一类相对转动非线性动力学模型的近似解*

莫嘉琪[1)4)†] 程荣军[2)] 葛红霞[3)]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖 241003)

2)(浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

3)(宁波大学理学院,宁波 315211)

4)(上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所,上海 200240)

(2010 年 6 月 28 日收到;2010 年 7 月 16 日收到修改稿)

研究了一类具有非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型. 首先构造一个同伦映射, 其次决定方程的初始近似, 最后通过同伦映射方法得到了对应模型的任意次近似解.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, 近似解

PACS: 02.30.Mv

1. 引 言

近年来, 转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论有了一些研究[1,2]. 文献[3—5]利用相对性原理, 建立了弹性转轴任意两个横截面间的相对转动的动力学模型. 文献[6]还研究了一类相对转动非线性动力学系统的混沌运动表现. 相对转动非线性动力系统具有复杂的动力学行为. 文献[7]针对了一类具有线性刚度、非线性阻尼和强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统, 应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解的理论, 证明了系统解的存在、唯一和有界性, 得到了相应自治系统存在唯一的极限环和稳定性的条件. 并研究了在特殊条件下的精确解.

非线性问题是应用数学界非常关注的一个问题[8]. 近来,许多学者做了许多工作[9—12],许多近似方法被优化和发展,包括匹配法、边界层法,合成展开法和多重尺度法等. 作者等利用渐近理论也研究了一类非线性问题[13—24]. 本文是对一类相对转动非线性动力学模型, 利用一种简单而有效的方法来求出其任意次精度的近似解.

2. 动力学模型

在阻尼项为齐次多项式的情形下, 可以得到如下一类弹性转轴任意两端间的相对转动系统的非线性动力学模型[6,7]

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{2k+1}+bx=f(t),\tag{1}$$

其中 $x=\theta_2-\theta_1$ 为相对转角, 这里 θ_1,θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角; $F(t)=\frac{6}{J}(T_2-T_1)$, 这里 J 为弹性转轴的转动惯量, T_1,T_2 分别为弹性转轴两端面的外加力矩, 且设 $f(t)$ 是圆频率为 ω 的连续的周期函数, 而系数 $b>0,a_1>0,a_{2k+1}\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$.

对应于方程(1)的线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=f(t).\tag{2}$$

首先将圆频率为 ω 的连续的周期函数 $f(t)$ 展开为 Fourier 级数

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k\exp(\mathrm{i}k\omega t),$$

$$f_k=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(\tau)\exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 40876010, 40906013), 中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08), 公益性行业科研专项(批准号:GYHY200806010), LASG 国家重点实验室专项经费, 上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号:E03004)和宁波市自然科学基金(批准号:209A610014, 2009A610154) 资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

再由模型(1)的假设, 方程(2)存在一个圆频率为 ω 的周期解 $\tilde{x}(t)$[7], 并令

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(\mathrm{i}k\omega t). \tag{4}$$

将(3), (4)式代入方程(2), 有

$$c_k = \frac{\omega}{2\pi(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(\tau)\exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{5}$$

于是由(4)式, 线性方程(2)具有圆频率为 ω 的周期解 $\tilde{x}(t)$ 为

$$\tilde{x}(t) = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(\tau) \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\exp(\mathrm{i}k\omega t). \tag{6}$$

3. 非线性模型的近似解和精确解

为了求得相对转动系统的非线性动力学模型(1)的近似解, 今引入一个同伦映射 $H[x,p]:R\times I\to R$[25,26]

$$H[x,p] = Lx - Lx_0 - p\Big[Lx_0 - f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^{2k+1}\Big], \tag{7}$$

其中 $x_0(t)$ 为模型(1)的周期解的初始近似, p 为参数, 线性算子为

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + b.$$

显然, 由同伦映射(7)知, $H[x,1]=0$ 就是模型(1). 于是 $H[x,p]=0$ 当 $p\to 1$ 时的周期解就是模型(1)具有相同圆频率的周期解.

