

# (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程的精确解 和孤子结构\*

杨 征 马松华<sup>†</sup> 方建平

(浙江丽水学院数理学院, 丽水 323000)

(2010 年 10 月 14 日收到; 2010 年 11 月 30 日收到修改稿)

在符号计算软件 Maple 的帮助下, 利用改进的 Riccati 方程映射法得到了 (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程 (ZK) 的新显式精确解. 根据得到的解, 研究了 ZK 方程的特殊孤子结构.

**关键词:** 改进的 Riccati 方程映射法, Zakharov-Kuznetsov 方程, 精确解, 孤子结构

**PACS:** 05. 45. Yv, 03. 65. Ge, 03. 40. Kf

## 1. 引言

非线性理论已经在物理学的众多领域中得到了广泛应用, 如流体力学, 声学, 非线性光学, 凝聚态物理等. 物理学中的很多现象都可以用非线性发展方程来描述. 在研究非线性物理现象中, 寻找非线性发展方程的精确解起着非常重要的作用并引起了越来越多学者的关注. 许多求解非线性方程的新方法也被提出, 如双线性法, 齐次平衡法, 标准的 Painlevé 截断分析法, 波数合并法,  $(G'/G)$  展开法, 同伦分析法, 三角函数法和映射法<sup>[1-12]</sup> 等. 其中 Riccati 方程映射法是求解非线性发展方程最简便、有效的方法之一, 已被成功的应用于许多非线性物理模型中<sup>[13-19]</sup>.

## 2. (2 + 1) 维 ZK 方程的孤波解、周期波解和变量分离解

本文的工作是将改进的 Riccati 方程映射法运用到著名的 (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程

$$\frac{1}{3}u_{xxx} + \frac{2}{3}u_{xyy} + uu_x + u_t = 0, \quad (1)$$

求其孤立波解、周期解和变量分离解. 该方程被有效的应用于在非常强的外部磁场中的离子声波. 文

献[20]研究了方程(1)的非线性波的动力学和孤子解. 文献[21]利用拓展的非标准 Painlevé 方法得到了方程(1)的三种新的孤子解.

根据改进的 Riccati 方程映射法<sup>[15]</sup>, 可知 ZK 方程有如下形式的解:

$$u = f + g\phi(q) + h\phi^2(q) + G\sqrt{\sigma + \phi^2(q)} + H\phi(q)\sqrt{\sigma + \phi^2(q)}, \quad (2)$$

且  $q = ax + by + ct$ , 这里  $a, b, c$  为任意常数. 求得

$$f = -\frac{1}{3a}(5a^3\sigma + 10b^2a\sigma + 3c), \quad g = 0, \\ h = -4b^2 - 2a^2, \quad G = 0, \quad H = 4b^2 + 2a^2. \quad (3)$$

**情形 1** 设  $\sigma < 0$ , 可以得到 ZK 方程的孤波解

$$u_1 = -\frac{1}{3a} \left\{ \left[ \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct)) \right. \right. \\ \times \sqrt{-1 - \sigma \tanh(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2} \\ \left. \left. - \sigma \tanh(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2 \right] \right. \\ \left. \times (6a^3 + 12ab^2) - 5a^3 - 10ab^2 + 3c \right\}, \quad (4)$$

$$u_2 = -\frac{1}{3a} \left\{ \left[ \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct)) \right. \right. \\ \times \sqrt{-\sigma(-1 + \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2)} \\ \left. \left. - \sigma \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2 \right] (6a^3 + 12ab^2) \right. \\ \left. + 5a^3\sigma + 10ab^2\sigma + 3c \right\}. \quad (5)$$

**情形 2** 设  $\sigma > 0$ , 可以得到 ZK 方程的周期波解

$$u_3 = -\frac{1}{3a} \left\{ \left[ -\sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct)) \right. \right.$$

\* 浙江省自然科学基金(批准号: Y6100257, Y6090681), 浙江丽水学院自然科学基金(批准号: KY08003, KZ09005)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{\sigma(1 + \tan(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct))^2)} \\ & + \sigma \tan(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct))^2] (6a^3 + 12ab^2) \\ & + 5a^3\sigma + 10ab^2\sigma + 3c\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_4 = -\frac{1}{3a} \{ [\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct))$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{\sigma(1 + \cot(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct))^2)} \\ & + \sigma \cot(\sqrt{\sigma}(ax + by + ct))^2] (6a^3 + 12ab^2) \\ & + 5a^3\sigma + 10ab^2\sigma + 3c\}. \end{aligned} \quad (7)$$

情形3 设  $\sigma = 0$ , 可以得到 ZK 方程的变量分离解

$$u_5 = -\frac{4a^3 + ca^2x^2 + 8ab^2 + 2ac^2xt + 2acbx y + cb^2y + c^3t + 2c^2byt}{a(ax + by + ct)^2}. \quad (8)$$

### 3. (2 + 1) 维 ZK 方程的孤子结构

本文的这一部分,以孤立波解  $u_2(5)$  式为例,研究 ZK 方程的孤子结构及其演化. 为了图示清楚起见,设

$$\begin{aligned} U = u_2 & \\ & = -\frac{1}{3a} \{ [\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct)) \\ & \times \sqrt{-\sigma(-1 + \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2)} \\ & - \sigma \coth(\sqrt{-\sigma}(ax + by + ct))^2] (6a^3 + 12ab^2) \\ & + 5a^3\sigma + 10ab^2\sigma + 3c\}. \end{aligned} \quad (9)$$

#### 3.1. ZK 方程的孤子结构

在(9)式中,参数  $a, b, c, \sigma$  取不同的值,可以

得到不同的孤子解. 例如,当  $\sigma = -1$ , 选取  $a = -0.1, b = -0.1, c = -0.1$ , 时间  $t = 0$  时,可以得到一个暗孤子解,如图 1(a) 所示;选取  $a = 3, b = 3, c = 3$ , 时间  $t = -0.1$  时,可以得到如图 1(b) 所示的亮暗孤子解.

此外,如果选取参数  $a = 4, b = 4, \sigma = -1, t = 0.1$  保持不变,当分别取参数  $c = 1, c = 5, c = 10, c = 15, c = 20$  时,可以对应得到如图 2(a), (b), (c), (d), (e) 所示的孤子解. 从图 2 看到,当参数  $c$  逐渐增大时,暗孤子的波幅逐渐减小,亮孤子的波幅逐渐增大.

以下继续讨论当参数  $\sigma$  改变时孤子解变化. 在(9)式中,选取参数  $a = 10, b = 10, c = 10, t = 1$  不变,  $\sigma$  分别取  $-1, -2, -3, -4$  时,可以对应得到如图 3(a), (b), (c), (d) 所示的孤子解. 从图 3 可以看到,当参数  $\sigma$  取不同值时得到的解也不同.

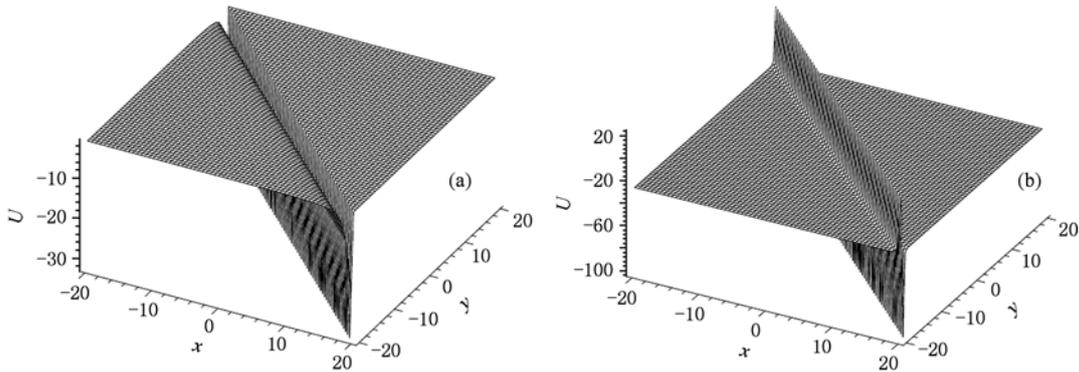


图1 (9)式中,当  $\sigma = -1$  参数  $a, b, c$  取不同值时得到的暗孤子解和亮暗孤子解

#### 3.2. 孤子的时间演化

上面讨论了参数  $a, b, c, \sigma$  取不同值时的孤子解. 接下来讨论当  $a, b, c, \sigma$  取一定值时孤子随时间的演化. 在(9)式中,如果取  $a = 5, b = 5, c = 10$ ,

$\sigma = -1$ , 时间分别取  $t = -10, t = -6, t = 0, t = 6, t = 10$ , 于是可以得到如图 4 所示的孤子随时间的演化情况. 从图中可以清楚看到,亮暗孤子随时间从右向左运动,在运动过程中,孤子的波幅、形状都没有发生变化,而且是做匀速运动.

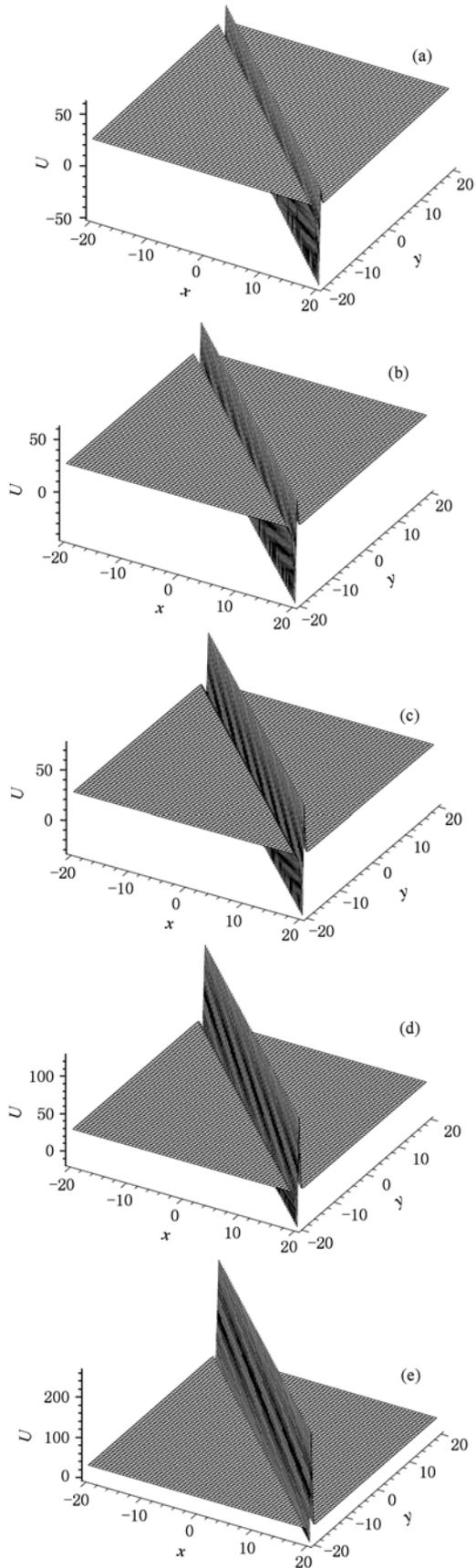


图2 (9)式中,参数  $a=4, b=4, \sigma=-1, t=0.1, c$  分别取 1, 5, 10, 15, 20 时的孤子解

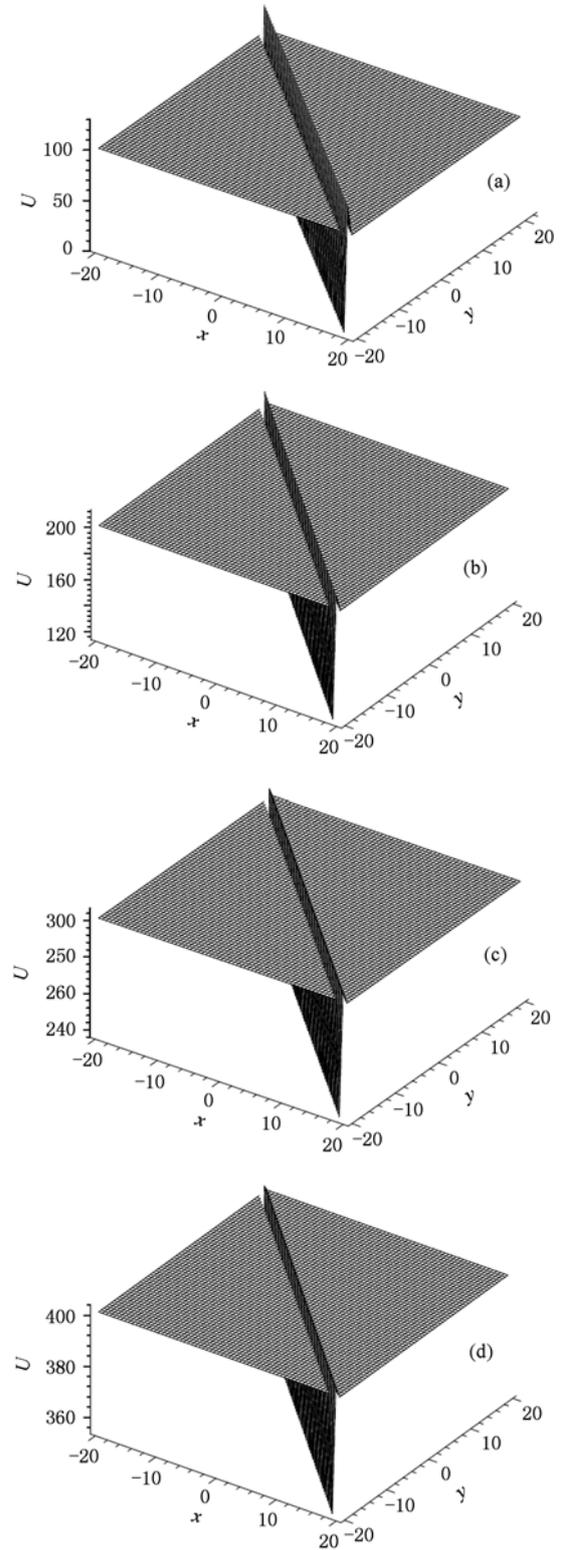


图3 (9)式中,参数  $a=10, b=10, c=10, t=1, \sigma$  分别取 -1, -2, -3, -4 时的孤子解

#### 4. 结 论

寻找非线性发展方程的新显式精确解是非线

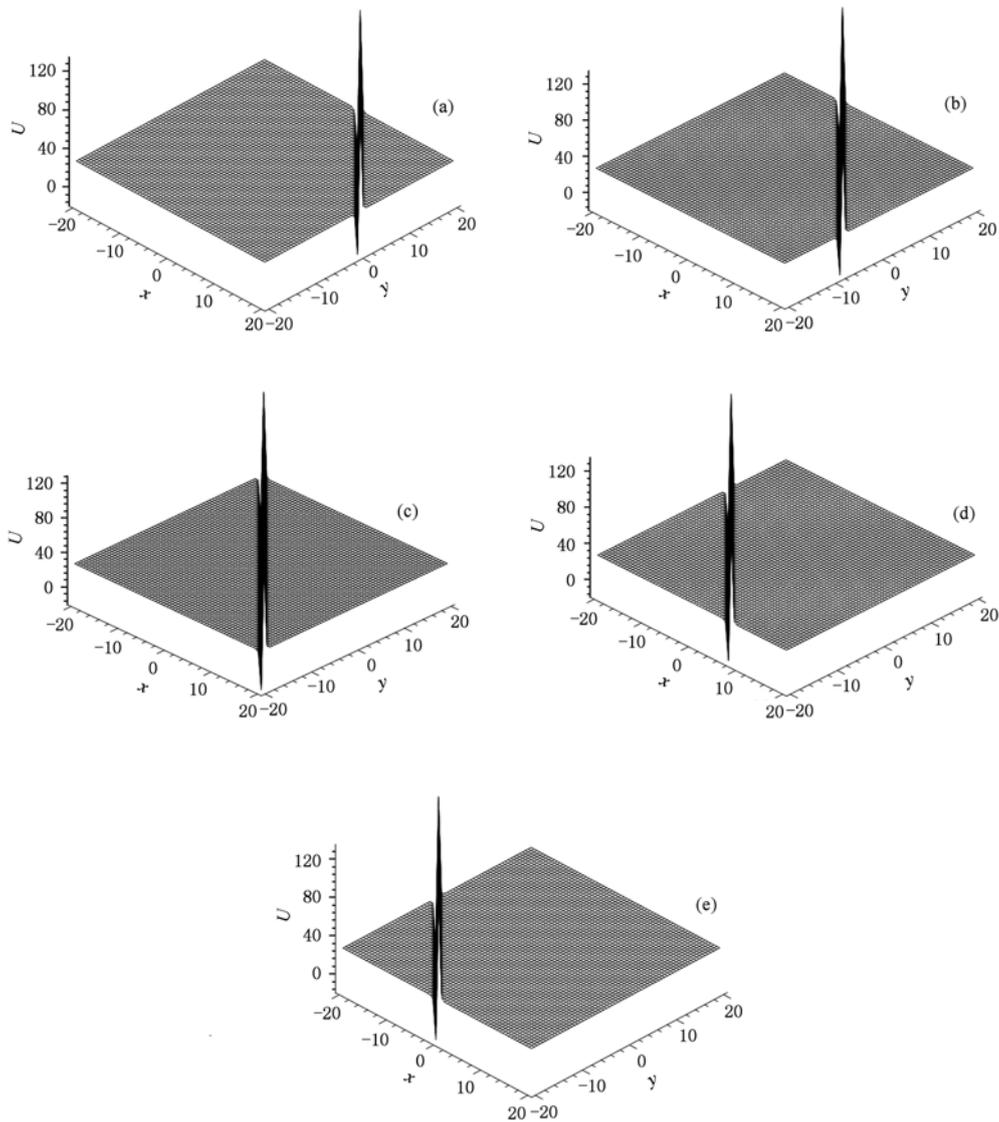


图4 (9)式中,取  $a=5, b=5, c=10, \sigma=-1$ , 时间分别取  $t=-10, t=-6, t=0, t=6, t=10$  时的孤子演化图

性科学的一个重要内容. (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程是一个非常重要的、有物理意义的非线性发展方程. 过去, 许多学者利用不同的方法求解了 (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程, 得到了不同的局域激发结构. 本文利用改进的 Riccati 方程映射法, 借助符号计算软件 Maple 系统, 得到了 (2 + 1) 维 Zakharov-Kuznetsov 方程的映射解 (包括孤波

解、周期波解和变量分离解). 根据所得到的孤波解  $u_2$ , 构造出了暗孤子解和亮暗孤子解. 研究了当参数  $c$  和  $\sigma$  取不同值时孤子图像的变化 (图 2, 图 3) 以及孤子随时间的演化 (图 4), 据我们所知, 这些工作不同于以往学者所做的工作. 探求求解非线性偏微分方程的新方法, 构造新的局域激发结构是非线性理论工作者长期研究的课题.

[1] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512  
 [2] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113  
 [3] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen. A* **28** 7227  
 [4] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123

[5] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]  
 [6] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473

- [7] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [8] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [9] Taogetusang, Sirendaerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [10] Taogetusang, Sirendaerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]
- [11] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰、李帮庆、孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [12] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰、徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
- [13] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [14] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **4** 670
- [15] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]
- [16] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [17] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [18] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 0611]
- [19] Wang J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2924 (in Chinese) [王静 2010 物理学报 **59** 2924]
- [20] Maccari A 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 1047
- [21] Hu H C 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 559

## Exact solutions and soliton structures of $(2 + 1)$ -dimensional Zakharov-Kuznetsov equation \*

Yang Zheng Ma Song-Hua<sup>†</sup> Fang Jian-Ping

(College of Mathematics and Physics, Zhejiang Lishui University, Lishui 323000, China)

(Received 14 October 2010; revised manuscript received 30 November 2010)

### Abstract

With the help of the symbolic computation system Maple and an improved Riccati equation mapping approach, a series of exact solutions of the  $(2 + 1)$ -dimensional Zakharov-Kuznetsov equation (ZK) is derived. Based on the derived solution, we obtain some special soliton structures.

**Keywords:** improved Riccati equation mapping approach, Zakharov-Kuznetsov equation, exact solutions, soliton structures

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6090681), the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University, China (Grant Nos. YK08003, ZK09005).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn