

## 研究一维掺杂声子晶体缺陷模的解析方法\*

刘启能<sup>†</sup>

(重庆工商大学计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

(2010年5月1日收到; 2010年6月11日收到修改稿)

为了对一维掺杂声子晶体的缺陷模进行解析研究, 利用多波束干涉原理和布洛赫定理, 推导出一维掺杂声子晶体的缺陷模频率的解析公式. 利用它对一维掺杂声子晶体的缺陷模进行了解析研究, 得到了缺陷模频率的变化规律. 该方法克服了其他方法不能对缺陷模进行解析研究的不足, 是一种研究一维掺杂声子晶体的缺陷模的精确、有效方法.

**关键词:** 声子晶体, 声波, 缺陷模, 解析方法

**PACS:** 43.35.+d

## 1. 引言

声子晶体的概念是 Kushwsha 等人于 1993 年提出的. 所谓声子晶体就是其密度和弹性常数呈周期性变化的人造带隙材料. 声波在声子晶体中传播时会与声子晶体的周期结构发生相互作用, 从而产生带隙. 由于利用声子晶体的带隙可以十分方便地控制声波的传播, 因此声子晶体在现代科学技术上有着十分广泛的应用前景. 这使得对声子晶体的研究成为目前声学的前沿领域内一个活跃的问题. 目前对一维声子晶体禁带和缺陷模的研究已经取得了丰富成果<sup>[1-17]</sup>, 其主要使用的研究方法有三种: 集中质量法<sup>[4]</sup>、色散法<sup>[9]</sup>和转移矩阵法<sup>[8,10,11]</sup>. 这些方法有一个共同特点就是数值计算得出声子晶体禁带和缺陷模的图像, 通过对图像的分析得到禁带和缺陷模的特征, 并获得相关的禁带和缺陷模数据. 这一个共同特点也造成了它们存在一个共同的缺陷: 即不能给出禁带和缺陷模频率的解析表达式, 也就不便于对一维声子晶体的禁带和缺陷模的结构进行解析分析, 更不便于对禁带和缺陷模的特征做出充分的理论解释. 为了克服这一缺陷, 下面利用声波的干涉原理和无限周期排列的系统布洛赫定理, 推导出一维掺杂声子晶体缺陷模和禁带频率的解析表达式, 并对缺陷模和禁带产生的原因以

及特征作出物理解释和解析分析.

## 2. 模型与理论

一维掺杂声子晶体的两边是由声阻抗分别为  $z_1 = \rho_1 c_1$  和  $z_2 = \rho_2 c_2$  ( $\rho, c$  为介质密度和波速) 的两中介质交替构成, 其厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 中间插入一层声阻抗为  $z_3 = \rho_3 c_3$ , 厚度为  $d_3$  的第三种介质, 形成  $(z_1 z_2)^N z_3 (z_2 z_1)^N$  的结构,  $N$  为周期数. 该声子晶体置于声阻抗为  $z_0$  的介质中, 如图 1. 掺杂后声子晶体的整体周期性被破坏, 但仍具有中心对称性. 下面研究声波正入射的情况.

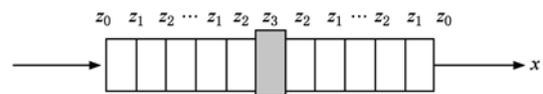


图 1 一维掺杂声子晶体的结构

## 2.1. 缺陷模产生的物理机理

当声波射入该一维掺杂声子晶体时, 就会在原来没有掺杂的一维声子晶体的禁带中间出现一些狭窄的透射峰带, 即缺陷模. 为什么中会产生缺陷模呢? 其产生的物理机理是: 一维掺杂声子晶体中的杂质层相当于一个法布里-珀罗干涉仪<sup>[15]</sup>, 声波在杂质层中多次反射而透射后会产生多波束干涉,

\* 重庆市教委科技项目基金 (批准号: KJ080720) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: liuqineng@yahoo.com.cn

相邻两束透射波的路程差为  $\Delta = 2d_3$ , 当相邻两束透射波的路程差为介质 3 中的波长  $\lambda_3$  的整数倍时, 即<sup>[18]</sup>

$$2d_3 = n\lambda_3, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

声波就会在透射波中产生干涉极大, 即产生缺陷模. 这种现象又可以称为声波的隧穿, 这就是产生缺陷模的物理机理. 根据波长与频率(用  $f$  表示)的关系  $c_3 = \lambda_3 f$ , 则缺陷模的频率  $f$  满足

$$f_n = n(c_3/2d_3), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

将(2)式中的  $n$  称为缺陷模的级数,  $n = 1$  对应一级缺陷模, 其频率为  $f_1$ ,  $n = 2$  对应二级缺陷模, 其频率为  $f_2$ , …….(2)式就是缺陷模的频率满足的解析表达式.

### 2.2. 禁带产生的物理机理

声波在一维声子晶体产生禁带原因是: 无限周期排列的系统中传播的声波遵从布洛赫定理. 声波  $U_x$  通过一维声子晶体的一个周期单元后变为  $U_{x+d}$  满足

$$U_x = mU_{x+d} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} U_{x+d}, \quad (3)$$

其中  $d = d_1 + d_2$ ,  $m$  为一个周期单元的转移矩阵<sup>[9]</sup>

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ik_1 d_1} & 0 \\ 0 & e^{ik_1 d_1} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2}{z_1} & \frac{z_1 - z_2}{z_1} \\ \frac{z_1 - z_2}{z_1} & \frac{z_1 + z_2}{z_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-ik_2 d_2} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d_2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{z_2 + z_1}{z_2} & \frac{z_2 - z_1}{z_2} \\ \frac{z_2 - z_1}{z_2} & \frac{z_2 + z_1}{z_2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中波矢  $k_1 = 2\pi f/c_1$ ,  $k_2 = 2\pi f/c_2$ . 又根据在无限周期排列的系统中布洛赫定理成立

$$U_x = e^{-iKd} U_{x+d}, \quad (5)$$

$K$  为布洛赫波矢, 由(3)和(5)式可得

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} U_{x+d} = e^{-iKd} U_{x+d}, \quad (6)$$

由(6)式可知  $e^{-iKd}$  是  $m$  的本征值, 由(6)式可解出声波在一维声子晶体的色散关系为

$$\cos(Kd) = (m_{11} + m_{22})/2, \quad (7)$$

由(7)和(4)式推导出声波正入射时的色散公式为

$$\begin{aligned} & (m_{11} + m_{22})/2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(z_1 - z_2)(z_2 - z_1)}{2z_1 z_2} \cos(k_1 d_1 - k_2 d_2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2z_1 z_2} \cos(k_1 d_2 + k_2 d_2) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

当(8)式的绝对值  $|\cos(Kd)| \leq 1$  时,  $K$  为实数, 布洛赫波为非衰减波, 对应声波的导带. 当  $|\cos(Kd)| > 1$  时,  $K$  为复数, 布洛赫波为衰减波, 对应声波的禁带. 取在声子晶体研究中常取的关系  $k_1 d_1 = k_2 d_2$  即  $d_1/c_1 = d_2/c_2$ . 由(8)式可解出禁带频率  $f_j$  满足的关系

$$\begin{aligned} & \frac{c_1}{2\pi d_1} \left[ (j-1)\pi + \arcsin \frac{2\sqrt{z_1 z_2}}{z_1 + z_2} \right] < f_j \\ & < \frac{c_1}{2\pi d_1} \left[ j\pi - \arcsin \frac{2\sqrt{z_1 z_2}}{z_1 + z_2} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (9) \end{aligned}$$

将(9)式中的  $j$  称为禁带的级数,  $j = 1$  对应一级禁带,  $j = 2$  对应二级禁带, …….(2)式中的  $n$  和(9)式中的  $j$  是独立变化的. (9)式就是禁带的频率满足的解析表达式.

### 3. 缺陷模的解析分析

由(2)式解出各级缺陷模的频率分别为

$$\begin{aligned} f_1 &= (c_3/2d_3), \quad f_2 = 2(c_3/2d_3), \\ f_3 &= 3(c_3/2d_3), \dots \end{aligned}$$

可见各级缺陷模的频率是分离的, 并且与一级缺陷模的频率成整数倍关系. 各级缺陷模的频率都由杂质厚度  $d_3$  和杂质中的波速  $c_3$  两个因素决定. 下面分别研究杂质厚度  $d_3$  和杂质中的波速  $c_3$  对缺陷模频率的影响. 介质 1, 2, 3 分别为有机玻璃、水和环氧树脂,  $\rho_1 = 1180(\text{kg/m}^3)$ ,  $\rho_2 = 1000(\text{kg/m}^3)$ ,  $\rho_3 = 1300(\text{kg/m}^3)$ ,  $c_1 = 2670(\text{m/s})$ ,  $c_2 = 1500(\text{m/s})$ ,  $c_3 = 2800(\text{m/s})$ , 取  $d_1 = c_1/(4f_0)$ ,  $d_2 = c_2/(4f_0)$ ,  $f_0$  为中心频率, 取  $f_0 = 10000 \text{ Hz}$ .

#### 3.1. 缺陷模随杂质厚度的变化

由(2)式可知, 当杂质一定 ( $c_3$  一定) 时各级缺陷模的频率与杂质厚度  $d_3$  成反比, 固定  $c_3 = 2800 \text{ m/s}$ , 由(2)式绘出 1, 2, 3, 4, 5 级缺陷模的频率随杂质厚度的响应曲线, 如图 2, 图 2 中黑线表示缺陷模. 为了与转移矩阵法进行比较, 由转移矩阵法计算出各级缺陷模的频率随杂质厚度的响应曲线, 如图 3, 图 3 中白点线表示缺陷模. 比较图 2 和图 3 可

以看出解析方法和转移矩阵法的结果是一致的。

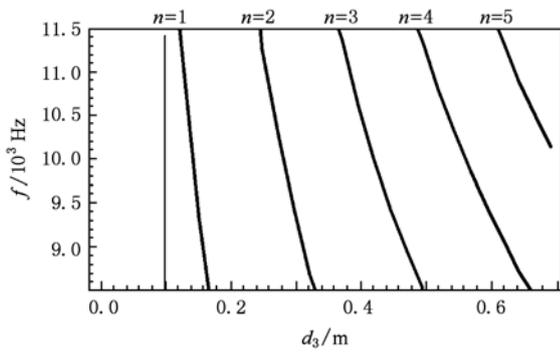


图2 缺陷模随杂质厚度的响应曲线(解析法)

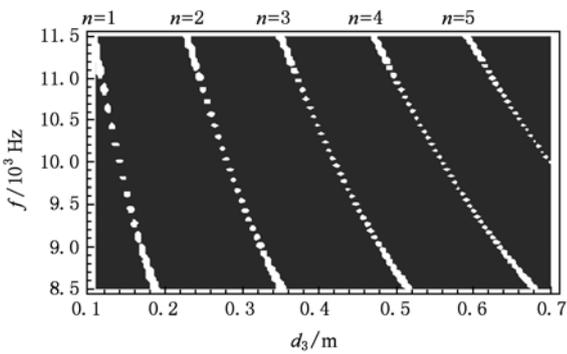


图3 缺陷模随杂质厚度的响应曲线(转移矩阵法)

由于缺陷模只有出现在禁带中才有意义,并且一级禁带中的缺陷模是最令人关注的.可以进一步研究在一级禁带中出现缺陷模  $d_3$  的取值范围.由(2)和(9)式解出在一级禁带中出现一级缺陷模时  $d_3$  的取值范围

$$\frac{\pi d_1 c_3}{c_1 \{ \pi - \arcsin[2 \sqrt{z_1 z_2} / (z_1 + z_2)] \}} < d_3 < \frac{\pi d_1 c_3}{c_1 \arcsin[2 \sqrt{z_1 z_2} / (z_1 + z_2)]}, \quad (10)$$

代入具体数据得  $d_3$  的取值范围数值为

$$0.1137m < d_3 < 0.1821m.$$

为了与转移矩阵法进行比较,由转移矩阵法计算出一级禁带中缺陷模随杂质厚度的响应曲线,如图4.图4中两条竖直灰线间的范围就是一级禁带中出现缺陷模时  $d_3$  的取值范围.由图4可以看出,转移矩阵法计算的结果也和解析法得到的结果符合.

### 3.2. 缺陷模随杂质波速的变化

由(2)式可知,当杂质厚度  $d_3$  一定时各级缺陷

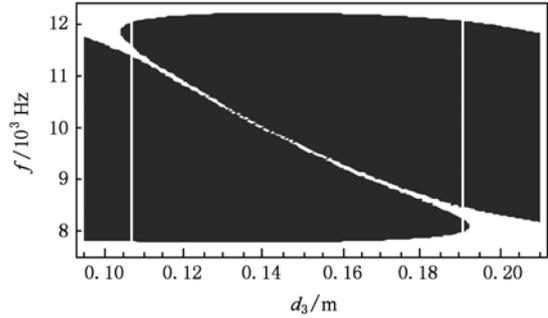


图4 一级缺陷模随杂质厚度的响应曲线(转移矩阵法)

模的频率与杂质的波速  $c_3$  成正比.固定  $d_3 = 0.15m$ ,由(2)式绘出1,2,3,4,5级缺陷模的频率随杂质波速的响应曲线,如图5.为了与转移矩阵法进行比较,由转移矩阵法计算出各级缺陷模的频率随杂质波速的响应曲线,如图6.比较图5和图6可以看出,转移矩阵法计算的结果也和解析法得到的结果符合.

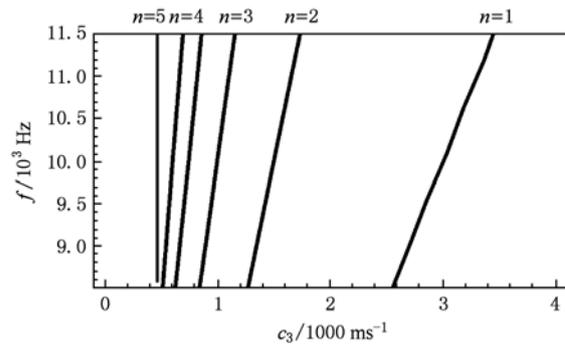


图5 缺陷模随杂质波速的响应曲线(解析法)

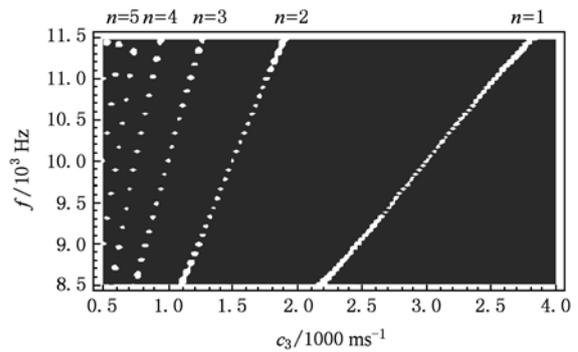


图6 缺陷模随杂质波速的响应曲线(转移矩阵法)

上面用一维掺杂声子晶体的缺陷模和禁带的解析公式研究了缺陷模的频率随杂质厚度和杂质波速的变化规律,并与转移矩阵法的结果进行了比较,其两种方法得出的结果十分符合.这不仅说明

了本文建立的一维掺杂声子晶体缺陷模的解析公式是正确的,而且也说明了一维掺杂声子晶体中缺陷模和禁带产生的物理机理是多波束干涉和布洛赫效应.比较两种方法还可以看出:转移矩阵法不能对为什么在一维掺杂声子晶体中会出现无限多条分离缺陷模带?为什么缺陷模频率随杂质厚度成反比变化?缺陷模频率随杂质波速成正比变化?等等问题做出圆满地解释.而解析法能对这些问题做出了物理意义清晰的、定量的解释.

应该指出上述解析方法和转移矩阵法的计算结果并非完全一致,仔细比较图2和图3,图5和图6就会发现它们存在细微的差别.产生这些差别的主要原因是:上述解析法是建立在一维掺杂声子晶体两边的周期为无限大的基础上,而转移矩阵法则是计算有限个周期.

另外上述解析方法与转移矩阵法比较也有它的不足之处,其主要不足是解析方法不能反映透射率(和反射率)的大小.因此,今后在研究一维声子

晶体的特性时应将解析法和转移矩阵法结合起来就会得到更全面的结果.

#### 4. 结 论

前面利用多波束干涉原理和无限周期排列系统的布洛赫定理,推导出一维掺杂声子晶体中各级缺陷模频率随杂质厚度和波速变化的解析公式以及禁带频率变化范围的解析公式.利用这些解析公式研究了一维掺杂声子晶体缺陷模的特征,得出了各级缺陷模频率随杂质厚和波速的变化规律,并与转移矩阵法的计算结果进行了比较.尽管两种方法得到的结果相同,但解析法还能对一维掺杂声子晶体中声波产生禁带和缺陷模产生的物理根源、缺陷模频率与杂质厚和波速间的定量关系出物理意义清晰的解释.这是其他方法所不能做到的,因此解析法是一种研究一维掺杂声子晶体缺陷模的更深刻、更精确的方法.

- [1] Jesen J S 2003 *Journal of Sound and Vibration* **266** 1053
- [2] Wang G, Yu D L, Wen J H 2004 *Phys. Lett. A* **327** 512
- [3] Cao Y J, Dong C H, Zhou P Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6470 (in Chinese) [曹永军、董纯红、周培勤 2006 物理学报 **55** 6470]
- [4] Wen J H, Wang G, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) [温激鸿、王刚、刘耀宗 2004 物理学报 **53** 3384]
- [5] Wang W G, Liu Z Y, Zhao D G 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4744 (in Chinese) [王文刚、刘正猷、赵德刚 2006 物理学报 **55** 4744]
- [6] Cao Y J, Yang X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2620 (in Chinese) [曹永军、杨旭 2008 物理学报 **57** 2620]
- [7] Yu D L, Liu Y Z, Wang G 2006 *Journal of Vibration and Shock* **25** 104 (in Chinese) [郁殿龙、刘耀宗、王刚 2006 振动与冲击 **25** 104]
- [8] Liu Q N 2008 *Journal of synthetic crystals* **37** 179 (in Chinese) [刘启能 2008 人工晶体学报 **37** 179]
- [9] Liu Q N 2009 *Journal of synthetic crystals* **38** 107 (in Chinese) [刘启能 2009 人工晶体学报 **38** 107]
- [10] Liu Q N 2009 *Chinese Journal of Applied Mechanics* **26** 397 (in Chinese) [刘启能 2009 应用力学学报 **26** 397]
- [11] Liu Q N 2010 *Chinese Journal of Computational Mechanics* **27** 151 (in Chinese) [刘启能 2010 计算力学学报 **27** 151]
- [12] Cao Y J, Yang X, Jiang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7735 (in Chinese) [曹永军、杨旭、姜自磊 2009 物理学报 **58** 7735]
- [13] Chen S B, Han X Y, Yu D L, Wen J H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 387 (in Chinese) [陈圣兵、韩小云、郁殿龙、温激鸿 2010 物理学报 **59** 387]
- [14] Liu Q N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2551 (in Chinese) [刘启能 2010 物理学报 **59** 2551]
- [15] Liu Q N 2007 *Chinese Journal of Lasers* **34** 777 (in Chinese) [刘启能 2007 中国激光 **2007** **34** 777]
- [16] Gao G Q, Ma S L, Jin F, Kim T B, Lu T J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 395 (in Chinese) [高国钦、马守林、金峰、金东范、卢天健 2010 物理学报 **59** 395]
- [17] Li X C, Gao J L, Liu S E, Zhou K C, Huang B Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 381 (in Chinese) [李晓春、高俊丽、刘绍娥、周科朝、黄伯云 2010 物理学报 **59** 381]
- [18] Max Bon, Emil Wolf *Principles of Optics*. Beijing Publishing House of Electronic Industry 2005, p299—301

# Analytic method of studying defect mode of 1D doped phononic crystal \*

Liu Qi-Neng †

(Calculator Science College of Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

(Received 1 May 2010; revised manuscript received 11 June 2010)

## Abstract

For the analytic study of the defect mode of 1D doped phononic crystal, the multiple – beam interference method and Bloch theorem are adopted, the analytical formula of defect mode is derived and the defect mode of 1D doped phononic crystal is studied. The variation law of defect mode is obtained. The method is freed from the weaknesses of other methods that cannot carry on the analysis of defect mode. The method is valid and accurate method of studying the defect mode of 1D doped phononic crystal.

**Keywords:** phononic crystal, acoustic waves, defect mode, analytic method

**PACS:** 43.35.+d

---

\* Project supported by the Research Foundation from Ministry of Education of Chongqing, China(Grant No. KJ080720).

† E-mail: liuqineng@yahoo.com.cn