在同伦映射(7)中, 选取初始近似 $x_0(t)$ 为方程(2)的解 $\tilde{x}(t)$. 即

$$x_0(t) = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(\tau) \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\exp(\mathrm{i}k\omega t). \tag{8}$$

再设

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i,\ p \in I \equiv [0,1]. \tag{9}$$

将(8), (9)式代入 $H[,x,p]=0$, 按 p 展开, 比较 p^i $(i=0,1,2,\cdots)$ 同次幂的系数. 对于 $i=0$ 的系数, 自然成立. 对于 $i=1$ 关于 p^1 的系数, 有

$$Lx_1 = -\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\Big]^{2k+1}. \tag{10}$$

设方程(10)的具有圆频率的周期解为

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\exp(\mathrm{i}k\omega t). \tag{11}$$

将(11)式代入方程(10), 可得

$$d_k = \frac{-\omega}{2\pi(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)} \times \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\Big[\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}\Big]^{2k+1}\Big] \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau.$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{12}$$

再将(12)式代回(11)式, 便得到具有圆频率为 ω 的周期解

$$x_1(t) = -\frac{\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)} \times \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{2j+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}\Big]^{2j+1}\Big] \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau\Big] \times \exp(\mathrm{i}k\omega t), \tag{13}$$

其中 x_0 由(8)式表示.

将(8), (9)式代入 $H[,x,p]=0$, 按 p 展开, 比较 p^i $(i=0,1,2,\cdots)$ 同次幂的系数. 对于 $i=2$ 关于 p^2 的系数, 有

$$Lx_2 = -\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_{2k+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\Big]^{2k}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

再设方程(14)的具有圆频率为 ω 的周期解为

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k\exp(\mathrm{i}k\omega t). \tag{15}$$

将(15)式代入方程(14), 可得

$$e_k = \frac{-\omega}{2\pi(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)} \times \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\Big[\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_{2k+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}\Big]^{2k}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}\Big] \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau.$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{16}$$

再将(16)式代回(15)式, 便得到具有圆频率为 ω 的周期解

$$x_2(t) = -\frac{\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{(b-(k\omega)^2+\mathrm{i}ka_1\omega)} \times \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\Big[\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_{2k+1}\Big[\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau}\Big]^{2k}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}\Big] \times \exp(-\mathrm{i}k\omega\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\exp(\mathrm{i}k\omega t), \tag{17}$$

(17)式中 x_0, x_1 分别由(8), (13)式表示.

用相同的方法，可以依次地得到 $x_n(t)$ $(n=3,4,\cdots)$. 将得到的具有圆频率为 ω 的周期函数 $x_n(t)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 代入(9)式，并令 $p=1$. 由模型(1)的假设和文献[7, 25,26]知，便得到模型(1)的任意次的具有圆频率为 ω 的近似周期解 $X_n(t)=\sum_{i=0}^{n}x_i(t)$，并且 $X(t)=\lim_{n\to\infty}X_n(t)$ 一致地收敛. 因此

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n(t)$$

为非线性动力学模型(1)的具有圆频率为 ω 的精确周期解.

4. 例

考虑如下一个简单的微扰相对转动系统的非线性动力学模型

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\varepsilon\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+x=\sin t. \qquad (18)$$

对照方程(1)，这里圆频率 $\omega=1$，而 ε 为小的正参数. 对应于方程(18)的线性方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=\sin t. \qquad (19)$$

不难得到方程(19)存在一个具有圆频率 $\omega=1$ 的周期解

$$\tilde{x}(t)=-\cos t. \qquad (20)$$

令

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}x_kp^k,\ p\in[0,1]. \qquad (21)$$

利用同伦映射(7)，由(20)式，先设方程(18)的初始近似 x_0 为

$$x_0(t)=-\cos t. \qquad (22)$$

再由(10)式，得

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}+x_1=-\varepsilon\left[\frac{dx_0}{dt}\right]^3.$$

考虑到(22)式，上式为

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}+x_1=\frac{\varepsilon}{4}(-3\sin t+\sin 3t). \qquad (23)$$

方程(23)具有圆频率 $\omega=1$ 的周期解为

$$x_1(t)=\frac{\varepsilon}{4}\left[3\cos t-\frac{1}{73}(8\sin 3t+3\cos 3t)\right]. \qquad (24)$$

