

具有频率噪声的单模激光线性模型随机共振*

张良英^{1)†} 金国祥²⁾ 曹力³⁾

1) (襄樊学院物理与电子工程学院, 襄樊 441053)

2) (武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室, 武汉 430073)

3) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2010年5月24日收到; 2010年7月13日收到修改稿)

将频率有涨落的周期信号输入单模激光增益模型, 计算出输出光强的相关函数及功率谱, 对信噪比随噪声强度和系统参数的变化进行了研究. 结果表明: 信噪比随频率噪声强度的变化、抽运噪声强度的变化、量子噪声强度的变化均出现随机共振; 信噪比随增益系数和损失系数的变化也出现随机共振.

关键词: 频率噪声, 功率谱, 随机共振

PACS: 42.60.Mi, 05.40.-a

1. 引言

噪声有两面性, 我们通常看到的是其消极的一面, 噪声的建设性的、积极的一面, 很好地表现在随机共振上. 作为非线性问题的前沿课题之一, 随机共振的研究在理论和实验上都取得了较大进展^[1-19]. 在实际应用中, 输入的外部周期信号的频率和相位可能存在噪声, 例如, 用随机共振法检测微弱信号, 调频波的相位就有噪声^[20]. 随机共振应用到水声信号低频线谱的检测, 影响水声信号的频率漂移就是相位涨落^[21]. 还有一类是无周期驱动的有噪系统自身的周期性, 例如弹簧振子模型的动力学方程系数有噪声时, 方程解就存在相位噪声^[22]. 在通信中常采用抗干扰性好的调频信号, 其频率就会有涨落, 因此研究噪声调频信号的随机共振有着重要的现实意义. 但是, 对输入的外部周期信号频率存在涨落的随机共振却很少见到报道, 本文在单模激光增益模型的输入周期信号频率上加入白噪声, 计算出输出光强相关函数及功率谱, 发现信噪比随频率噪声强度的变化出现随机共振, 随抽运噪声强度和量子噪声强度的变化也出现随机共振. 还研究了信噪比随激光系统的增益系数和损失系数的变化, 结果均出现了随机共振.

2. 输入频率有涨落的周期信号的单模激光光强相关函数

单模激光增益模型^[23]输入周期信号后的光强方程为

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos(\Omega t), \quad (1)$$

噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(s) \rangle &= Q\delta(t-s), \\ \langle \eta(t)\eta(s) \rangle &= D\delta(t-s), \\ \langle \xi(s)\eta(t) \rangle &= \langle \xi(t)\eta(s) \rangle = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-s), \\ &(-1 \leq \lambda \leq 1). \end{aligned}$$

(1) 式中 I 为激光光强; λ 为噪声关联强度; Q, D 分别为抽运噪声和量子噪声强度; $\beta = \frac{\bar{A}}{\bar{I}}$, \bar{A} 和 \bar{I} 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数; A 为信号振幅; Ω 为信号频率.

如果(1)式中输入的周期信号的频率出现噪声, 瞬时角频率为

$$\omega = \frac{d\phi(t)}{dt} = \Omega + \zeta(t),$$

式中 $\phi(t)$ 为瞬时相位, $\zeta(t)$ 为高斯白噪声, 它的统

* 国家自然科学基金(批准号: 11045004), 湖北省教育厅科研基金重点项目(批准号: D20101506)资助的课题.

† E-mail: ly850@sohu.com

计性质为

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = D_0\delta(t-s).$$

由于瞬时角频率与瞬时相位之间互为微分和积分关系,即

$$\phi(t) = \int_0^t \omega dt = \Omega t + \int_0^t \zeta(s) ds,$$

因此周期信号频率存在噪声的表达式为

$$\cos[\Omega t + \int_0^t \zeta(s) ds],$$

当输入的周期信号频率出现涨落时单模激光增益模型的光强方程为

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) \\ & + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos\left(\Omega t + \int_0^t \zeta(s) ds\right), \end{aligned} \quad (2)$$

频率噪声 $\zeta(t)$ 和抽运噪声 $\xi(t)$ 及量子噪声 $\eta(t)$ 之间没有关联,即

$$\langle \zeta(t)\xi(s) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\eta(s) \rangle = 0.$$

将(2)式在确定论定态光强

$$I_0 = \frac{\Gamma - K}{\beta K}$$

附近线性化. 令

$$I = I_0 + \varepsilon(t),$$

代入(2)式可得线性化方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = & -\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) \\ & + A\cos\left(\Omega t + \int_0^t \zeta(s) ds\right), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\varepsilon(t)$ 为微扰项, $\gamma = \frac{2K(\Gamma - K)}{\Gamma}$.

设 $t=0$ 时 $\varepsilon(0) = 0$, (3) 式的形式解为

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & e^{-\gamma t} \int_0^t \left[D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(s') + 2\sqrt{I_0}\eta(s') \right. \\ & \left. + A\cos\left(\Omega s' + \int_0^{s'} \zeta(s) ds\right) \right] e^{\gamma s'} ds', \\ \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau) \rangle = & \left\langle e^{-\gamma t} \int_0^t \left[D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(s') + 2\sqrt{I_0}\eta(s') \right. \right. \\ & \left. \left. + A\cos\left(\Omega s' + \int_0^{s'} \zeta(s) ds\right) \right] e^{\gamma s'} ds' \right\} \\ & \times \left\{ e^{-\gamma(t+\tau)} \int_0^{t+\tau} \left[D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(s'') \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sqrt{I_0}\eta(s'') + A\cos\left(\Omega s'' + \int_0^{s''} \zeta(s) ds\right) \right] e^{\gamma s''} ds'' \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式的统计平均中含有以下平均:

$$\begin{aligned} & \left\langle \cos\left[\Omega s' + \int_0^{s'} \zeta(s) ds\right] \right\rangle \\ = & \frac{1}{2} \left\{ \left\langle e^{i\Omega s'} e^{i\int_0^{s'} \zeta(s) ds} \right\rangle + \left\langle e^{-i\Omega s'} e^{-i\int_0^{s'} \zeta(s) ds} \right\rangle \right\} \\ = & e^{-\frac{1}{2}D_0 s'} \cos\Omega s', \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} & \left\langle \cos\left[\Omega s' + \int_0^{s'} \zeta(s) ds\right] \cdot \cos\left[\Omega s'' + \int_0^{s''} \zeta(s) ds\right] \right\rangle \\ = & \frac{1}{2} \left\{ e^{-2D_0 s'} e^{-\frac{1}{2}D_0(s''-s')} \cos\Omega(s' + s'') \right. \\ & \left. + e^{-\frac{1}{2}D_0(s''-s')} \cos\Omega(s' - s'') \right\}, \end{aligned}$$

为得出上面两平均的最后结果,用到了以下公式^[24]:

$$\left\langle e^{a\int_0^t \zeta(s) ds} \right\rangle = e^{\frac{1}{2}a^2 D_0(t-t')},$$

$$\left\langle e^{a\int_0^t \zeta(s) ds} e^{a\int_0^{t+\tau} \zeta(s) ds} \right\rangle = e^{2a^2 D_0 t} e^{\frac{1}{2}a^2 D_0 \tau}.$$

在完成(4)式平均运算的基础上,根据平均光强相关函数的定义

$$C(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle I(\zeta + \tau)I(\zeta) \rangle d\zeta,$$

可得到平均光强相关函数为

$$\begin{aligned} C(\tau) = & \frac{A^2 e^{-\frac{1}{2}D_0\tau} \cos\Omega\tau}{2\sqrt{\left(\gamma + \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2} \sqrt{\left(\gamma - \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2}} \\ & + \left[\frac{2I_0^2 Q}{(1+\beta I_0)^2 \gamma} + \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)\gamma} + \frac{2I_0 D}{\gamma} \right] e^{-\gamma|\tau|}. \end{aligned} \quad (5)$$

当频率噪声为零,即 $D_0 = 0$ 时光强相关函数为

$$\begin{aligned} C(\tau) = & \frac{A^2 \cos\Omega\tau}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} + \left[\frac{2I_0^2 Q}{(1+\beta I_0)^2 \gamma} \right. \\ & \left. + \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)\gamma} + \frac{2I_0 D}{\gamma} \right] e^{-\gamma|\tau|}. \end{aligned}$$

上式是周期信号输入单模激光增益模型的光强相关函数,已在文献[4]研究过.

对(5)式的平均光强相关函数进行傅里叶变换,得到光强功率谱为

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (6)$$

这里, $S_1(\omega)$ 为输出信号功率谱, $S_2(\omega)$ 为输出噪声功率谱,具体表达式分别为

$$\begin{aligned} S_1(\omega) = & \frac{A^2}{2\sqrt{\left(\left(\gamma + \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)}} \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{2}D_0}{\left(\frac{1}{2}D_0\right)^2 + (\omega + \Omega)^2} + \frac{\frac{1}{2}D_0}{\left(\frac{1}{2}D_0\right)^2 + (\omega - \Omega)^2} \right],$$

$$S_2(\omega) = \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^3 \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0 D \right]$$

$$\times \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2)}.$$

我们只取正 ω 的谱表示输出信号功率谱

$$S_1(\omega) = \frac{A^2}{2\sqrt{\left(\left(\gamma + \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)}} \times \left[\frac{\frac{1}{2}D_0}{\left(\frac{1}{2}D_0\right)^2 + (\omega - \Omega)^2} \right], \quad (7)$$

输出信号总功率为

$$P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega = \frac{\pi A^2}{4\sqrt{\left(\left(\gamma + \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}D_0\right)^2 + \Omega^2\right)}}$$

输出噪声总功率为

$$\int_0^\infty S_2(\omega) d\omega = \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^3 \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0 D \right] \frac{\pi}{2\gamma},$$

将输出信噪比定义为输出信号总功率与输出噪声总功率之比

$$R = \frac{P_s}{\int_0^\infty S_2(\omega) d\omega}. \quad (8)$$

3. 输出光强的随机共振

3.1. 信噪比随频率噪声、抽运噪声和量子噪声强度的变化

图 1(a) 是以信号频率 Ω 为参数, 根据(8)式计算得到的 $R-D_0$ 曲线, 图中看到信噪比随频率噪声强度 D_0 的增大出现一个共振峰, 峰的高度随着信号频率 Ω 的增大而降低, 峰的位置向左移动。

图 1(b) 是以频率噪声强度 D_0 为参数, 根据(8)式计算得到的 $R-Q$ 曲线, 图中看到信噪比随抽运噪声强度 Q 的增大出现一个共振峰, 没有频率噪

声时峰的高度最低, 有频率噪声后峰高随着 D_0 的增大而升高, 达到最高后又降低, 峰的位置不变。

图 1(c) 是以频率噪声强度 D_0 为参数, 根据(8)式计算得到的 $R-D$ 曲线, 图中看到信噪比随量子噪声强度 D 的增大出现一个共振峰, 没有频率噪声时峰的高度最低, 有频率噪声后峰高随着 D_0 的增大而升高, 达到最高后又降低, 峰的位置不变。

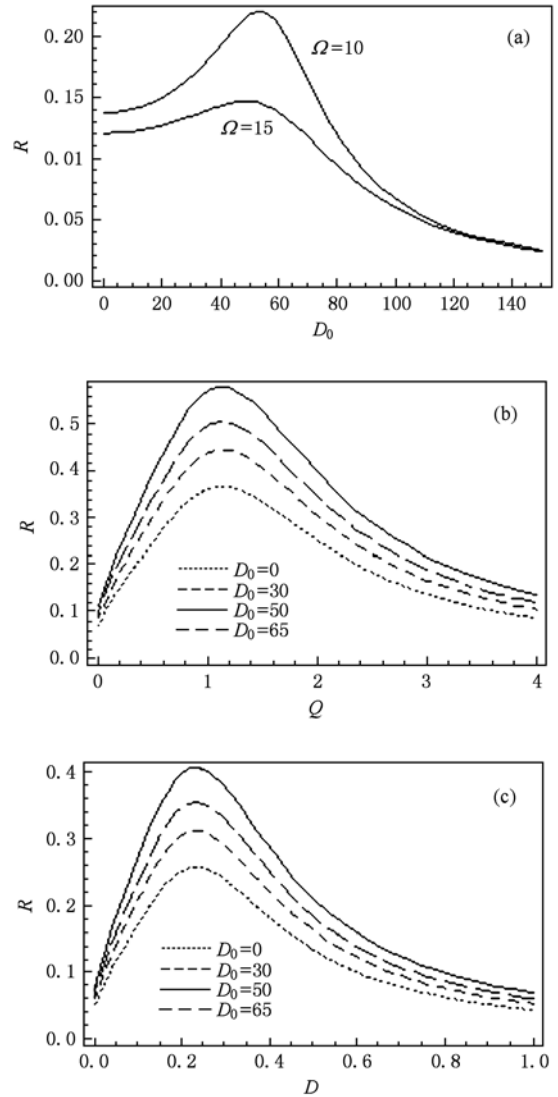


图 1 信噪比随噪声参数的变化 ($\bar{\lambda}=100, A=1, \lambda=-0.9, K=50, \Gamma=70$) (a) $Q=3, D=0.2$; (b) $D=0.2, \Omega=10$; (c) $Q=3, \Omega=10$

3.2. 信噪比随增益系数和损失系数的变化

图 2 是以频率噪声强度 D_0 为参数, 根据(8)式计算得到的 $R-\Gamma$ 曲线 (增益系数必须大于损失系数), 图中看到信噪比随增益系数 Γ 的增大出现一

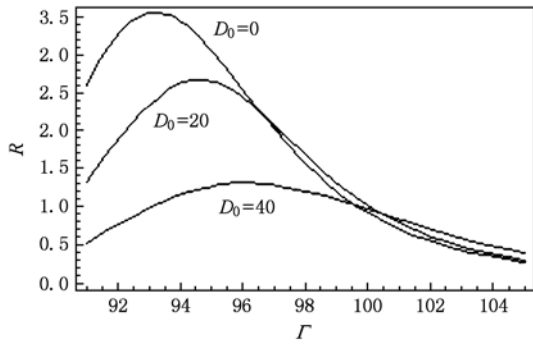


图2 信噪比随增益系数的变化 ($\bar{\lambda}=100, A=1, \lambda=-0.9, K=90, Q=3, D=0.2, \Omega=10$)

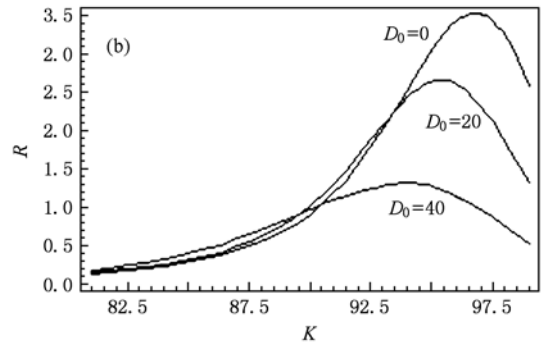
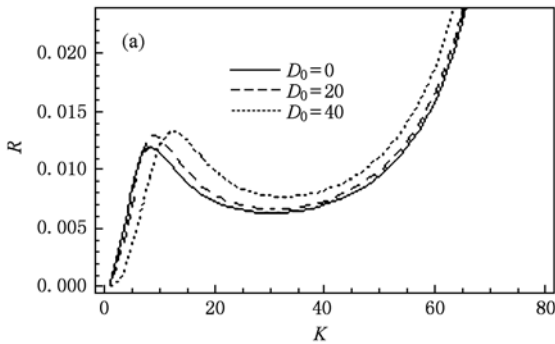


图3 信噪比随损失系数的变化 ($\bar{\lambda}=100, A=1, \lambda=-0.9, \Gamma=100, Q=3, D=0.2, \Omega=10$)

4. 结 论

1) 单模激光增益模型输入的周期信号的频率存在噪声时, 输出信噪比随频率噪声强度 D_0 的变化可出现随机共振.

2) 信噪比随抽运噪声强度 Q 和量子噪声强度 D 的变化也会出现随机共振, 有频率噪声时峰的高

个共振峰, 没有频率噪声时峰最高, 有频率噪声后峰高随着 D_0 的增大而降低, 峰的位置向右移动.

图3 是以频率噪声强度 D_0 为参数, 根据(8)式计算得到的 R - K 曲线, 图3(a)是损失系数 K 从0取到80的 R - K 曲线, 图中看到信噪比随 K 的增大出现一个小共振峰, 没有频率噪声时峰最低, 峰高随着 D_0 的增大而升高, 峰的位置向右移动. 图3(b)是损失系数 K 从81取到99的 R - K 曲线, 图中看到信噪比随 K 的增大出现一个大共振峰, 没有频率噪声时峰最高, 峰高随着 D_0 的增大而降低, 峰的位置向左移动.

度高于没有频率噪声时峰的高度.

3) 信噪比随激光参数的变化也出现了随机共振, 有频率噪声时信噪比随增益系数 Γ 的变化出现的峰高低于没有频率噪声时的峰高; 信噪比随损失系数 K 的变化出现两个共振峰, K 比较小时出现的小峰的峰高是没有频率噪声时最低, 有频率噪声后峰的高度升高, 而 K 比较大时出现的大峰的峰高却还是没有频率噪声时最高, 有频率噪声后峰高降低.

[1] Zhang L Y, Cao L, Wu D J, Wang J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25
 [2] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
 [3] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英、曹力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
 [4] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0952
 [5] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢勇 2003 物理学报 **52** 2712]
 [6] Li J H, Huang Z Q, Wang C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese) [李静辉、黄祖洽、王存玉 1998 物理学报 **47** 382]
 [7] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201

[8] Mcnamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [9] Barykin A V, Seki K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555
 [10] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
 [11] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
 [12] Zhou B C, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5623 (in Chinese) [周丙常、徐伟 2007 物理学报 **56** 5623]
 [13] Lin M, Huang Y M 2006 *Proc. of the CSEE.* **26** 128 (in Chinese) [林敏、黄咏梅 2006 中国电机工程学报 **26** 128]
 [14] Jin G X, Cao L, Zhang L Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3739 (in Chinese) [金国祥、曹力、张良英 2007 物理学报 **56** 3739]
 [15] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉、刘立、曹力 2010 物理学报 **59** 1494]

- [16] Chen D Y, Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3333 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2008 物理学报 **57** 3333]
- [17] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 102 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2009 物理学报 **58** 102]
- [18] Lin M, Meng Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3627 (in Chinese) [林敏、孟莹 2010 物理学报 **59** 3627]
- [19] Zhu G Q, Ding K, Zhang Y, Zhao Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3001 (in Chinese) [朱光起、丁珂、张宇、赵远 2010 物理学报 **59** 3001]
- [20] Zhang L B, Zhang L Y 2009 *Measurement & Control Technology* **28** 89 (in Chinese) [张良斌、张良英 2009 测控技术 **28** 89]
- [21] Zhang X B, Dong H Y, Xuan Z L 2008 *Applied Acoustics* **27** 283 (in Chinese) [张晓兵、董华玉、玄兆林 2008 应用声学 **27** 283]
- [22] Fulinski A, Gora P F 2000 *Journal of Statistical Physics* **101** 483
- [23] Hernandez-Garcia E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
- [24] Zang L Y, Cao L, Wu D J 2009 *Communications in Theoretical Physics* **52** 143

Stochastic resonance with frequency noise in a linear model of single-mode laser*

Zhang Liang-Ying^{1)†} Jin Guo-Xiang²⁾ Cao Li³⁾

1) (School of Physics and Electronic Engineering, Xiangfan University, Xiangfan 441053, China)

2) (Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China)

3) (School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 24 May 2010; revised manuscript received 13 July 2010)

Abstract

By adding a periodic signal of the fluctuating frequency to the gain-noise model of the single-mode lasers, we calculate the correlated function and power spectrum of the output laser intensity and discuss the variation of signal-to-noise ratio (SNR) with the intensity of the noise and system parameter. The result indicates that the SNR shows stochastic resonances with the variations of intensities of the frequency noise, pump noise and quantum noise, also with the variations of gain coefficient and loss coefficient.

Keywords: frequency noise, power spectrum, stochastic resonance

PACS: 42.60.Mi, 05.40.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11045004), Key project Scientific Research Foundation from the Education Department of Hubei Province of Chain (Grant No. D20101506).

† E-mail: ly850@sohu.com