

统一超混沌系统的投影同步*

阿布都热合曼·卡的尔¹⁾²⁾ 王兴元^{1)†} 赵玉章²⁾

1) (大连理工大学电子信息与电气工程学部, 大连 116024)

2) (新疆财经大学计算机科学与工程学院, 乌鲁木齐 830012)

(2010年3月16日收到; 2010年7月7日收到修改稿)

利用两种方法研究了统一超混沌系统的同步问题. 首先以全状态混合投影自适应同步方法, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了自适应控制器, 理论证明了该控制器可以实现参数已知的统一超混沌系统的全状态混合映射同步. 其次使用主动控制同步方法, 设计了同步控制器, 实现了统一超混沌系统的完全同步, 最后数值仿真实验进一步验证了所提出方案的有效性.

关键词: 统一超混沌系统, 自适应控制器, 全状态混合投影同步, 主动控制同步

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Xt

1. 引言

混沌的研究是非线性动力学领域中的重点问题之一, 由于混沌控制与同步在工程领域中应用有着巨大的潜力和发展前途, 已成为混沌系统研究的核心. 1990年, Pecora 和 Carroll 提出了“混沌同步”的概念, 并在实验室用电路进行了实现^[1]. 此后, 混沌同步及其应用得到了广泛的研究和发展^[2-5]. 目前, 许多学者已从不同的角度实现了不同类型的混沌同步, 如脉冲同步^[6]、相同步^[7,8]、延迟同步^[9]、反同步^[10-12]和超混沌系统同步方案^[13,15].

1999年, Mainieri 和 Rehacek^[16]提出了混沌映射同步方式, 即驱动-响应系统同步到一个比例因子上. 这一比例特性可用于保密通信中将二进制数扩展到 M 进制数, 以实现更快的传输^[17,18]. 映射同步统一了不同类型的混沌同步现象, 例如, 反相同步和完全同步分别是映射同步中比例因子为 -1 和 1 的特殊情况. 2005年, Wen 等^[19]提出了全局映射同步的概念. 最近 Hu 等^[20]等在此基础上又提出全局混合映射同步. 在上述研究基础上, 本文基于 Lyapunov 稳定性理论设计了自适应控制器, 实现了统一超混沌系统的全状态混合投影自适应同步; 同时还利用主动控制法, 实现了统一超混沌系统的完

全同步. 数值模拟进一步验证了所提方案的有效性.

2. 问题描述

文献[18]提出全局混合投影同步, 即设系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x})$ 为驱动系统, $\dot{\mathbf{y}}(t) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是响应系统, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ 为相应的状态变量. 如果存在一个非零常数矩阵 $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^{n \times n}$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \alpha \mathbf{x}\| = 0,$$

即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i - \alpha_i x_i| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

该驱动系统和响应系统之间是全局混合投影同步.

2000年 Lü 和 Chen 提出了统一混沌系统^[21], 在此基础上文献[22]提出了统一超混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (25a + 20)(y - x) + w, \\ \dot{y} = (28 - 35a)x - xz + (29a - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{(a + 8)z}{3}, \\ \dot{w} = bw + cz, \end{cases} \quad (1)$$

这里 x, y, z 和 w 是状态变量, a, b, c 为参数. 当 $a = 0, b = -1, c = -1$ 时, 系统(1)为超混沌 Lorenz 系统; 当 $a = 0.8, b = 0.3, c = 0.1$ 时, 系统(1)为超混沌

* 国家自然科学基金(批准号:60973152, 60573172), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20070141014)和辽宁省自然科学基金(批准号:20082165)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

Lü 系统;当 $a=1, b=0.2, c=0.1$ 时,系统(1)为超混沌 Chen 系统. 图 1 所示当 $a=0.6, b=0.3, c=0.1$

时,系统(1)的超混沌吸引子.