再由(7)，(18)式，得

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{dx_2}{dt}+x_2=\frac{\varepsilon^2}{8\times 73}[4(57\sin t-6\cos t)-(201\sin 3t-24\cos 3t)+(9\sin 5t-24\cos 5t)]. \qquad (25)$$

方程(25)具有圆频率 $\omega=1$ 的周期解为

$$x_2(t)=\frac{\varepsilon^2}{8\times 73}\Big[4(6\sin t+57\cos t)+\frac{1}{73}(1608\sin 3t+411\cos 3t)-\frac{1}{601}(336\sin 5t-531\cos 5t)\Big]. \qquad (26)$$

于是由(22)，(24)和(26)式，微扰相对转动系统的非线性动力学模型(18) 具有圆频率 $\omega=1$ 的二次近似周期解 $X_2(t)$ 为

$$\begin{aligned}X_2(t)=&-\cos t-\frac{\varepsilon}{4\times 73}[219\cos t+8\sin 3t+3\cos 3t]\\&+\frac{\varepsilon^2}{8\times 73}\Big[4(6\sin t+57\cos t)\\&+\frac{1}{73}(1608\sin 3t+411\cos 3t)\\&-\frac{1}{601}(336\sin 5t-531\cos 5t)\Big]\\&+O(\varepsilon^3),\quad 0<\varepsilon\ll 1.\end{aligned}$$

同样，用上述同伦映射方法，我们还可进一步得到微扰相对转动系统的非线性动力学模型(18)具有圆频率 $\omega=1$ 的更高次近似周期解 $X_n(t)$ $(n=3,4,\cdots)$.

5. 结　　论

用同伦映射方法求解相对转动的非线性动力学模型的近似解是一个简单而有效的方法. 用同伦映射方法得到的解不是简单的离散数值解. 对得到的近似解还可继续进行微分、积分等解析运算，并作相应的定性和定量方面的分析. 同时，本文选取初始近似 $u_0(t)$，是采用线性情形下的典型系统. 它保证了相应的相对转动非线性动力学模型(1)较快地求得具有圆频率为 ω 的周期解在要求的精度范围内的近似解析解.

[1] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]

[2] Zhang K, Feng J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2985 (in Chinese) [张 凯、冯 俊 2005 物理学报 **54** 2985]

[3] Wang K, 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]

[4] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵 武、刘 彬、时培明、将金水 2006 物理学报 **55** 3852]

[5] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]

[6] Shi P M, Liu, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]

[7] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王 坤、关新平、乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]

[8] de Jager E M Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Pertubation*, (Amsterdamm, North-Holland Publishing Co)

[9] Sagon G 2008 *Nonlinearity* **21** 1183

[10] Hovhannisyanm G, Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297

[11] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392

[12] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246

[13] Mo J Q 2009 *Adv. Math.* **38** 227

[14] Mo J Q 2009 *Science in China Ser.* G **52** 1007

[15] Mo J Q, Lin W T 2008 *J, Sys. Sci. & Complexity* **20** 119

[16] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[17] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202

[18] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440

[19] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[20] Mo J Q Lin Y H, Lin W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6692 (in Chinese) [莫嘉琪、林一骅、林万涛 2009 物理学报 **58** 6692]

[21] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[22] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

[23] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3624

[24] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[25] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]

[26] Liao Shijun 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, (New York, CRC Press Co)

Approximate solution for a class of relative rotation nonlinear dynamic model*

Mo Jia-Qi[1)4)†] Cheng Rong-Jun[2)] Ge Hong-Xia[3)]

1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003, *China*)

2) (*Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo* 315100, *China*)

3) (*Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)

4) (*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240, *China*)

(Received 28 June 2010; revised manuscript received 16 July 2010)

Abstract

A class of relative rotation nonlinear dynamical model with nonlinear damping force and forcing periodic force is investigated. First, a homotopic mapping is constructed, and then the initial approximate solution is determined. Finally, using the homotopic mapping method, the arbitrarily degree approximation for corresponding model is found.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamic equation, approximate solution

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40876010, 40906013), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the R & D Special Fund for Public Welfare Industry (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Ningbo, China (Grant Nos. 2009A610014, 2009A610154).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn