辛几何算法在特殊 Chaplygin 系统中的应用研究*

刘世兴[1)2)] 刘 畅[1)] 常 鹏[1)] 王中文[2)] 郭永新[2)†]

1)(北京理工大学宇航学院,北京 100081)

2)(辽宁大学物理学院,沈阳 110036)

(2010 年 4 月 13 日收到;2010 年 5 月 18 日收到修改稿)

采用辛几何算法对广义力具有广义势的特殊 Chaplygin 系统的动力学性质进行数值研究,并和传统的 Runge-Kutta 算法进行比较,得出辛几何算法在这类非完整力学系统的计算中具有优越性.

关键词: 辛几何算法, Chaplygin 系统, Helmholtz 条件

PACS: 45.20.Jj

1. 引 言

Chaplygin 系统是非完整系统动力学中的一类重要系统,力学中的许多典型问题,如冰刀问题,机器人的运动规划问题等,都可以用 Chaplygin 方程来描述[1]. Chaplygin 将非完整约束预先嵌入到系统的 Lagrange 函数中,得到非完整系统的动力学方程,从而建立了一个不依赖于约束方程的运动系统[2,3]. 关于 Chaplygin 系统的论述有很多,如 Chaplygin 系统的几何描述[1,4]和一些简单非完整系统的解析求解[2,5—7]等. 但目前,关于该系统的数值计算方面的工作屈指可数,这将严重影响非完整力学系统的理论研究新成果对运动规划及在实际生产等领域中的应用[8]. 几乎所有的完整系统,都能表示成哈密顿正则方程的形式. 正则坐标和正则动量形成的相空间具有辛结构. 冯康[9]提出了哈密顿系统的辛几何算法,它使离散化后的差分方程保持原有系统的辛结构,从而使数值计算精度得到了提高,并在许多领域得到了广泛的应用,例如,辛算法已经应用到量子力学和强场物理[10],化学反应动力学,天体力学和大气与海洋科学,分子动力学、等离子体物理和地学等领域的研究中.

由于在非完整系统中,非完整约束对力学系统相空间辛结构的破坏[1,11—15],使得对于完整系统成立的保辛算法不再适用,需要寻求新的保结构数值算法来进行非完整力学系统的数值计算,以得到较精确的数值结果. 但对于 Chaplygin 非完整系统,在其广义力有广义势的情况下,却可以将非完整系统的运动方程的积分问题归结为有条件的完整系统运动方程的积分问题[2],对于这类 Chaplygin 系统,仍然可以应用哈密顿系统的辛算法对其进行数值求解. 本文将对在广义力有广义势的 Chaplygin 系统进行数值计算,采用辛几何算法和 Runge-Kutte 方法,并将算得的数值结果进行比较,得出辛几何算法计算的优越性. 文中采用爱因斯坦求和约定,并对指标取值范围作如下规定:$\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\beta=1,\cdots,g;\varepsilon=n-g;\ \nu=1,\cdots,\varepsilon;k=1,\cdots,n$.

2. Chaplygin 系统方程的 Hamilton 化

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 确定,受有 g 个一阶非线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t), \tag{1}$$

则 Chaplygin 系统的运动方程为

$$E_\sigma(\tilde{L})=\Phi_\sigma, \tag{2}$$

其中 $E_\sigma=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_\sigma}-\dfrac{\partial}{\partial q_\sigma}$, $\tilde{L}$ 是嵌入约束(1)后的

* 国家自然科学基金(批准号:10932002, 10872084, 10472040),辽宁省高校科研基金(批准号:2008S098),辽宁省高等学校优秀人才支持计划(批准号:2008RC20),辽宁省重点实验室建设项目(批准号:2008403009),辽宁省教育厅科研计划项目(批准号:L2010147)和辽宁大学青年科研基金(批准号:2008LDQN04)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

©2011 中国物理学会 Chinese Physical Society

Lagrange 函数,广义力函数 Φ_σ 表为

$$\Phi_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} E_\sigma(\varphi_\beta) = A_{\sigma\nu}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_\nu + B_\sigma(q,\dot{q},t), \tag{3}$$

其中 L 为嵌入约束前系统的 Lagrange 函数.

根据非完整系统 Lagrange 力学逆问题的理论,有如下的定理:

定理　如果广义力函数 Φ_σ 满足 Helmholtz 条件[2]

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma},$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu} + \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial q_\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}\right), \tag{4}$$

则 Chaplygin 系统(2)有下面的解析表达:

$$E_\sigma(L') = 0. \tag{5}$$

这里

$$L' = \tilde{L} + q_k \int_0^1 \Phi_k(t,\tau q,\tau\dot{q},\tau\ddot{q})\mathrm{d}\tau - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_0^1 (\tau q_k) A_{k\nu}(t,\tau q,\tau\tau' q)\dot{q}_\nu \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'.$$

如果广义力函数 Φ_σ 不满足 Helmholtz 条件,但是给函数 Φ_σ 添加一些按运动方程(2)而变为零的项,则可以得到满足定理条件的函数.

利用 Legendre 变换,则可以得到对应的 Hamilton 函数和广义动量

$$H' = p'_\sigma \dot{q}_\sigma - L',\quad p'_\sigma = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\sigma}. \tag{6}$$

从而可以得到系统的 Hamilton 正则方程

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H'}{\partial p'_\sigma},\quad \dot{p}'_\sigma = -\frac{\partial H'}{\partial q_\sigma}. \tag{7}$$

方程(7)有完整力学系统正则方程的形式,所以 Chaplygin 系统可以作为有条件的完整力学系统来研究,解方程(7)就可以得出 Chaplygin 非完整系统的运动.

3. 一般经典哈密顿系统的辛格式

Hamilton 函数(6)是 2σ 个变量 $p'_1,\cdots,p'_\sigma;q_1,\cdots,q_\sigma$ 的可微函数. 令 $z=(p'_1,\cdots,p'_\sigma;\ q_1,\cdots,q_\sigma)^{\mathrm{T}}$,则正则方程(7)可以写成下面紧凑的形式:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = J^{-1}\frac{\partial H'}{\partial z}, \tag{8}$$

其中 J 是标准辛矩阵. 基于 Hamilton 力学的基本原理:正则方程的解由一个单参数辛群 $\{g^t_{\mathrm{H}};-\delta<t<\delta\}$ 生成,采用冯康[5]等人提出的正则方程的辛算法,可以计算上面的正则方程组(7),从而得到方程组(7)的数值解.

对于一般经典哈密顿系统(8),可以采用如下的欧拉中点格式:

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\tau} = J^{-1}\left(\frac{\partial H'}{\partial z}\right)_{\left(\frac{z^{n+1}+z^n}{2}\right)}. \tag{9}$$

考虑正则恒等变换的生成函数,可以生成一个辛变换,因而基于哈密顿相流的生成函数,可以构造辛差分格式,如 4 阶辛差分格式为

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\tau} = J^{-1}(\nabla H')_{\left(\frac{z^{n+1}+z^n}{2}\right)} - \frac{\tau^2}{24}J^{-1}((\nabla H')^{\mathrm{T}} \times JH'_{zz}J\nabla H')_{\left(\frac{z^{n+1}+z^n}{2}\right)}. \tag{10}$$

采用类似的方法[16,17],还可以构造更高阶的辛格式.

4. 算　　例

均质圆球($m=1,r=1$)在粗糙水平面上的自由运动实验.

设球心坐标为 x,y,Euler 角为 θ,ϕ,ψ,小球受到的约束为

$$\dot{x} = -(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi),$$

$$\dot{y} = -(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \theta\cos\psi), \tag{11}$$

则圆球的动能为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{5}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2+\psi^2+2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta),$$

势能 $V=0$,则系统的 Lagrange 函数为

$$L = T - V = T. \tag{12}$$

将约束(11)嵌入(12)式中得到

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{5}\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta + \frac{2}{5}(\dot{\phi}^2+\dot{\psi}^2+2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta)\right], \tag{13}$$

代入(2),(3)式,则得到

$$E_\psi(\tilde{L}) = \frac{2}{5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta),$$

$$E_\theta(\tilde{L}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{7}{5}\dot{\theta}\right) - (\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{5}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta),$$

$$E_\phi(\tilde{L}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\phi}\sin^2\theta + \frac{2}{5}\dot{\phi} + \frac{4}{5}\dot{\psi}\cos\theta\right); \quad (14)$$

$$\Phi_\psi = 0,\ \Phi_\theta = -(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta,$$

$$\Phi_\phi = (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta. \quad (15)$$

从而得到系统的 Chaplygin 方程

$$E_\psi(\tilde{L}) = 0,$$

$$E_\theta(\tilde{L}) = -(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta,$$

$$E_\phi(\tilde{L}) = (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta. \quad (16)$$

将(15)式代入(4)式,可以验证所得广义力函数不满足 Helmholtz 条件,给函数 Φ_σ 添加一些按运动方程(2)而变为零的项[2],如在方程组(16)第一个和第三个方程右端分别添加项

$$-\frac{5}{2}E_\psi(\tilde{L}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta),$$

$$-\frac{5}{2}E_\phi(\tilde{L})\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta,$$

则原广义力函数 Φ_σ 变为 Φ'_σ,

$$\Phi'_\psi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta),$$

$$\Phi'_\theta = -(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta,$$

$$\Phi'_\phi = -\frac{d}{dt}[(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta].$$

可以验证所得新的广义力函数满足 Helmholtz 条件(4),利用 Lagrange 逆问题的计算方法[18],可以求得新的 Lagrange 函数 L'为

$$L' = \frac{7}{10}(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta). \quad (17)$$

利用经典 Legendre 变换得到系统的 Hamilton 函数

$$H' = p'_\sigma\dot{q}_\sigma - L' = \frac{5}{14\sin^2\theta}(p'^2_\psi + p'^2_\phi + p'^2_\theta\sin^2\theta - 2p'_\psi p'_\phi\cos\theta), \quad (18)$$

其中

$$p'_\sigma = \frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_\sigma}.$$

所以由方程组(7)可以得到该系统的 Hamilton 正则方程组为

$$\dot{p}'_\psi = -\frac{\partial H'}{\partial\psi} = 0,$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H'}{\partial p'_\psi} = \frac{5}{7\sin^2\theta}(p'_\psi - p'_\phi\cos\theta),$$

$$\dot{p}'_\phi = -\frac{\partial H'}{\partial\phi} = 0,$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H'}{\partial p'_\phi} = \frac{5}{7\sin^2\theta}(p'_\phi - p'_\psi\cos\theta),$$

$$\dot{p}'_\theta = -\frac{\partial H'}{\partial\theta} = \frac{5}{7\sin^3\theta}(p'^2_\psi\cos\theta + p'^2_\phi\cos\theta - p'_\psi p'_\phi(1 + \cos^2\theta)),$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H'}{\partial p'_\theta} = \frac{5}{7}p'_\theta. \quad (19)$$

采用上面的数值方法(10),可以求解上述方程组,得到 Chaplygin 系统的解,并和经典的 4 阶 Runge-Kutta(R-K)方法进行比较.

由于在原系统的 Lagrange 函数(13)中不含有广义坐标 ψ 和 ϕ,所以 ψ 和 ϕ 为循环坐标,对应系统的守恒量

$$\dot{p}_\psi = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\psi}} = 0 \Rightarrow p_\psi = \mathrm{const},$$

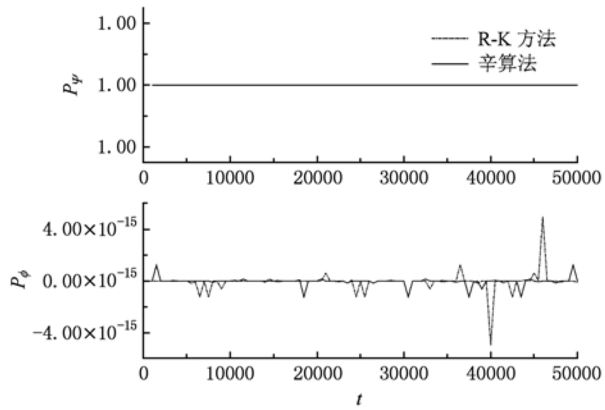

图 1 守恒量 p_ψ,p_φ 随时间的变化

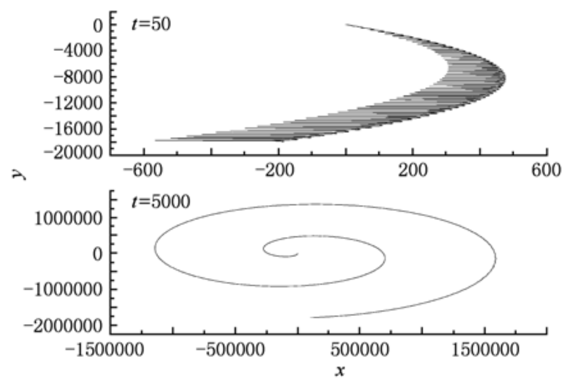

图 2 球的运动轨迹和运动趋势

$$\dot{p}_{\phi} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\phi} = \text{const}. \tag{20}$$

这两个守恒量可以作为我们算法好坏的判据.

为了计算方便,我们选取如下初值:$\phi = 0, \psi = 0, \theta = \pi/3, p'_{\phi} = 0, p'_{\psi} = 1, p'_{\theta} = 5$,满足约束条件(11),取步长 $h = 0.01$,分别采用辛算法和 R-K 方法计算系统的守恒量 p_{ψ}, p_{ϕ},并给出小球的运动轨迹. 从图 1 可以看出采用辛算法算得的守恒量 p_{ψ} 与 R-K 方法算得的相一致,而算得的 p_{ϕ} 要比 R-K 方法更加精确. 图 2 给出了采用辛算法算得的均质圆球在粗糙水平面上的运动轨迹和运动趋势,可以看出,小球在约束条件(11)的作用下,运动方向时刻发生变化,呈现如上图所示的运动方式;总运动趋势呈螺旋向外逐渐扩展的趋势,如图 2 所示.

5. 结　论

通过上面的算例,可以看出,在研究同类问题时,当精确解不易求解的情况下,采用辛几何算法将会得到更加准确的结果. 和传统的 Runge-Kutta 算法相比较,辛几何算法在这类非完整力学系统的计算中具有优越性. 因此,在工程应用中采用辛几何算法进行数值计算能带来更精确的参考数据.

[1] Cort′es J, Geometric, 2002 *Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems* (Berlin: Springer)

[2] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘　瑞、罗　勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)]

[3] Ostrowsky J 1998 *Rep. Math. Phys.* **42** 185

[4] Wang Y, Guo Y X, Lü Q S, Liu C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5142 (in Chinese) [王　勇、郭永新、吕群松、刘　畅 2009 物理学报 **58** 5142]

[5] Liu C, Chang P, Liu S X, Guo Y X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030302

[6] Pang T, Fang J H, Zhang M J, Lin P, Lu K 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3150

[7] Ge W K, 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6729 (in Chinese) [葛伟宽 2009 物理学报 **58** 6729]

[8] Liu S X, Guo Y X, Liu C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1311 (in Chinese) [刘世兴、郭永新、刘　畅 2008 物理学报 **57** 1311]

[9] Feng K 1985 *Proc. of the* 1984 *Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations Computation of Partial Differential Equations*, edited by Feng K (Beijing: Science Press) P42—58

[10] Liu X S, Ding P Z 2004 *Adv. Phys.* **26** 48 (in Chinese) [刘学深、丁培柱 2004 物理学进展 **26** 48]

[11] Guo Y X, Song Y B, Zhang X B, Chi D P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1192

[12] Wang Y, Guo Y X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5517 (in Chinese) [王　勇、郭永新 2005 物理学报 **54** 5517]

[13] Guo Y X, Shang M, Luo S K, Mei F X 2001 *Int. J. Theor Phys.* **40** 1197

[14] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[15] Guo Y X, Mei F X 1999 *Int. J. Theor Phys.* 38 1017

[16] Zhu W S, Zhao X S, Tang YQ 1996 *J. Chem. Phys.* **104** 2275

[17] Yoshida H 1990 *Phys. Lett.* A **150** 262

[18] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I* (New York: Springer-verlag.)

The application of symplectic geometric algorithm in a special Chaplygin system*

Liu Shi-Xing[1)2)] Liu Chang[1)] Chang Peng[1)] Wang Zhong-Wen[2)] Guo Yong-Xin[2)†]

1) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

(Received 13 April 2010; revised manuscript received 18 May 2010)

Abstract

A special Chaplygin system is studied numerically by using the symplectic geometric algorithm and compared with the classical R-K method. By comparing the results of the two methods, the advantage of symplectic geometric algorithm used on this special Chaplygin mechanical system is demonstrated.

Keywords: symplectic geometric algorithm, Chaplygin system, Helmholtz condition

PACS: 45.20. Jj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 10872084, 10472040), the Research Program of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008S098), the Program of Supporting Elitists of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008RC20), the Program of Constructing Liaoning Provincial Key Laboratory, China (Grant No. 2008403009), the Foundation Research Plan of Liaoning educational Bureau (Grant No. L2010147), and the Youth Fund of Liaoning University (Grant No. 2008LDQN04).

† Corresponding author. E-mail: yxguo@ lnu. edu. cn