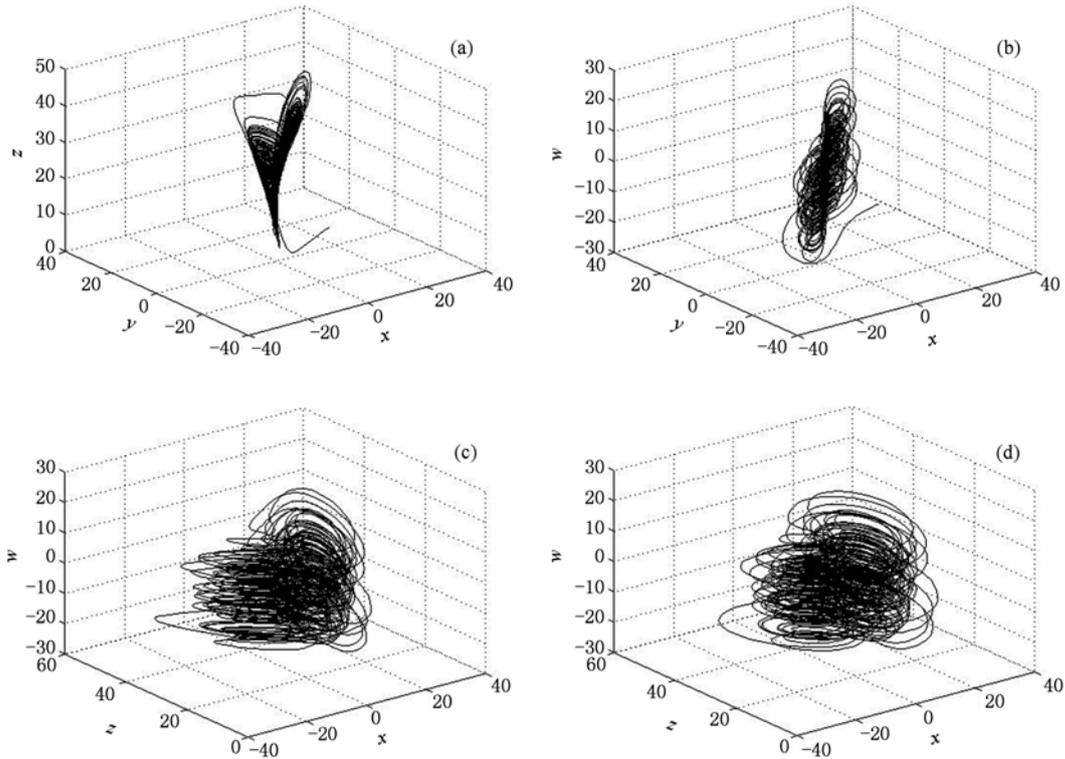


图 1 统一超混沌系统的吸引子 (a) $x-y-z$; (b) $x-y-w$; (c) $x-z-w$; (d) $y-z-w$

3. 全状态混合投影自适应同步

定义驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25a + 20)(y_1 - x_1) + w_1, \\ \dot{y}_1 = (28 - 35a)x_1 - x_1z_1 + (29a - 1)y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \frac{(a + 8)z_1}{3}, \\ \dot{w}_1 = bw_1 + cy_1z_1. \end{cases} \quad (2)$$

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (25a + 20)(y_2 - x_2) + w_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = (28 - 35a)x_2 - x_2z_2 + (29a - 1)y_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \frac{(a + 8)z_2}{3} + u_3, \\ \dot{w}_2 = bw_2 + cy_2z_2 + u_4. \end{cases} \quad (3)$$

这里, u_1, u_2, u_3, u_4 分别为加在对应状态变量上的控制输入, 以确保驱动系统(2)与响应系统(3)达到同步. 定义驱动-响应系统的状态误差为 $e_1 = x_2 - k_1x_1$, $e_2 = y_2 - k_2y_1$, $e_3 = z_2 - k_3z_1$ 和 $e_4 = w_2 - k_4w_1$, 其中,

k_1, k_2, k_3, k_4 分别为对应状态变量的缩放比例因子.

根据(2)和(3)式可得误差系统如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 20)(e_2 - e_1) + e_4 + u_1, \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 - x_2z_2 + k_2x_1z_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = x_2y_2 - k_3x_1y_1 - \frac{\alpha + 8}{3}e_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = be_4/c + y_2z_2 - k_4y_1z_1 + u_4. \end{cases} \quad (4)$$

若 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|e\| \rightarrow 0$, 这里 $e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t))$, 则驱动系统(2)与响应系统(3)可达到同步. 设计自适应控制器为

$$\begin{cases} u_1 = me_1 - 20e_2 - e_4, \\ \dot{m} = \beta e_1^2, \\ u_2 = ne_2 + x_2z_2 - k_2x_1z_1, \\ \dot{n} = \beta e_2^2, \\ u_3 = pe_3 - x_2y_2 + k_3x_1y_1, \\ \dot{p} = \beta e_3^2, \\ u_4 = qe_4 - y_2z_2 + k_4y_1z_1, \\ \dot{q} = \beta e_4^2, \end{cases} \quad (5)$$

这里 m, n, p, q 为反馈增益估计, 且 $m(0) = 0, n(0)$

$= 0, p(0) = 0, q(0) = 0; \beta < 0$, 改变 β 的值可以适当调整自适应的速度.

定理 1 当 $a = 3.62, b = 0.2, c = 0.1$, 反馈增益估计满足

$$\begin{cases} m = \hat{m} > 25\alpha + 21, \\ n = \hat{n} > (5\alpha - 14)^2 - 29\alpha + 1, \\ p = \hat{p} > (a + 8)/3, \\ q = \hat{q} > b/c \end{cases} \quad (6)$$

时, 根据(6)式可知误差系统(4)渐近稳定.

证明 构造 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V = & -\frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) \\ & + \frac{1}{2\beta}[(m - \hat{m})^2 + (n - \hat{n})^2 \\ & + (p - \hat{p})^2 + (q - \hat{q})^2], \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $\hat{m} > 0, \hat{n} > 0, \hat{p} > 0, \hat{q} > 0; \hat{m}, \hat{n}, \hat{p}, \hat{q}$ 分别是 m, n, p, q 的估计值. 对(7)式求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e_1\dot{e}_1 - e_2\dot{e}_2 - e_3\dot{e}_3 - e_4\dot{e}_4 + (m - \hat{m})e_1^2 \\ & + (n - \hat{n})e_2^2 + (p - \hat{p})e_3^2 + (q - \hat{q})e_4^2 \\ = & (25\alpha + 21 - \hat{m})e_1^2 - [e_1 - (5\alpha - 14)e_2]^2 \\ & + [(5\alpha - 14)^2 - (29\alpha - 1 + \hat{n})]e_2^2 \\ & + ((a + 8)/3 - \hat{p})e_3^2 + (b/c - \hat{q})e_4^2. \end{aligned}$$

(6)式成立时, 有 $\dot{V} < 0$. 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 误差系统(4)渐近稳定. 证毕.

通过数值模拟验证自适应全局混合映射同步有效性, 采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程(2)和(3). 选取参数 $a = 0.6, b = 0.3, c = 0.1$, 系统初态为 $x_1(0) = 2, y_1(0) = 3, z_1(0) = 4, w_1(0) = 3, x_2(0) = 7, y_2(0) = 6, z_2(0) = 5, w_2(0) = 5$ 时, 设缩放比例因

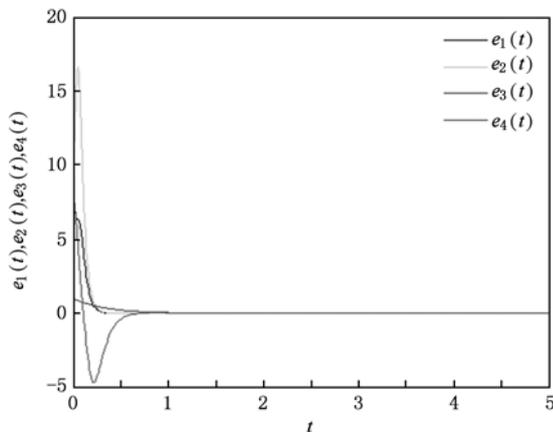


图2 驱动系统(2)和响应系统(3)全局混合映射同步误差曲线

子为 $k_1 = -1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1$, 选取 $\beta = -2$, 图2给出统一超混沌系统全局混合投影同步结果.

4. 主动控制同步法

通过主动控制实现统一超混沌系统同步, 仍以系统(2)为驱动系统, 系统(3)为响应系统. 在系统(3)中引进了4个控制器分别为 u_1, u_2, u_3, u_4 , 为了确定控制器, 使系统(2)和(3)实现同步, 由方程(3)减去方程(2)可得误差系统, 状态误差为 $e_1 = x_2 - k_1x_1, e_2 = y_2 - k_2y_1, e_3 = z_2 - k_3z_1$ 和 $e_4 = w_2 - k_4w_1$, 其中, k_1, k_2, k_3, k_4 分别为对应状态变量的缩放比例因子. 得到误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 20)(e_2 - e_1) + e_4 + u_1, \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 \\ \quad - x_2z_2 + k_2x_1z_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = x_2y_2 - k_3x_1y_1 - (\alpha + 8)e_3/3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = be_4 + cy_2z_2 - k_4cy_1z_1 + u_4. \end{cases} \quad (8)$$

设计控制器如下:

$$\begin{cases} u_1 = V_1(t), \\ u_2 = V_2(t) + x_2z_2 - k_2x_1z_1, \\ u_3 = V_3(t) + x_1y_1 - k_3x_2y_2, \\ u_4 = V_4(t) - cy_2z_2 + k_4cy_1z_1. \end{cases} \quad (9)$$

将方程(9)代入误差系统(8), 可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 20)(e_2 - e_1) + e_4 + V_1(t), \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 + V_2(t), \\ \dot{e}_3 = -(\alpha + 8)e_3/3 + V_3(t), \\ \dot{e}_4 = be_4 + V_4(t), \end{cases} \quad (10)$$

这里的 $V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)$ 是关于误差变量 e_1, e_2, e_3, e_4 的控制输入信号, 即

$$\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \\ V_4(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{A} 是 4×4 的实数矩阵, 关于矩阵 \mathbf{A} 的取值范围有很多. 不妨取

$$A = \begin{pmatrix} 25a + 19 & -25a - 20 & 0 & -1 \\ 35a - 28 & -29a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a + 8)/3 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b - 1 \end{pmatrix},$$

则方程(10)变为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1, \\ \dot{e}_2 = -e_2, \\ \dot{e}_3 = -e_3, \\ \dot{e}_4 = -e_4, \end{cases}$$

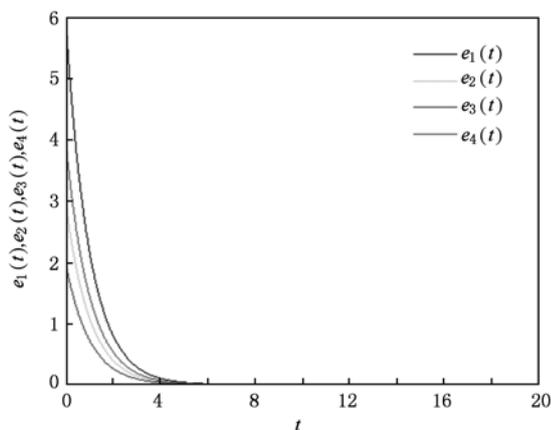


图3 驱动系统(2)和响应系统(3)主动控制同步误差曲线

即误差系统(9)的特征值为 $-1, -1, -1, -1$ 由于微分方程的稳定性理论可得,当 $t \rightarrow \infty$ 状态变量 e_1, e_2, e_3, e_4 均收敛于零,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0,$$

从而实现了统一超混沌系统的同步。

通过数值模拟验证该方法的有效性,采用四阶 Runge-Kutta 法进行仿真. 选取参数 $a = 0.6, b = 0.3, c = 0.1$, 初值 $x_1(0) = -2, y_1(0) = 4, z_1(0) = 6, w_1(0) = 5, x_2(0) = 4, y_2(0) = 7, z_2(0) = 8, w_2(0) = 9$ 时, 设 $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 1$, 图3 给出统一超混沌系统主动控制同步结果。

5. 结 论

本文用全状态混合投影自适应同步和主动控制同步两种方法来实现了统一超混沌系统同步问题. 通过理论证明和选择适当的参数以及初始条件进行数值仿真实验, 进一步验证了所提供方法的可行性和有效性。

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing: Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]
- [3] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz systems family: Analysis, control and synchronization* (Beijing: Science Press) chapt. 8 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第八章]
- [4] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
- [5] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S, Peng S G, Lin Q H 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [6] Zhang H G, Ma T D, Yu W, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3616
- [7] Wu Y X, Huang X, Gao J, Zheng Z G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3803 (in Chinese) [吴玉喜、黄霞、高建、郑志刚 2007 物理学报 **56** 3803]
- [8] Meng J, Wang X Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5142 (in Chinese) [孟娟、王兴元 2007 物理学报 **56** 5142]
- [9] Jia F L, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3101 (in Chinese) [贾飞蕾、徐伟 2007 物理学报 **56** 3101]
- [10] Wang X Y, Wu X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1988 (in Chinese) [王兴元、武相军 2007 物理学报 **56** 1988]
- [11] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]
- [12] Liu F C, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4729 (in Chinese) [刘福才、宋佳秋 2008 物理学报 **57** 4729]
- [13] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [14] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [15] Zhang H G, Zhao Y, Yu W, Yang D S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4056
- [16] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [17] Li Z G, Xu D 2004 *Chaos, Solitons and Fractals.* **22** 477
- [18] Chee C Y, Xu D 2005 *Chaos, Solitons and Fractals.* **23** 1063

- [19] Wen G, Xu D 2005 *Chaos, Solitons and Fractals*. **26** 71
[20] Hu M F, Xu Z Y, Zhang R 2008 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13** 456
[21] Lü J H, Chen G R 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **12** 659
[22] Wang X Y, Zhao G B 2010 *International Journal of Modern Physics B* **24** 4619

Projective synchronization for unified hyperchaotic system *

Abdurahman Kadir¹⁾²⁾ Wang Xing-Yuan^{1)†} Zhao Yu-Zhang²⁾

1) (Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

2) (School of Computer Science and Engineering, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumchi 830012, China)

(Received 16 March 2010; revised manuscript received 7 July 2010)

Abstract

The projective synchronization in the unified hyperchaotic system using two control method is studied in this paper. Based on the Lyapunov stability theory, the full state hybrid projective synchronization is achieved via an adaptive controller. It is proved theoretically that the controller can make the states of the dynamical system and the response system with known parameters achieve the asymptotically full state hybrid projective synchronization. An active controller is designed to achieve the projective synchronization. Finally, Numerical simulations show the effectiveness of the two schemes.

Keywords: unified hyperchaotic system, adaptive control, full state hybrid projective synchronization, active control

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Xt

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60973152, 60573172), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070141014), the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082165).

† Corresponding author. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn