

## 应用于扫描探针显微镜的石英音叉机械模型研究\*

华宝成<sup>1)3)</sup> 钱建强<sup>2)3)†</sup> 王曦<sup>2)3)</sup> 姚骏恩<sup>2)3)</sup>

1) (北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191)

2) (北京航空航天大学应用物理系, 北京 100191)

3) (微纳测控与低维物理教育部重点实验室, 北京 100191)

(2010年9月15日收到; 2010年12月7日收到修改稿)

石英音叉作为力传感器广泛地应用于各种扫描探针显微镜, 主要涉及石英音叉的同相振动和反相振动两种振动模式. 通过实验方法和有限元仿真方法对石英音叉的两种振动模式进行研究, 发现石英音叉的双臂之间以及双臂与音叉的基部之间都存在耦合作用, 双臂之间的耦合使音叉的反相共振频率升高, 双臂与基部之间的耦合使音叉的同相共振频率降低. 针对两种振动模式的动态特性建立了石英音叉的机械模型并进行合理简化. 简化模型是一个四弹簧三质点系统, 计算了简化模型的参数. 通过一个音叉臂等效质量变化与音叉反相共振频率变化之间的定量关系证明了简化机械模型能够准确地反映石英音叉应用在扫描探针显微镜中的机械特性.

**关键词:** 扫描探针显微镜, 石英音叉, 振动模式, 机械模型

**PACS:** 07.79.-v, 68.37.-d, 68.37.Ps

## 1. 引言

石英音叉作为一种自激励自检测力传感器, 已逐渐广泛用于各种扫描探针显微镜 (SPM)<sup>[1-9]</sup>. 石英音叉作为力传感器相比传统的 SPM 微悬臂具有的突出优势是: 石英材料具有逆压电效应, 可以将交流电直接施加到石英音叉的两个电极来激励其振动, 能省去外加的激励装置; 石英材料具有压电效应, 音叉臂的形变可直接由流经音叉臂的电流值来表征, 不必使用传统激光检测方式中复杂的光路装置<sup>[2]</sup>; 石英音叉的品质因数比传统微悬臂高出约 2 个数量级, 具有更高的灵敏度; 石英音叉臂的弹性系数比传统微悬臂高出约 3 个数量级, 可以工作在更小的振幅而不会发生“突跳接触” (jump to contact) 现象, 既灵敏又稳定<sup>[10]</sup>. 由于上述优点, 石英音叉应用于 SPM 领域取得了突出的成果, 具有代表性的是在动态模式原子力显微镜中的应用已经获得原子分辨率图像<sup>[11-13]</sup>.

为了定量研究石英音叉作为力传感器的传递特性, 许多研究者对其进行了电学模型和机械模型的标定工作<sup>[10, 14, 15]</sup>. 石英音叉的机械特性决定了针

尖受到样品作用力后音叉双臂振动参数 (频率、幅度、相位延迟) 的变化, 对动态模式 SPM 反馈控制的优化设计以及实验结果的定量解释起着关键性作用. 早期针对石英音叉机械模型的研究并没有考虑双臂之间的耦合作用, 仍沿用传统直悬臂梁的单自由度弹簧质点模型<sup>[9, 16-19]</sup>. 虽然基于石英音叉的频率调制模式原子力显微镜得到了很好的实验结果, 但应用单自由度弹簧质点模型并不能利用实验结果来定量获得针尖样品间相互作用的力梯度. 后来的研究指出石英音叉的两臂之间存在耦合并提出了三弹簧两质点模型<sup>[20, 21]</sup>. Castellanos 通过实验测量发现石英音叉的两个基础振动模式 (同相模式和反相模式) 的共振频率之间有明显的差异, 证明了双臂之间存在耦合作用, 并由此计算出双臂之间的耦合弹性系数, 完善了三弹簧两质点模型<sup>[22]</sup>. 虽然此模型描述了双臂之间的耦合关系, 但仍面临两个难题: 第一, 为什么石英音叉的两个振动模式之间的品质因数相差很大; 第二, 为什么同相振动模式的共振频率要远远低于音叉单臂的理论共振频率.

为了全面、准确地描述 SPM 中石英音叉的机械特性, 本文从物理结构上将石英音叉划分为四个部分, 通过实验方法和有限元仿真方法研究了石英音

\* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2007AA12Z128) 和国家自然科学基金 (批准号: 11074019) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qianjq@buaa.edu.cn

叉各部分之间的耦合关系,建立了石英音叉的机械模型并进行了合理简化.该模型可为音叉双臂运动分析、SPM 图像定量解释以及反馈控制算法设计等提供依据.

## 2. 石英音叉结构耦合研究

### 2.1. 实验方法

实验中使用的石英音叉来自去掉金属外壳的晶振(北京凯擎东光电子有限公司, K-3 × 8 引线型晶振),图 1 为其结构示意图.为了研究方便将其划分为四个部分:两个音叉臂(从分叉处到音叉顶端)、音叉基部(从晶振的填充物到音叉分岔处)以及晶振的填充底座.填充底座与石英音叉相连,但不属于石英音叉.石英音叉在 SPM 的应用中,可以保留填充底座也可以将其去除.

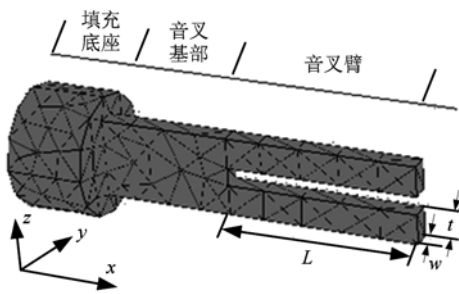


图 1 石英音叉结构示意图

为了研究石英音叉四部分之间的耦合关系,可利用光学方法观测不同固定方式下的石英音叉的共振模式及共振频率<sup>[22]</sup>.具体的实验方法如图 2 所示,压电陶瓷管一端固定,石英音叉以一定的方式固定在陶瓷管自由端.双通道函数发生器发出两路信号,一路为频率为  $f$  的正弦波,用于激励压电陶瓷管振动;另一路信号为脉冲波,频率为  $f + \Delta f$  ( $\Delta f$  在  $-5 \sim 5$  Hz 范围内且维持恒定,图 2 中  $\Delta f = -1$  Hz),占空比约为 10%,用于控制发光二极管(LED)的点亮,高电平时 LED 发光.将 LED 置于石英音叉的下方,单筒视频显微镜置于石英音叉的上方,观察音叉的振动情况并在液晶显示屏上显示.调节函数发生器发出的信号频率  $f$  (正弦波和脉冲波的频率同步变化),当  $f$  接近石英音叉的共振频率时就能在液晶屏上观察到石英音叉明显的振动,观察到的振动频率为  $\Delta f$ ,这种方式不仅能够确定石英音叉的共振频率还能直接观察到石英音叉的振动模式.

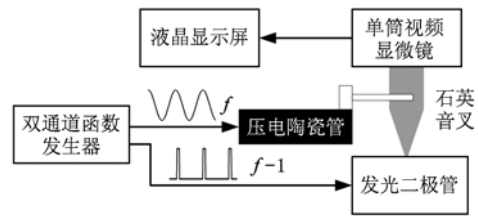


图 2 观测石英音叉振动模式及共振频率的实验原理图

实验中石英音叉有三种固定方式,如图 3 所示,分别是:固定填充底座圆柱面的一侧(图 3(a)),称为方式 A;去除填充底座固定音叉基部的端面(图 3(b)),称为方式 B;以及固定音叉填充物底座圆柱面的一部分以及一个音叉臂(图 3(c)),称为方式 C.实验需要测定的是方式 A、方式 B 的两个基础振动模式的共振频率和方式 C 的单臂共振频率.

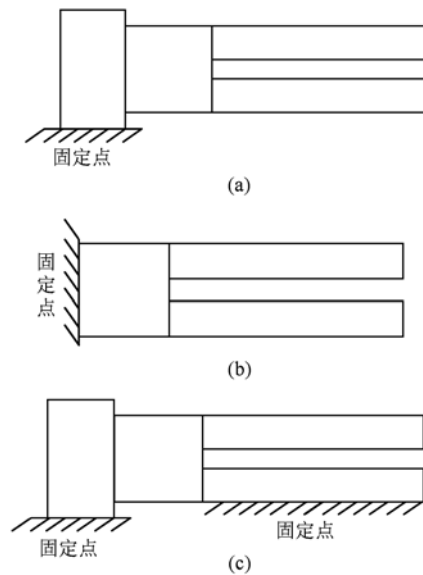


图 3 石英音叉的三种固定方式示意图

### 2.2. 有限元仿真方法

有限元仿真分析法已经成为分析石英音叉机械特性的重要手段.本文应用 COMSOL Multiphysics 软件分析上述实验中的五个共振频率.选用软件的 3D 空间维度的结构力学模块下特征频率分析功能,然后绘制石英音叉的机械结构实体并设置材料属性.实体图如图 1 所示,实体各部分尺寸及材料属性列于表 1.其中音叉臂、音叉基部和填充底座的几何尺寸通过直接测量得到;石英材料的密度、杨氏模量和泊松系数引自参考文献[10];填充基座的杨氏模量和密度数值是估计值.

表1 有限元仿真参数表

	音叉臂	音叉基部	填充基座
长度/mm	3.65	2.51	半径/mm
宽度/mm	0.59	1.54	0.12
厚度/mm	0.34	0.34	0.15
密度/ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2650	2650	2600
杨氏模量/ $10^{10} \text{ Pa}$	7.87	7.87	0.14
泊松系数	0.33	0.33	0.33

根据图3所示的石英音叉的三种固定方法来确定不同的约束条件,应用 COMSOL Multiphysics 软件提供的固有频率分析功能,分析得到与实验相对应

的五个共振频率. 仿真得到的方式 A 下同相振动模式、反相振动模式分别如图4(a),(b)所示.

### 2.3. 实验与仿真结果

实验和有限元仿真得到的共振频率结果列于表2.

表2 三种固定方式、五种共振频率的实验与仿真结果

固定方式	方式 A		方式 B		方式 C
	同相	反相	同相	反相	
振动模式					
实验结果/Hz	11400	32768	23224	32764	31850
仿真结果/Hz	11490	32772	23353	32709	31963

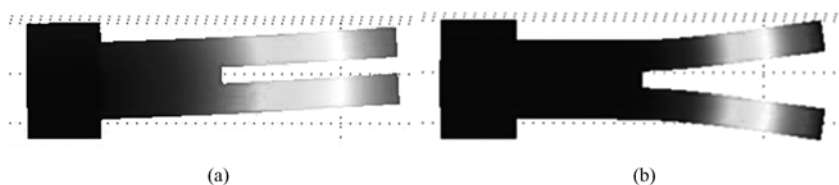


图4 (a)方式 A 下同相振动模式;(b)反相振动模式

由表2可知,有限元仿真结果与实验结果基本符合,误差在0.5%以下,证明了有限元仿真方法分析石英音叉共振频率的有效性,并且说明仿真中填充物基座的参数估计值符合实际情况.

## 3. 机械模型建模

### 3.1. 分析与建模

通过实验和仿真结果可以看到,在方式 A 与方式 B 两种情况下,石英音叉反相振动的共振频率非常接近. 这说明石英音叉本身具有很好的对称性,双臂反相振动过程中质心不发生变化,不会对外界(如填充基座)施加力作用;方式 A,方式 B 情况下反相振动模式的共振频率较明显的高于方式 C 情况下的共振频率,这说明一个音叉臂的振动或者静止会对另外一臂的运动产生影响,即两臂之间存在着耦合作用,双臂反相运动时耦合作用能够使共振频率高于单臂自由情况;方式 B 的同相共振频率明显低于方式 C 的共振频率,说明两臂与音叉基部之间存在有耦合作用,这个耦合作用使得双臂同相共振频率降低;所测量的共振频率中,方式 A 的同相共振频率最低,明显低于方式 B 同相共振频率,说明石英音叉双臂和基部作为一个整体与填充基座

之间存在耦合作用,这个耦合作用使整体同相共振频率降低.

由以上分析,可以将石英音叉建模为一个多弹簧质点间带有耦合的模型,如图5所示.

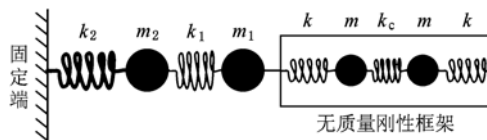


图5 石英音叉等效机械模型

图5中  $k, m$  分别表示石英音叉臂等效的弹簧常数和质量;  $k_c$  表示双臂间的耦合弹性系数;  $k_1, m_1$  分别表示音叉基部与音叉的双臂间发生耦合作用的等效弹性常数和等效质量;  $k_2, m_2$  分别表示填充基座与石英音叉整体间发生耦合作用的等效弹性常数和等效质量.

SPM 实际工作过程中,填充基座和音叉基部的形变量都非常小,且基本保持同相振动,可以将两者简化为一个弹簧质点环节,简化后的模型如图6所示,是一个四弹簧三质点系统. 其中  $k_c, m_c$  分别表示填充基座和音叉基部简化后的等效弹性常数和等效质量.

分别用  $x_1, x_2, x_3$  表示图6中三个质点的位移,则简化模型的动力学方程可表示为

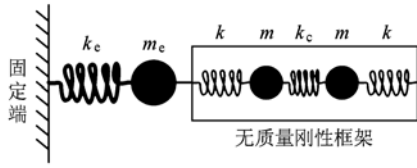


图6 简化后的等效机械模型

$$\begin{cases} m_e x_1'' + k_e x_1 - k(x_1 - x_3) + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m x_2'' + k(x_2 - x_1) + k_e(x_2 - x_3) = 0, \\ m x_3'' + k(x_3 - x_1) + k_e(x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

### 3.2. 参数计算

在简化模型中音叉臂的等效弹性系数  $k$  可由石英音叉的三维尺寸和石英材料的物理属性计算得到<sup>[10]</sup>,

$$k = 0.25Yw(t/L)^3, \quad (2)$$

其中  $Y$  是石英材料的杨氏模量,  $w, t$  及  $L$  分别是音叉臂的宽度、厚度以及长度, 如图 1 所示. 依据表 1 中的数据得到  $k = 2.83 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

依据简化模型, 方式 A 条件下音叉反相振动时两臂对称运动, 质心不发生移动, 音叉基部和填充底座无位移, 因此其共振频率由(3)式确定

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + 2k_e}{m}}. \quad (3)$$

同样的, 方式 C 下音叉基部及一臂被固定, 只有一个音叉臂会发生振动, 因此其共振频率可以表示为

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + k_e}{m}}. \quad (4)$$

将表 2 中的仿真结果  $f_1 = 32772 \text{ Hz}$  和  $f_2 = 31963 \text{ Hz}$  代入(3)式, (4)式, 得到  $k_e = 1.52 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $m = 7.38 \times 10^{-7} \text{ kg}$ .

针对方式 A 的双臂同相振动模式, 由于两臂之间没有相对位移, 可以将图 6 中的简化模型等效为图 7(a)所示的模型, 即两臂等效为一个弹簧振子系统, 其等效的弹性系数和等效质量为单臂的 2 倍. 在方式 A 的基础上去掉一个音叉臂, 相当于在图 6 所示的简化模型中去掉一组  $k, m$  弹簧质点组合, 且去掉了双臂之间的耦合弹性作用  $k_e$ , 对应的等效模型如图 7(b)所示. 通过有限元仿真的方法对该单臂音叉的情况进行仿真, 得到其振动模式如图 8 所示的共振频率.

依照图 7(b)中的模型建立系统的动力学方程

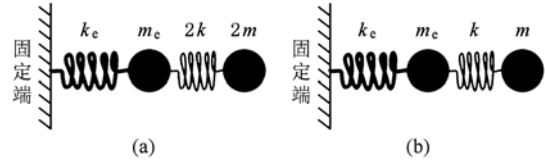


图7 双臂同相(a), 单臂音叉(b)共振的等效模型图

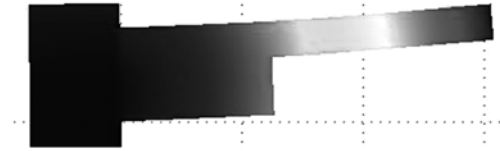


图8 去掉一臂的石英音叉的振动模式图

$$\begin{cases} m_e x_1'' + (k_e + k)x_1 - kx_2 = 0, \\ m x_2'' - kx_1 + kx_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

从(5)式可得到共振角频率的方程为

$$m_e m \omega^4 - (m_e k + m k_e + m k) \omega^2 + k_e k = 0, \quad (6)$$

其中  $\omega$  是系统共振的角频率. 类似的, 依照图 7(a)中的模型建立动力学方程并求解可以得到

$$m_e 2m \omega^4 - (m_e 2k + 2m k_e + 2m 2k) \omega^2 + k_e 2k = 0. \quad (7)$$

对于图 7(b)中情况, 仿真得到的共振频率为  $f_3 = 14680 \text{ Hz}$ , 对于图 7(a)中情况, 仿真得到的共振频率(见表 2)为  $f_4 = 11490 \text{ Hz}$ . 将  $f_3, f_4$  的值分别代入(6)式, (7)式, 得到  $k_e = 1.02 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $m_e = 2.53 \times 10^{-7} \text{ kg}$ .

### 4. 模型验证

在实际的 SPM 应用中, 石英音叉的一个臂上需要粘接一个用于探测样品表面的针尖, 这会增加该音叉臂的等效质量, 破坏两臂的平衡, 石英音叉各个振动模式的共振频率会发生改变. 其中反相共振频率的改变会影响到 SPM 系统的操作. 一个音叉臂的等效质量变化量与双臂反相振动模式共振频率变化之间的定量关系反映了石英音叉的机械特性. 这个定量关系可以通过有限元仿真方法得到. 在有限元分析软件中, 改变一个音叉臂的等效质量后可以得到与之相对应的反相共振频率. 多次改变一个音叉臂的等效质量得到对应的反相共振频率, 在图 9 中用空心圆圈表示.

应用建立的石英音叉的机械模型可以得到音叉单臂等效质量与反相共振频率之间的函数关系.

设  $m_i$  是发生变化的音叉臂的等效质量, 则(1)式改写为

$$\begin{cases} m_e x_1'' + k_e x_1 - k(x_1 - x_3) + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m x_2'' + k(x_2 - x_1) + k_c(x_2 - x_3) = 0, \\ m_i x_3'' + k(x_3 - x_1) + k_c(x_3 - x_2) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $m_e, k_e, m, k, k_c$  的值由 3.2 中分析得到. 同(5)式的方法求解(7)式, 即可得到反相共振频率  $f$  与音叉臂等效质量  $m_i$  之间的函数关系, 结果在图 9 中用实线表示.

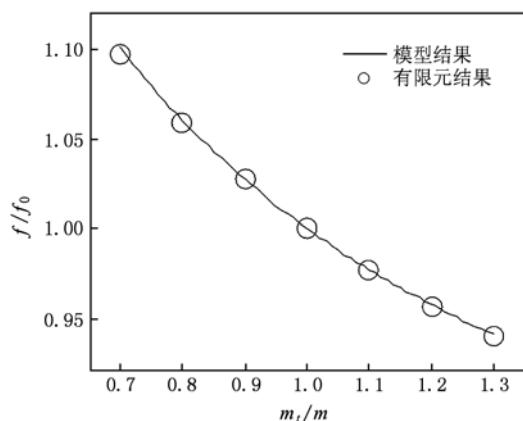


图 9 反相共振频率与一音叉臂的等效质量的函数关系

由图 9 可知, 两种方法得到的一个音叉臂等效质量改变量与反相共振频率变化量之间的定量关系一致, 说明本文建立的石英音叉的机械模型能够相当准确地反映石英音叉应用在 SPM 中的机械特性. 图 9 中的横纵坐标都进行了归一化处理,  $m$  是石英音叉臂的自然情况下的等效质量,  $f_0$  是方式 A 下反相共振频率,  $f_0 = 32772$  Hz.

在 SPM 中多采用交流电压方式激励音叉振动. 根据音叉臂上的电极分布, 逆压电效应产生幅度、频率相同, 相位相差  $180^\circ$  的力分别作用在两个音叉臂上, 可分别用  $F_d$  和  $-F_d$  表示. 粘接了针尖的音叉

臂还会受到来自样品的作用力, 可用  $F_{ts}$  表示. 则 SPM 工作过程中石英音叉的动力学方程可由下式表示:

$$\begin{cases} m_e x_1'' + k_e x_1 - k(x_1 - x_3) + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m x_2'' + k(x_2 - x_1) + k_c(x_2 - x_3) = -F_d, \\ m_i x_3'' + k(x_3 - x_1) + k_c(x_3 - x_2) = F_d + F_{ts}. \end{cases} \quad (9)$$

以动态模式原子力显微镜为例, 针尖样品间相互作用力  $F_{ts}$  有 JKR, MDT 等多种理论描述<sup>[23]</sup>. 通过(9)式不仅可以得到音叉两臂在 SPM 工作中的运动过程, 还可以计算针尖受力与音叉振动参数(振幅、频率以及相位)变化之间的定量关系.

## 5. 结 论

1. 双臂反相振动时, 音叉的质心位置不变, 双臂受到音叉基部的耦合作用极小, 所以双臂振动品质因数很高. 双臂同相振动时, 会受到音叉基部较大的耦合作用, 导致音叉振动品质因数大幅下降.

2. 音叉单臂的理论共振频率是指音叉臂作为单端刚性固定的悬梁的共振频率, 这个频率由音叉臂的几何尺寸决定. 音叉同相振动时由于耦合作用会带动音叉的填充基座以及音叉基部也有小幅振动, 音叉臂单端刚性固定的条件被破坏, 导致其共振频率大幅下降.

3. 通过实验研究和有限元仿真研究发现石英音叉不仅双臂之间存在耦合, 而且双臂与音叉的基部以及填充基座之间也存在耦合. 所建机械模型及其简化模型较全面、准确地描述 SPM 中石英音叉的机械特性.

4. 实验中发现石英音叉的固定端的刚性对实验测量 5 个共振频率有影响, 最大限度的提高固定端的刚性有助于减少外界对石英音叉机械特性的影响.

[1] Günther P, Fischer U C, Dransfeld K 1989 *Appl. Phys. B* **48** 89  
 [2] Edwards H, Taylor L, Duncan W, Melmed A J 1997 *J. Appl. Phys.* **82** 980  
 [3] Naitou Y, Ookubo N 2004 *Appl. Phys. Lett.* **85** 2131  
 [4] Kim K, Seo Y, Jang H, Chang S, Hong M H, Jhe W 2006 *Nanotechnology* **17** S201  
 [5] Labardi M, Allegrini M 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 174104  
 [6] Sandoz P, Friedt J M, Carry E 2008 *Rev. Sci. Instrum.* **79**

086102  
 [7] Naber A 1999 *J. Microsc.* **194** 307  
 [8] Seo Y, Jhe W, Hwang C S 2002 *Appl. Phys. Lett.* **80** 4324  
 [9] Karrai K, Grober R D 1995 *Appl. Phys. Lett.* **66** 1842  
 [10] Qin Y, Reifenger R 2007 *Rev. Sci. Instrum.* **78** 063704  
 [11] Giessibl F J 2000 *Appl. Phys. Lett.* **76** 1470  
 [12] Seo Y, Choe H, Jhe W 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 1860  
 [13] Giessibl F J, Reichling M 2005 *Nanotechnology* **16** S118

- [14] Liu J, Callegari A, Stark M, Chergui M 2008 *Ultramicroscopy* **109** 81
- [15] Ruiter A G T, Veerman J A, van der Werf K O, van Hulst N F 1997 *Appl. Phys. Lett.* **71** 28
- [16] Grober R D, Acimovic J, Schuck J, Hessman D, Kindlemann P J, Hespanha J, Morse A S, Karrai K, Tiemann I, Manus S 2000 *Rev. Sci. Instrum.* **71** 2776
- [17] Rensen W H J, van Hulst N F, Ruiter A G T, West P E 1999 *Appl. Phys. Lett.* **75** 1640
- [18] Seo Y, Cadden-Zimansky P, Chandrasekhar V 2005 *Appl. Phys. Lett.* **87** 103103
- [19] Wang X P, Liu L, Hu H L, Zhang K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1008 (in Chinese) [王晓平、刘磊、胡海龙、张琨 2004 物理学报 **53** 1008]
- [20] Rechen J 2001 *Ph. D. Dissertation* (Zurich: Swiss Federal Institute of Technology)
- [21] Simon G H, Heyde M, Rust H P 2007 *Nanotechnology* **18** 255503
- [22] Castellanos-Gomez A, Agrait N, Rubio-Bollinger G 2009 *Nanotechnology* **20** 215502
- [23] García R, Pérez R 2002 *Surf. Sci. Rep.* **47** 197

## Mechanical model of tuning forks used in scanning probe microscopes\*

Hua Bao-Cheng<sup>1)3)</sup> Qian Jian-Qiang<sup>2)3)†</sup> Wang Xi<sup>2)3)</sup> Yao Jun-En<sup>2)3)</sup>

1) (School of Instrumentation Science and Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

2) (Department of Applied Physics, Beihang University, Beijing 100191, China)

3) (Key Laboratory of Micro-nano Measurement-Manipulation and Physics, (Ministry of Education) Beihang University, Beijing 100191, China)

(Received 15 September 2010; revised manuscript received 7 December 2010)

### Abstract

Quartz tuning forks have been widely used as force sensors in scanning probe microscopes. The anti-phase and in-phase eigenmodes of a tuning fork are involved during microscope operations. Dynamic characteristics of both eigenmodes are studied by experiments and finite element analysis simulations. It is demonstrated that elastic couplings exist between not only both the prongs but also two prongs and the base of the tuning fork. Experimental results show that the coupling between both the prongs increases the anti-phase mode eigenfrequency while the coupling between two prongs and the base of the tuning fork decreases the in-phase mode eigenfrequency. A mechanical model of the tuning fork is introduced and simplified. Parameters of the simplified model are calculated, which is described as a four-springs-three-point-masses system. The quantitative relation between the effective mass of one prong and the eigenfrequency of the anti-phase mode of the mechanical model is in good agreement with that of finite element simulations.

**Keywords:** scanning probe microscope, quartz tuning fork, oscillation mode, mechanical model

**PACS:** 07.79.-v, 68.37.-d, 68.37.Ps

\* Project supported by the National High-Tech Research and Development Program of China (Grant No. 2007AA12Z128) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11074019).

† Corresponding author. E-mail: qianjq@buaa.edu.cn