad (23)
 \end{aligned}$$

其相应的 Floquet 乘数为 $\rho_1 = 1.91559662, \rho_2 = 1.8205 \times 10^{-6}$,该解的时域波形和相图如图 3 所示.对比图 2 可以看到,该不稳定周期 1 解的时域波形和吸引子形状均与稳定解有所不同.值得注意的是,不稳定的周期解无法通过数值积分的方法得到.

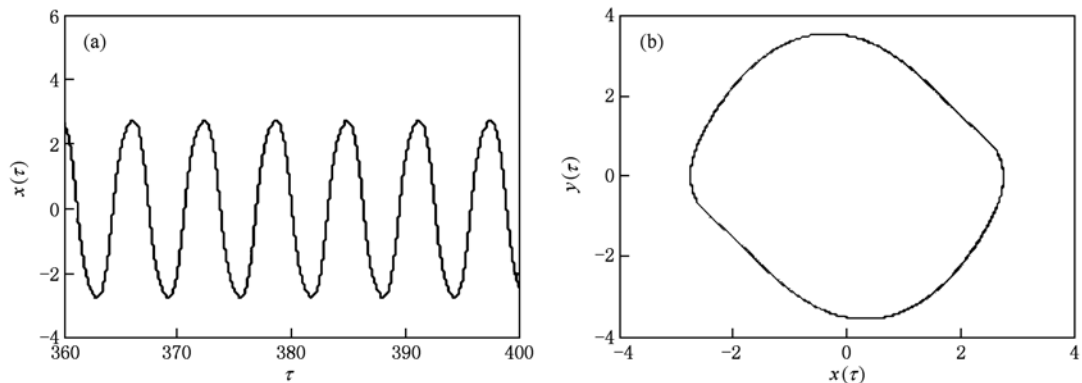


图 3 $f = 1.51$ 时系统的不稳定周期 1 解 (a)时域波形;(b)相图

4.2. 周期 2 和第二次分岔

从前面的分析得知,当偏置电流幅值到达临界值 $f = 1.5370$ 时,系统发生倍周期分岔,稳定的周期 1 解失稳,同时系统中会产生一个稳定的周期 2 解. 下面运用增量谐波平衡法计算这个稳定周期 2 解的解析表达式,以及系统发生第二次倍周期分岔的临界参数值.

表 2 第二个分岔点附近 Floquet 乘数的变化

f	1.5510	1.5511	1.5512	1.5513	1.5514
ρ_1	-0.943599861	-0.962067313	-0.980572160	-0.999114340	-1.017693789
ρ_2	-1.2888×10^{-11}	-1.2641×10^{-11}	-1.2403×10^{-11}	-1.2173×10^{-11}	-1.1950×10^{-11}

系统在 $1.5370 \leq f \leq 1.5513$ 时,存在稳定的周期 2 解,此时所有 Floquet 乘数均位于复平面上的单位圆内. 例如,取 $f = 1.542$, 计算得到系统稳定周期 2 解的表达式为

$$\begin{aligned}
 x_2^s(\tau) = & -1.284963 - 4.028974 \\
 & \times 10^{-1} \cos(\tau/2) - 4.448372 \\
 & \times 10^{-1} \cos(\tau) - 1.112656 \\
 & \times 10^{-1} \cos(3\tau/2) - 4.956030 \\
 & \times 10^{-1} \cos(2\tau) - 3.337704 \\
 & \times 10^{-2} \cos(5\tau/2) - 3.441250 \\
 & \times 10^{-2} \cos(3\tau) + 9.429918 \\
 & \times 10^{-3} \cos(7\tau/2) - 3.252741 \\
 & \times 10^{-2} \cos(4\tau) + 1.417391 \\
 & \times 10^{-2} \cos(9\tau/2) - 4.690989 \\
 & \times 10^{-3} \cos(5\tau) - 1.053775 \\
 & \times 10^{-1} \sin(\tau/2) \\
 & + 2.456699 \sin(\tau) - 1.191146
 \end{aligned}$$

取 $m = 2$, 其他参数取值同上. 通过计算发现,当 f 由 1.5513 增加到 1.5514 时,系统有一个实 Floquet 乘数沿负实轴穿出单位圆,另一个 Floquet 乘数小于 0 且位于单位圆内. 此时系统在 $f \in (1.5513, 1.5514)$ 内发生了第二次倍周期分岔,分岔点附近 Floquet 乘数的变化情况如表 2 所示. 通过数值积分的方法可计算得系统周期 2 分岔到周期 4 的参数值为 $f \approx 1.5508$, 与上面的计算结果近似相等.

$$\begin{aligned}
 & \times 10^{-1} \sin(3\tau/2) + 2.003834 \\
 & \times 10^{-1} \sin(2\tau) - 6.375375 \\
 & \times 10^{-2} \sin(5\tau/2) - 2.156721 \\
 & \times 10^{-2} \sin(3\tau) - 4.149371 \times 10^{-2} \sin(7\tau/2) \\
 & + 1.169789 \times 10^{-3} \sin(4\tau) - 9.252497 \\
 & \times 10^{-3} \sin(9\tau/2) - 1.301202 \\
 & \times 10^{-2} \sin(5\tau), \tag{24}
 \end{aligned}$$

其时域波形和相图如图 4 所示,从图 4 可知采用增量谐波平衡法和数值积分法得到的结果是一致的.

此外,大量的计算表明,系统稳定运行于周期 2 状态的同时,还存在着丰富的不稳定周期 1、周期 2 解. 例如前面提到的稳定周期 1 解 $x_1^s(\tau)$, 虽然在经过第一个分岔点后开始变得不稳定,但却依然存在. 随着 f 的增加,这个不稳定解也在不断演化(演化过程中仍取 $m = 1$), 当 $f = 1.54$ 时其解析表达式为

$$\begin{aligned}
 x_1^u(\tau) = & -1.302266 - 4.423663 \\
 & \times 10^{-1} \cos(\tau) - 5.153397
 \end{aligned}$$

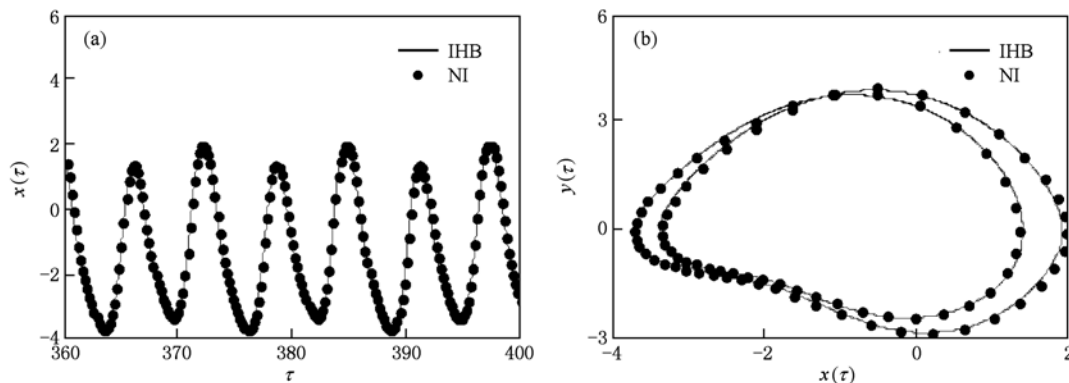


图 4 $f = 1.542$ 时系统的稳定周期 2 解 (a)时域波形;(b)相图

$$\begin{aligned}
 & \times 10^{-1} \cos(2\tau) - 5.383563 \\
 & \times 10^{-2} \cos(3\tau) - 3.907431 \\
 & \times 10^{-2} \cos(4\tau) - 7.200876 \\
 & \times 10^{-3} \cos(5\tau) \\
 & + 2.460776 \sin(\tau) + 2.234770 \\
 & \times 10^{-1} \sin(2\tau) - 2.533998 \\
 & \times 10^{-2} \sin(3\tau) - 4.072823 \\
 & \times 10^{-3} \sin(4\tau) - 1.796666 \\
 & \times 10^{-2} \sin(5\tau), \tag{25}
 \end{aligned}$$

其时域波形和相图如图 5 所示.

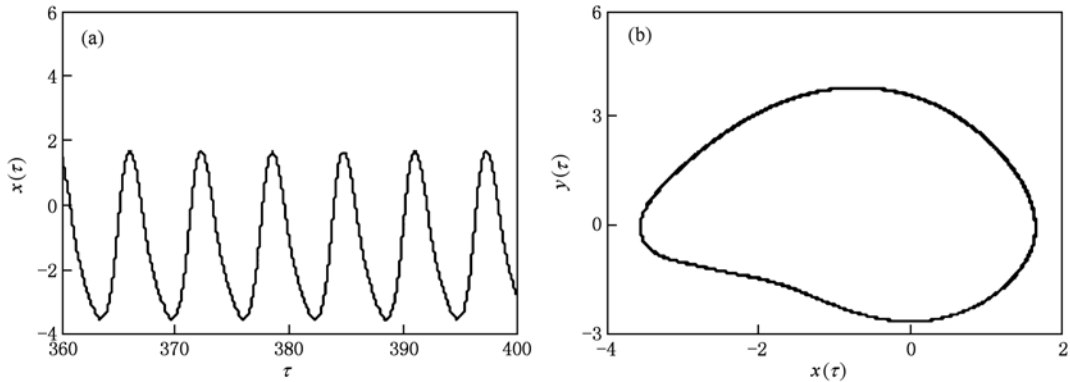


图 5 $f = 1.54$ 时系统的不稳定周期 1 解 (a) 时域波形; (b) 相图

同理,继续增加 f , 可以按上述方法依次计算出系统稳定周期 4、周期 8 和周期 16 等高倍周期的近似解析解, 以及所包含的低倍不稳定周期解. 但是随着 m 的增大, 周期解所含的谐波项数将成倍增加, 限于篇幅本文没有再给出更高倍周期的解析解. 同时, 运用 Floquet 理论可以得到系统每一次发生倍周期分岔的参数值序列, 这个序列的极限即是系统进入混沌的临界参数值.

5. 结 论

本文针对交流偏置下电阻-电容分路的

Josephson 结, 采用增量谐波平衡法对这个强非线性系统进行了定量分析, 得到了系统中不同类型周期解的解析表达式. 同时, 运用 Floquet 理论分析了周期解的稳定性以及系统发生分岔的类型, 从理论上证明了随着偏置电流幅值的增加, 系统由倍周期分岔逐步通向混沌. 研究结果还表明, 系统在作稳定的周期运行的同时, 还存在着丰富的不稳定周期轨道, 特别是稳定高倍周期状态中往往包含有不稳定低倍周期轨道. Josephson 结在实际应用中, 有时需要避免分岔、混沌等现象的发生, 有时却可以利用这些不稳定行为, 因此对 Josephson 结中的复杂动力学行为深入研究, 具有一定的理论意义和应用价值.

[1] Winkler D 2003 *Supercond. Sci. Technol.* **16** 1583
 [2] Bens S P, Hamilton C A 2004 *Proc. of the IEEE* **92** 1617
 [3] Mao B, Dai Y D, Wang F R 2005 *Chin. Phys.* **14** 301
 [4] Osborn K D, Strong J A, Sirois A J, Simmonds R W 2007 *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **17** 166
 [5] Forn-Diaz P, Schouten R N, den Braver W A, Mooij J E, Harmans C J P M 2009 *Appl. Phys. Lett.* **95** 042505
 [6] Hu J P, Wu C J, Dai X 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 067004
 [7] Liang B L, Wang J S, Meng X G, Su J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010315
 [8] Yue H W, Yan S L, Zhou T G, Xie Q L, You F, Wang Z, He M, Zhou X J, Fang L, Yang Y, Wang F Y, Tao W W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1282 (in Chinese) [岳宏卫、阎少林、周铁戈、谢清连、游峰、王争、何明、赵新杰、方兰、杨扬、王福音、陶薇薇 2010 物理学报 **59** 1282]
 [9] van der Wal C H, ter Haar A C J, Wilhelm F K, Schouten R N, Harmans C J P M, Orlando T P, Lloyd S, Mooij J E 2000 *Science* **290** 773
 [10] Chiorescu I, Nakamura Y, Harmans C J P M, Mooij J E 2003 *Science* **299** 1869

- [11] Cui D J, Lin D H, Yu H F, Peng Z H, Zhu X B, Zheng D N, Jing X N, Lu L, Zhao S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5933 (in Chinese) [崔大健、林德华、于海峰、彭智慧、朱晓波、郑东宁、景秀年、吕力、赵士平 2008 物理学报 **57** 5933]
- [12] Huberman B A, Crutchfield J P, Packard N H 1980 *Appl. Phys. Lett.* **37** 750
- [13] Octavio M 1984 *Phys. Rev. B* **29** 1231
- [14] Jensen H D, Larsen A, Mygind J 1990 *Physica B* **165-166** 1661
- [15] Wang Z Y, Liao H Y, Zhou S P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1996 (in Chinese) [王震宇、廖红印、周世平 2001 物理学报 **50** 1996]
- [16] Lei Y M, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3342 (in Chinese) [雷佑铭、徐伟 2008 物理学报 **57** 3342]
- [17] Liu C X 2007 *Nonlinear Circuit Theory and Its Applications* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p106 (in Chinese) [刘崇新 2007 非线性电路理论及应用(西安:西安交通大学出版社) 第106页]
- [18] Lau S L, Cheung Y K 1981 *ASME J. Appl. Mech.* **48** 959
- [19] Shen J H, Lin K C, Chen S H, Sze K Y 2008 *Nonlinear Dyn.* **52** 403
- [20] Xu L, Lu M W, Cao Q 2002 *Phys. Lett. A* **301** 65
- [21] Raghobama A, Narayanan S 1999 *J. Sound Vib.* **226** 469
- [22] Raghobama A, Narayanan S 2000 *Ocean Eng.* **27** 1087
- [23] Wang H L, Zhang Q C 2002 *Nonlinear Dynamics Theory and Its Applications* (Tianjin: Tianjin Science and Technology Press) p241 (in Chinese) [王洪礼、张琪昌 2002 非线性动力学理论及其应用(天津:天津科学技术出版社) 第241页]

Analytical analysis of periodic solution and its stability in Josephson junction *

Zhang Li-Sen[†] Cai Li Feng Chao-Wen

(School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

(Received 8 May 2010; revised manuscript received 2 September 2010)

Abstract

Analytical expressions of periodic solutions in rf-biased resistively-capacitively-shunted Josephson junction were derived by incremental harmonic balance method, and the stability of the periodic solutions was investigated using Floquet theory. We found that while the system is in stable periodic states, plentiful unstable periodic orbits still exist in the system. Critical parameter values for which the stable periodic solutions of the system lose their stability are obtained and the type of bifurcation is determined by computing the Floquet multipliers. We have also theoretically confirmed the period-doubling-route to chaos with increasing amplitude of driving current, which acts as the control parameter in the system. The results from analytical analysis coincide with that from numerical simulation.

Keywords: Josephson junction, incremental harmonic balance method, periodic solution, bifurcation

PACS: 03.75.Lm, 05.45.-a

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AAJ225) and the Science and Technology Innovation Program for Graduates of Air Force Engineering University (Grant No. Dx2010405).

[†] E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn