

# 离散可激发介质中早期后去极化对螺旋波影响的数值研究\*

韦海明 唐国宁†

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2010年5月17日收到; 2010年7月6日收到修改稿)

通过考虑某些不应态也可以被激发, 在离散可激发介质 Greenberg-Hasting 模型中引入早期后去极化行为, 研究了早期后去极化对螺旋波的影响. 数值结果表明: 在适当选择参数下, 早期后去极化对螺旋波有很大影响, 这些影响包括使螺旋波漫游、漂移和破碎, 导致螺旋波波纹被扭曲和波臂粗细交替变化, 以及导致螺旋波的周期在两个值之间交替变化, 产生从稳定螺旋波到呼吸螺旋波和反螺旋波的相变等. 当不应态的激发阈值很高时, 早期后去极化对螺旋波没有影响. 对发生上述现象作了简要的讨论.

**关键词:** 离散可激发介质, 螺旋波, 早期后去极化

**PACS:** 05.45.-a, 87.18.Hf

## 1. 引言

螺旋波已被认为是引起生物体心脏的心律失常或心跳过速的主要原因之一, 而且如果螺旋波破碎形成多个螺旋波或者螺旋波湍流态, 将引起心脏的心室纤维颤动, 危及生物体的生命<sup>[1]</sup>, 螺旋波也在物理<sup>[2]</sup>、化学<sup>[3,4]</sup>、生物<sup>[5]</sup>系统中被观察到, 因此对螺旋波的研究引起了不同学科领域研究者的极大兴趣<sup>[6-14]</sup>. 对连续反应扩散系统中螺旋波动力学的研究, 人们发现有多种因素可以导致螺旋波漫游和破碎, 例如介质的激发性降低<sup>[15,16]</sup>、外部周期调制对螺旋波的扰动<sup>[17]</sup>、介质的不均匀<sup>[18-22]</sup>等. 异常的心脏系统可能会出现早期后去极化现象 (early afterdepolarizations), 它是一种发生在复极化完成前的电振荡现象, 会导致心律不齐. 到目前为止, 有关早期后去极化对心脏中螺旋波的影响还缺乏研究, 原因是: 要在心脏中产生早期后去极化, 通常采用提高钙离子的最大电导率, 这往往导致介质的激发性降低, 很难区分是什么因数影响了螺旋波. 鉴于心肌组织细胞分布的离散性, 人们提出了各种不同的离散激发介质模型来研究螺旋波的产生、漫游和

破碎等现象<sup>[23-25]</sup>.

本文采用 Greenberg-Hasting (GH) 离散激发介质模型<sup>[25]</sup>, 通过考虑某些不应态也可以被激发, 在模型中引入早期后去极化, 研究这种早期后去极化对稳定螺旋波影响. 数值模拟结果表明: 早期后去极化对稳定螺旋波有重要影响, 这些影响包括使螺旋波漂移、漫游和破碎, 使螺旋波被扭曲, 导致螺旋波臂粗细交替变化和产生呼吸螺旋波等现象. 下面先介绍模型, 然后介绍我们的数值模拟结果, 最后是结论.

## 2. 模型

二维 Greenberg-Hasting 的离散激发介质模型的演化规则为<sup>[25]</sup>

$$u_{i,j}(t+1) = \begin{cases} u_{i,j}(t) + 1, & 1 \leq u_{i,j}(t) < k-1, \\ 1, & O(u_{i,j}(t) = 0) \geq O_{th}, \\ 0, & O(u_{i,j}(t) = 0) < O_{th}, \\ 0, & u_{i,j}(t) + 1 = k, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $i, j$  的为元胞 (格点) 空间位置的标号,  $u_{i,j}(t)$  为元胞  $(i, j)$  在  $t$  时刻的状态函数, 其中  $u_{i,j} = 0$  为

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10765002) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: tangguoning@sohu.com

元胞的静息态,  $u_{i,j} = 1$  为元胞的激发态,  $u_{i,j} = 2, 3, \dots, k-1$  为元胞的不应态, 一个元胞的状态总数为  $k$ ,  $O(u_{i,j}(t) = 0)$  表示  $t$  时刻处于静息态的元胞  $(i, j)$  有  $O$  个邻居处于激发态,  $O_{th}$  为系统静息态元胞的激发阈值, 当  $O \geq O_{th}$  时, 下一时刻该元胞进入激发态. 本文始终作如下处理: 选取空间为  $300 \times 300$  的格点进行模拟, 采用无流边界条件, 考虑离散的时间步  $t = 0, 1, 2, \dots$ ; 在按规则(1)演化时, 元胞的状态总数固定取  $k = 8$ ; 为了减少采用正方形点阵带来各向异性影响, 采用扩展的 Moor 邻居, 具体说就是固定取元胞的邻居半径  $r = 3$ , 但是在

边界附近,  $r$  逐渐降为 1, 以保证无流边界条件要求. 在适当选择  $O_{th}$  后, 可以通过截断平面波方式产生稳定螺旋波. 螺旋波的周期  $T$  被定义为介质中一点相继元胞被激发时刻的差, 即  $T = t_n - t_{n-1}$ . 图 1 给出了不同激发阈值下稳定螺旋波的斑图, 从图上可以看出, 随着静息态激发阈值的增加, 螺旋波的波长由大变小, 当  $O_{th} = 6$  时达到最小,  $O_{th} = 7$  螺旋波的波长反而变得最大, 模拟结果表明图 1 中所有螺旋波的周期相同, 即  $T = 8$ , 与元胞状态数相同. 数值模拟还表明, 当  $O_{th} > 7$  不能产生螺旋波.

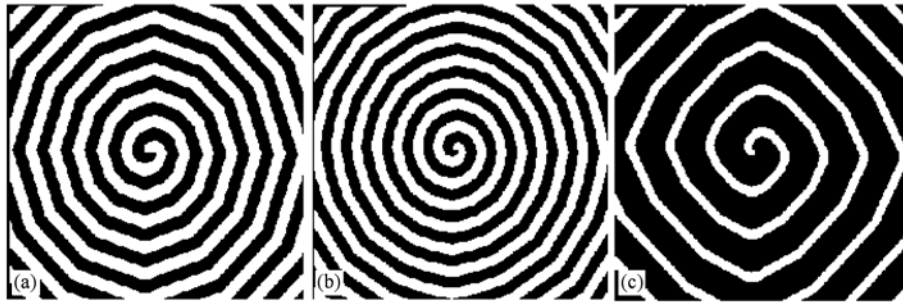


图 1 在不同激发阈值  $O_{th}$  下根据演化规则(1)得到的稳定螺旋波斑图 (a)  $O_{th} = 4$ ; (b)  $O_{th} = 6$ ; (c)  $O_{th} = 7$

为了研究早期后去极化对螺旋波的影响, 除考虑静息态元胞的激发外, 还考虑当元胞处于不应态 6 和 7 时也能被激发(后去极化行为), 假设激发阈值为  $P_{th}$ , 如果这些元胞的邻居有  $P(u_{i,j}(t) = 6, 7)$  个元胞处于激发态, 当  $P < P_{th}$  时, 元胞按规则(1)演化, 当  $P \geq P_{th}$  时, 这些元胞将被激发到 1 态, 我们称这种元胞为不应态激发元胞, 其他元胞为正常激发元胞. 正常激发元胞按规则(1)演化并考虑早期后去极化. 不应态激发元胞的演化规则如下:

$$u_{i,j}(t+1) = \begin{cases} u_{i,j}(t) + 1, & 1 \leq u_{i,j}(t) < L - 1, \\ 1, & P(u_{i,j}(t) = 0) \geq P_{th}, \\ 0, & P(u_{i,j}(t) = 0) < P_{th}, \\ 0, & u_{i,j}(t) + 1 = L, \end{cases} \quad (2)$$

式中  $L$  为不应态激发元胞的状态数, 这些状态为  $0, 1, 2, \dots, L-1$ , 一般有  $L \leq k$ , 即不应态激发元胞的状态数少于正常激发元胞的状态数. 当不应态元胞按规则(2)连续完成  $m$  次激发后回到静息态, 转变成正常激发元胞, 这时早期后去极化导致  $m$  次振荡. 下面研究在不同参数  $O_{th}, P_{th}, m$  和  $L$  下早期后去极化对螺旋波的影响.

### 3. 模拟结果

首先不考虑早期后去极化, 在系统中产生稳定螺旋波, 并作为初态, 然后考虑早期后去极化, 这里参数  $O_{th}$  在  $[2, 7]$  范围内取值 ( $O_{th} \in [2, 7]$ ),  $P_{th}$  在  $[1, 7]$  范围内取值 ( $P_{th} \in [1, 7]$ ), 参数  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值 ( $L \in [5, 8]$ ).

下面先考虑  $m = 1$  情况. 如果  $2 \leq O_{th} \leq 3$ , 数值模拟结果表明: 1) 当  $P_{th}$  在  $[1, 5]$  范围内取值和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化不改变螺旋波的稳定性, 但导致螺旋波的周期在  $L$  和 6 之间交替变化和导致螺旋波波臂粗细交替变化. 给定  $P_{th}, L$  越小时螺旋波波臂粗细交替变化就越明显, 反之就不明显, 如图 2(a), (b) 所示. 给定  $L, P_{th}$  越小时螺旋波波臂粗细交替变化就越明显, 反之就不明显, 如图 2(c) 和 (d) 所示. 造成螺旋波周期在  $L$  和 6 之间交替变化和螺旋波波臂粗细交替变化的原因是两种元胞交替出现的结果, 一方面早期后去极化将正常激发元胞的激发周期改为 6, 不应态激发元胞的固有激发周期为  $L$ , 另一方面正常激发元胞将经历 7

个态,而不应态激发元胞经历的态数为  $L$ ,两者的差别导致螺旋波的波臂粗细不同,例如图 2(a)中,螺旋波波臂细的部分由正常激发元胞产生,而粗的部分由不应态激发元胞产生. 2) 当  $P_{th} = 6, 7$  时,如果  $L$

$= 7, 8$ , 早期后去极化对螺旋波不产生任何影响. 如果  $L$  取值较小时,早期后去极化对螺旋波周期有影响,但螺旋波稳定不漫游. 存在唯一例外情况,当  $P_{th} = 7, L = 5$  时,螺旋波漫游出边界.

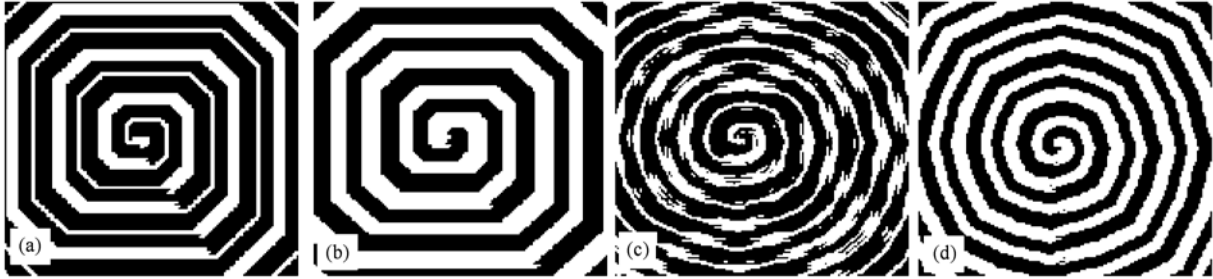


图2 在参数  $m = 1$  和  $O_{th} = 2$  的情况下不同参数  $P_{th}$  和  $L$  对应的稳定螺旋波斑图 (a)  $P_{th} = 2, L = 5$ ; (b)  $P_{th} = 2, L = 8$ ; (c)  $P_{th} = 5, L = 5$ ; (d)  $P_{th} = 5, L = 8$

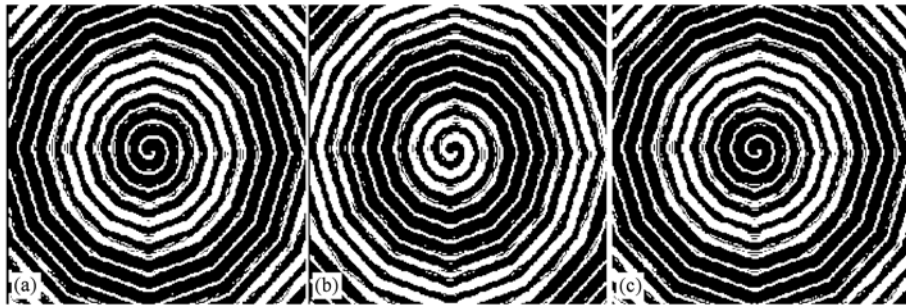


图3 在  $O_{th} = 4, P_{th} = 1, L = 5$  情况下不同时刻稳定螺旋波斑图 (a)  $t = 220$  时步; (b)  $t = 270$  时步; (c)  $t = 330$  时步

如果  $m = 1, 4 \leq O_{th} \leq 5$ , 数值模拟结果表明: 当  $P_{th} = 6, 7$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化对螺旋波不产生任何影响, 当  $P_{th} \in [1, 5]$  时, 早期后去极化也会导致螺旋波的周期在  $L$  和 6 之间交替变化和导致螺旋波波臂粗细交替变化, 得到与  $2 \leq O_{th} \leq 3$  情况下类似的结果, 不同的是在  $P_{th} \leq 3$  和  $L = 8$  情况下螺旋波外围会破碎, 以及在  $O_{th} = 4, P_{th} = 1, L = 5$  情况下, 早期后去极化导致螺旋波波臂粗细交替变化(波臂粗的部分是不应态激发元胞产生, 波臂细的部分由正常激发元胞产生), 形成呼吸螺旋波, 如图 3 所示.

如果  $m = 1, O_{th} = 6$ , 数值模拟结果表明: 1) 当  $P_{th} = 1, 2, 3$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化导致螺旋波波臂粗细交替变化, 并使螺旋波无规律漫游, 这种漫游使螺旋波变形、外围破碎,  $P_{th}$  越小, 螺旋波外围破碎范围就越大. 特别是在  $P_{th} = 1$  的情况下, 螺旋波漫游使螺旋波周而复始地破碎到

只剩下波头, 之后又形成一个较大的螺旋波. 可以看出: 导致螺旋波漫游的原因是介质整体的激发性较低的缘故, 因为  $O_{th} > P_{th}$  导致正常激发元胞的激发性低于不应态激发元胞激发性. 2) 当  $P_{th} = 4, 5$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化只导致螺旋波波长交替变化, 波臂有形变, 如图 4 所示. 3) 当  $P_{th} = 6$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 将导致螺旋波漂移. 为了具体了解螺旋波漂移情况, 我们采用如下方法确定波头, 在  $3 \times 3$  大小的正方形区域有  $L$  个元胞处于不同的状态, 这个区域就是波头所在位置, 它是螺旋波的旋转中心. 图 5 给出在  $m = 1, O_{th} = P_{th} = 6, L = 7$  的情况下, 以图 1(b) 为初态得到的不同时刻的螺旋波斑图, 图 6 给出了螺旋波漂移时波头的轨迹, 从这两个图可以看出螺旋波沿对角线漂移, 波头轨迹是闭合的. 螺旋波发生漂移的原因是, 不应态激发元胞激发性低, 使得整个介质只有一个不应态激发元胞, 它在对角线上来回运动, 导致螺

旋波沿对角线漂移. 4) 当  $P_{th} = 7$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化对螺旋波不产生任何影响.

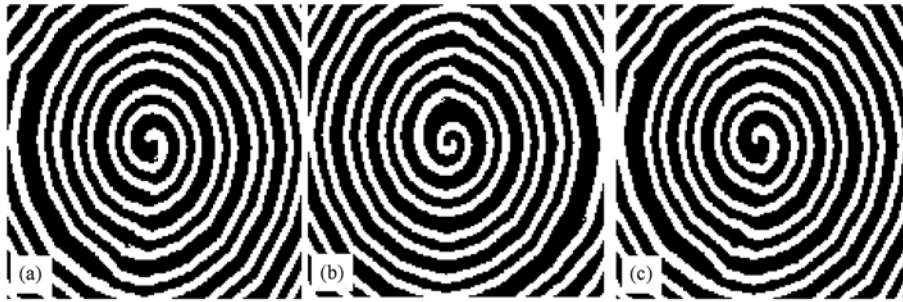


图4 在  $O_{th} = 6, L = 7, P_{th} = 4$  情况下不同时刻的螺旋波斑图 (a)  $t = 280$  时步; (b)  $t = 375$  时步; (c)  $t = 457$  时步

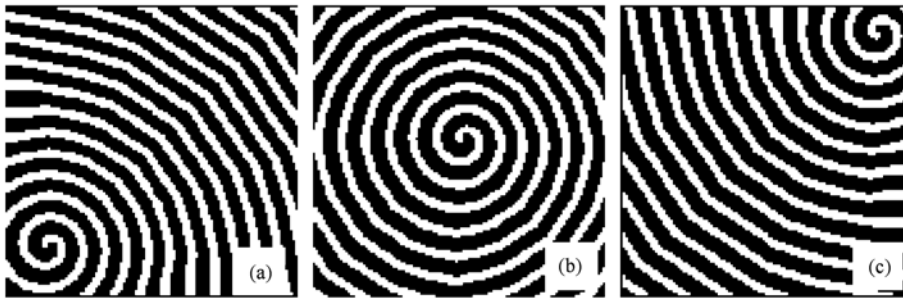


图5 在  $O_{th} = P_{th} = 6, m = 1$  和  $L = 7$  的情况下不同时刻螺旋波斑图 (a)  $t = 1600$  时步; (b)  $t = 2600$  时步; (c)  $t = 3600$  时步

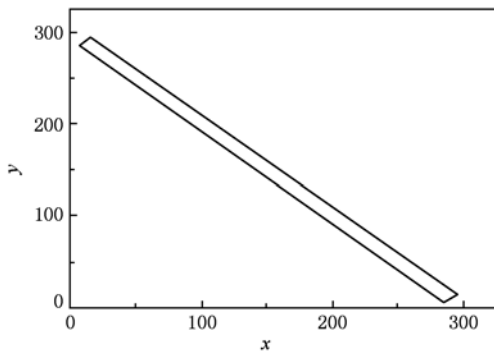


图6 螺旋波波头的运动轨迹(系统参数同图5)

如果  $m = 1, O_{th} = 7$ , 数值模拟结果表明: 当  $P_{th} = 1$  和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化导致螺旋波波臂在边界附近发生破碎, 形成许多振源, 产生向介质中心传播的波, 导致原螺旋波消失, 而在介质中间形成一个反螺旋波的斑图(波向螺旋波波核传播), 图7给出了当  $P_{th} = 1$  和  $L = 7$  的情况下相继8个时刻的反螺旋波斑图, 从图可以看出各点以  $T = 7$  周期振荡, 因为图7(a)与(h)相同. 当  $P_{th}$  在

$[2, 7]$  范围内和  $L$  在  $[5, 8]$  范围内取值时, 早期后去极化对螺旋波不产生任何影响.

为了更清楚看到不同参数下早期后去极化对螺旋波的影响, 在图8给出了  $m = 1$  和不同值  $L$  下在  $O_{th} - P_{th}$  上的相图, 图中实心方块  $\blacksquare$  代表螺旋波稳定但波臂粗细交替变化(参见图2和图3), 实心圆  $\bullet$  表示对螺旋波不产生影响, 空心正三角形  $\triangle$  代表螺旋波长交替变化(参见图4), 实心菱形  $\blacklozenge$  代表螺旋波漂移(参见图5), 空心倒三角形  $\nabla$  代表螺旋波破碎后产生反螺旋波(参见图7), 实心倒三角形  $\blacktriangledown$  表示螺旋波因为漫游发生局部破碎, 实心三角形  $\blacktriangle$  表示螺旋波漫游出边界. 从图可以看出, 不同参数  $L$  下得到类似的结果.

不失一般性, 下面考虑  $m = 3$  情况. 数值模拟结果表明: 在适当选择参数  $O_{th}, P_{th}$  和  $L$  下, 可观察到螺旋波波臂粗细交替变化和呼吸螺旋波, 螺旋波破碎和漫游, 螺旋波沿对角线漂移等现象, 得到与  $m = 1$  情况下类似的结果. 有所不同的是发生这些现象对应的参数不同, 此外, 螺旋波漫游时不出现螺旋波破碎现象. 图9给出了  $m = 3, O_{th} = 3, P_{th} = 7$  和  $L$

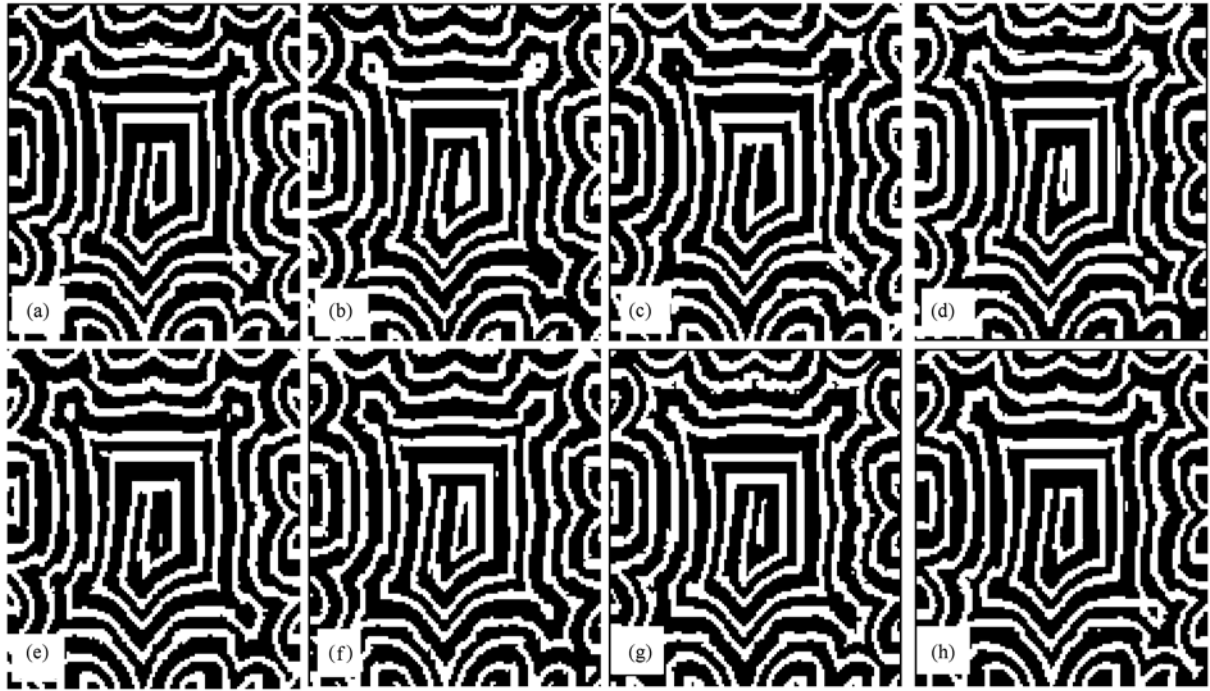


图7 在  $m=1, O_{th}=7, P_{th}=1$  和  $L=7$  的情况下相继 8 个时刻的螺旋波斑图

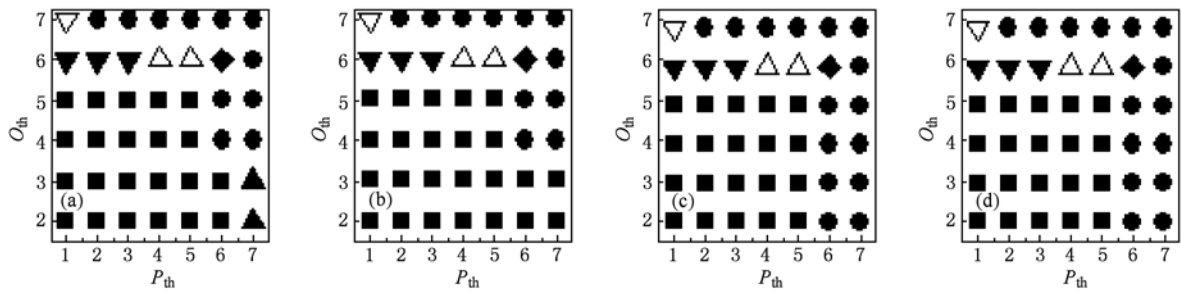


图8 不同  $L$  参数下  $O_{th}-P_{th}$  平面上的相图(图中■代表螺旋波稳定但波臂粗细交替变化,●表示对螺旋波不产生影响,△代表螺旋波波波长交替变化(参见图4),◆代表螺旋波波漂移,▽代表螺旋波破碎后产生反螺旋波,▼表示螺旋波因漫游发生局部破碎,▲表示螺旋波漫游出边界) (a)  $L=5$ ; (b)  $L=6$ ; (c)  $L=7$ ; (d)  $L=8$

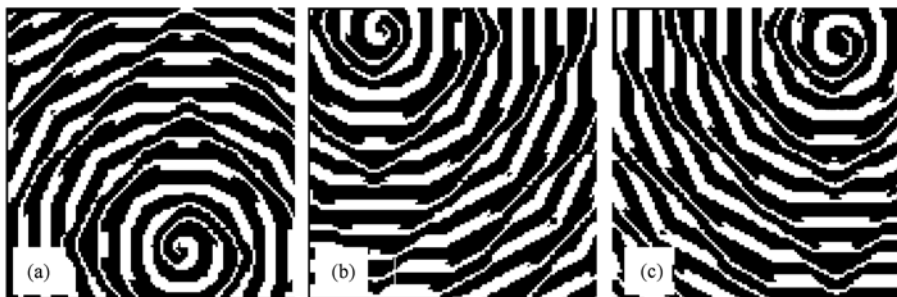


图9 在  $m=3, O_{th}=3, P_{th}=7$  和  $L=6$  的情况下不同时刻螺旋波斑图 (a)  $t=3000$  时步; (b)  $t=11700$  时步; (c)  $t=19500$  时步

=6 的情况下不同时刻螺旋波无规则漫游斑图. 从图可以看出螺旋波波臂粗细交替变化.

#### 4. 结 论

本文采用元胞自动机离散可激发介质模型研究了早期后去极化对螺旋波的影响. 数值模拟结果表明:在适当选择参数下,早期后去极化会导致螺旋波漫游、破碎、漂移和反螺旋波,导致螺旋波波臂扭曲且粗细交替变化,导致周期交替变化. 一般有:不应态激发阈值越大,早期后去极化行为对螺旋波的影响越小,反之影响就大;在高激发性介质( $O_{in}$ 较小)下,早期后去极化行为对螺旋波影响较小,在低激发性介质中,早期后去极化行为对螺旋波影响较大.

虽然本文使用的离散可激发性模型十分有利于数值研究早期后去极化行为对螺旋波的影响,但是模型本身也存在局限性,因为它只是三维心脏系统的一个二维简化模型,并且忽略了心脏中离子流的变化,因此所得结果与真实心脏系统的动力学还有一定差距. 在能够精确反映心脏动力学行为的模型中已经看到<sup>[26]</sup>:在钙离子的电导率比较大时(这时系统可以出现早期后去极化行为),系统出现螺旋波波臂非均匀现象,螺旋波发生漫游和破碎,螺旋波破碎可以不产生时空混沌,也可以产生时空混沌,依赖钙离子的电导率的大小. 这些现象在我们的模型中都观察到,只是表现形式有所不同,表明我们得到结果在一定程度上反映了心脏的实际情况,因此我们希望本文的研究结果能为心脏病的诊断提供帮助.

- [1] Fenton F H, Cherry E M, Hasting H M 2002 *Chaos* **12** 852
- [2] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [3] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [4] Bär M, Kevrekidis I G, Rotermund H H, Ertl G 1995 *Phys. Rev. E* **52** R5739
- [5] Lee K J, Cox E C, Goldstein R E 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1174
- [6] Qian Y, Song X Y, Shi W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4420 (in Chinese) [钱郁、宋宣玉、时伟 2006 物理学报 **55** 4420]
- [7] Liu Fu C, Wang X F, Li X C, Dong L F 2007 *Chin. Phys.* **16** 2640
- [8] Yin X, Liu Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6844 (in Chinese) [尹小舟、刘勇 2008 物理学报 **57** 6844]
- [9] Ma J, Jin W Y, Yi M, Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 (in Chinese) [马军、靳伍银、易鸣、李延龙 2008 物理学报 **57** 2832]
- [10] Zhang G Y, Ma J, Gan Z N, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6815 (in Chinese) [张国用、马军、甘正宁、陈勇 2008 物理学报 **57** 2832]
- [11] Ma J, Ying H P, Liu Y, Li S R 2009 *Chin. Phys. B* **18** 98
- [12] Deng M Y, Tang G N, Kong L J, Liu M R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 2339
- [13] Ma J, Yi M, Li B W, Li Y L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2438
- [14] Ma J, Jin W Y, Li Y L, Zheng Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 (in Chinese) [马军、靳伍银、李延龙、陈勇 2007 物理学报 **56** 2456]
- [15] Bär M, Eiswirth M 1993 *Phys. Rev. E* **48** 1635
- [16] Dai Y, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3 (in Chinese) [戴瑜、唐国宁 2009 物理学报 **58** 3]
- [17] Wang S H, Choe W G, Lee K J 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4799
- [18] Tang D N, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2319 (in Chinese) [唐冬妮、唐国宁 2010 物理学报 **59** 2319]
- [19] Gan Z N, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5400 (in Chinese) [甘正宁、马军、张国勇、陈勇 2008 物理学报 **57** 5400]
- [20] Ma J, Jin W Y, Yi M, Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 (in Chinese) [马军、靳伍银、易鸣、李延龙 2008 物理学报 **57** 2832]
- [21] Ma J, Wang C N, Jin W Y, Li Y L, Pu Z S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2844
- [22] Yang J Z, Zhang M 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 3195
- [23] Gerhardt M, Schuster H, Tyson J J 1990 *Physica D* **46** 392
- [24] Weimar J R, Tyson J J, Watson L T 1992 *Physica D* **55** 309
- [25] Greenberg J M, Hastings S P 1978 *SIAM Journal on Applied Mathematics* **34** 515
- [26] Qu Z, Xie F, Garfinkel A, Weiss J N 2000 *Annals of Biomedical Engineering* **28** 755

# The numerical study on the effect of the early afterdepolarization on spiral waves in discrete excitable media \*

Wei Hai-Ming Tang Guo-Ning<sup>†</sup>

(College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

(Received 17 May 2010; revised manuscript received 6 July 2010)

## Abstract

The early afterdepolarization (EAP) behavior is introduced into the Gierer-Hastings model of discrete excitable medium through considering that some of the refractory states can be excited. The effect of the EAP on spiral wave is studied. The numerical results show that the EAP has significant influences on spiral waves when the related parameters are suitably chosen. These influences include that the EAP causes spiral wave drifting and meandering, and spiral breakup. The pattern of spiral wave is distorted. The spiral wave varies alternately between those with thick and thin arms. The period of spiral wave alters alternately between two values. The EAP induces the transition from stable spiral wave to breathing spiral wave or antispiral wave. When the excitation threshold of refractory states is very high, the EAP has no effect on the spiral wave. The EAP induced phenomena are briefly discussed.

**Keywords:** discrete excitable medium, spiral wave, early afterdepolarization

**PACS:** 05.45.-a, 87.18.Hf

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10765002).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: tangguoning@sohu.com