

非惯性系下考虑剪切变形的柔性梁的动力学建模*

和兴锁[†] 宋明 邓峰岩

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2010年5月30日收到; 2010年7月15日收到修改稿)

研究非惯性坐标系下考虑剪切变形的柔性梁的动力学建模. 首先借鉴 Euler-Bernoulli 梁的几何非线性变形模式, 考虑了 Timoshenko 梁弯曲以及剪切变形产生的几何非线性效应对纵向、横向变形位移的影响, 在考虑两个方向的变形耦合项后, 利用有限元法对柔性梁进行了离散, 采用 Lagrange 方程建立了柔性梁的动力学模型, 首次建立了包含变形二次耦合量的 Timoshenko 梁的动力学方程.

关键词: 非惯性坐标系, 剪切变形, 柔性梁, 动力学建模

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

1. 引言

文献[1—4]讨论的 Euler-Bernoulli 梁的刚-柔耦合动力学问题, 是一种在变形中不考虑剪切效果的细长梁模型. 对于一些相对短粗的梁结构, 需要考虑剪切作用对变形的影响, 即 Timoshenko 梁. 有许多研究者针对不同的边界条件, 利用 Ritz 法、Galerkin 法以及有限元法等对 Timoshenko 梁进行了研究^[4—6].

本文在前人研究的基础上, 针对具有大范围运动的旋转 Timoshenko 梁, 如涡轮发动机叶片、螺旋桨叶片展开了广泛研究. 不同于柔性机械臂、卫星天线等具有大范围运动的细长梁, 这类旋转结构的变形运动需要考虑剪切效应, 以进行有效的动力学分析^[7,8]. 这类梁具有较大的高长比, 以获得较大的惯性矩, 而不至使横截面积有较大增加. 虽然这类梁的柔性不如 Euler-Bernoulli 梁显著, 但由于其应用在涡轮发动机、螺旋桨叶片等转动部件中, 转速很高, 并考虑离心惯性力、剪切效应以及转动惯量的作用, 使得这类梁也具有一定的柔性, 并可能受到冲击载荷的作用, 因而其在旋转状态下的振动分析也受到了广泛注意^[9,10]. 但以往研究在考虑柔性梁的变形模式时, 或者采用线性变形假设, 未考虑纵向变形位移中横向变形的耦合作用, 或者未考虑

纵向、横向变形的相互耦合作用, 此外惯性效应的考虑也有所欠缺.

2. 考虑剪切变形的柔性梁变形描述

考虑剪切变形的柔性梁即 Timoshenko 梁, 作大范围的平面运动如图 1 所示.

图中 e^0 为惯性坐标系, e^1 为连体坐标系, 中线上任一点 p_0 变形后为 p , a_0 为与 p_0 在同一横截面上的非中线点, u_{a_0} 为 a_0 在连体坐标系下的向量, 变形后到点 a , u_a 为其变形位移向量. u, v 为该点在连体坐标系下的变形位移, s_0, v_0 为点 p 的轴向实际伸长量、横向变形量. γ 表示由剪切引起的转角, 则梁截面转角 $\alpha = \partial v_0 / \partial x + \gamma$. 根据文献[4]的变形描述, 对于横向变形位移, 若不考虑剪切变形, 梁截面转角为 $\partial v_0 / \partial x$, 截面上任一点 a 变形后在连体坐标系 e^1 下的横坐标为

$$v_0 + y \cdot \cos(\partial v_0 / \partial x) = v_0 + y \left(1 - \frac{1}{2} (\partial v_0 / \partial x)^2 \right), \quad (1)$$

考虑剪切变形后, 梁截面转角为 α , 截面上任一点 a 变形后在连体坐标系 e^1 下的横坐标为

$$y \cdot \cos \alpha = y \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right). \quad (2)$$

同样纵向变形位移中计及剪切变形的影响. 考虑了剪切变形的影响后, 用包含剪切变形的转角 α

* 国家自然科学基金(批准号:10672133)资助的课题.

[†] E-mail: xingsuoh@nwpu.edu.cn

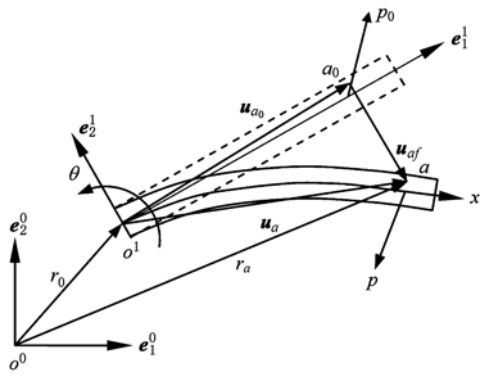


图1 作大范围平面运动的 Timoshenko 梁及其剪切变形描述
取代了 Euler-Bernoulli 梁模型中的 $\partial v_0 / \partial x$. 得到截面上任一点 a 变形位移向量在连体坐标系 e^1 下的坐标列阵为

$$\mathbf{u}_{af} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 + \left(\frac{\partial s_0}{\partial x} \alpha - \underline{\underline{\alpha}} \right) y - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 dx \\ v_0 - \frac{1}{2} y \alpha^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

同时,由于考虑了截面转角与纵向伸缩变形以及其相互耦合作用,在纵向与横向变形中增加了二次耦合项,即式中的双下划线项. 下文中划线项意义相同,由位移与应变的关系得

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (4)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5)$$

将(3)式代入(4),(5)式,略去变形位移偏导数的二次以上项,得

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial s_0}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} y, \quad (6)$$

$$\nu_{xy} = -\gamma. \quad (7)$$

3. 非惯性系下考虑剪切变形的柔性梁的动力学建模

柔性梁上任意一点 a 的矢径在惯性坐标系下可表示为

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{af}), \quad (8)$$

式中, \mathbf{A} 为连体坐标系相对于惯性坐标系的旋转矩阵,对(8)式求一次导数,得到任一点 a 在惯性坐标系下的速度为

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} (\mathbf{u}_{a0} + \mathbf{u}_{af}) \dot{\theta} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}}_{af}, \quad (9)$$

式中, θ 为连体系相对于惯性系的转角, $\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 利用有限元法对柔性梁进行离散,采用经典梁单元并引入剪切变形的影响,梁的横向变形位移(挠度、法向位移)可表示为两部分的叠加,即

$$v_0 = v_b + v_s, \quad (10)$$

式中 v_b 为弯曲变形引起的变形位移, v_s 为剪切变形引起的变形位移. 现用 N_1, N_2, N_3, N_4 表示形函数矩阵, \mathbf{q}_f 表示独立的总体变形位移列阵,有

$$s_0 = N_1 \mathbf{q}_f, v_b = N_2 \mathbf{q}_f, v_0 = N_3 \mathbf{q}_f, v_s = N_4 \mathbf{q}_f, \quad (11)$$

式中各参数见文献[1,4].

$$\mathbf{q}_{e,f} = [u_m \quad v_{mb} \quad \theta_m \quad v_{ms} \quad u_k \quad v_{kb} \quad \theta_k \quad v_{ks}]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{q}_{e,f} = \mathbf{B}_e \mathbf{R} \mathbf{q}_f, \quad (13)$$

又

$$\alpha = \frac{\partial v_b}{\partial x} = \frac{\partial N_2}{\partial x} \mathbf{q}_f. \quad (14)$$

将(13),(14)式代入(3)式得

$$\mathbf{u}_{af} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{q} - y \frac{\partial N_2}{\partial x} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{q} + y \mathbf{q}^T \frac{\partial N_1^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial x} \mathbf{q} \\ N_3 \mathbf{q} - \frac{1}{2} y \mathbf{q}^T \frac{\partial N_2^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial x} \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中, $\mathbf{H} = \int_0^x \frac{\partial N_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} d\bar{x} + \sum_{i=1}^{e-1} \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial N_3^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) d\bar{x}$,

e 为 a 点所在单元的编号.

梁的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} dV$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0^T & \dot{\theta} & \dot{\mathbf{q}}_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{bmatrix}. \quad (16)$$

式中 ρ 为密度,其他参数见文献[2].

梁的弹性势能为

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_V (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \cdot \nu_{xy}) dV \right) = \frac{1}{2} \left(\int_V \left(E \left(\frac{\partial s_0}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} y \right)^2 + \kappa G \gamma^2 \right) dV \right), \quad (17)$$

其中, κ 为剪切修正系数. 将 (11), (14) 式代入 (17) 式得

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left[\sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \left(EA \frac{\partial N_1^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} + EI_{zz} \frac{\partial^2 N_2^T}{\partial x^2} \right. \right. \\
 &\quad \times \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + GA \kappa \left(\frac{\partial N_2^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial x} - 2 \frac{\partial N_2^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial N_3^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \right] \mathbf{q}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

式中 E, G, A, I_{zz} 依次为弹性模量、剪切弹性模量、梁横截面积、惯性矩.

取梁的一微段 dx , 考虑离心力以及截面转动的影响, 轴向离心力、横向惯性力依次为

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \int_x^l \rho A \dot{\theta}^2 (r_1 + x) dx \\
 &= \rho A \dot{\theta}^2 (r_1 l + l^2/2 - r_1 x - x^2/2), \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$Q(x) = \rho A \dot{\theta}^2 v_0, \quad (20)$$

其中, $\dot{\theta}$ 为连体系相对于惯性系的转动速度, r_1 为连体系基点相对于回转中心的距离, l 为梁长. 其做功为

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^l N(x) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l Q(x) v_0 dx. \quad (21)$$

将 (11), (14) 式代入 (21) 式得

$$W = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_w \mathbf{q}, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_w &= \dot{\theta}^2 \left[\int_V \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,3}^T N_{e,3} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right. \\
 &\quad - \left(r_1 l + \frac{1}{2} l^2 \right) \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \rho A \frac{\partial N_3^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} dx \\
 &\quad + r_1 \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \rho A x \frac{\partial N_3^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} dx \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \rho A x^2 \frac{\partial N_3^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial x} dx \right]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

对于非惯性系下的刚-柔耦合动力学问题, 通常给定大范围运动规律, 仅有节点位移为未知量, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f$, 不计体力, 将 (16), (18), (22) 式代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (24)$$

得考虑剪切变形的柔性梁的动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K} \mathbf{q}_f = \mathbf{Q}_f, \quad (25)$$

式中的广义质量阵 \mathbf{M} , 广义陀螺阵 \mathbf{G} , 广义刚度阵 \mathbf{K} 和广义力阵 \mathbf{Q}_f 分别为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,1}^T N_{e,1} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \\
 &\quad + \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,2}^T N_{e,2} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \\
 &\quad + \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho I_{zz} \frac{\partial N_{e,2}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_{e,2}}{\partial x} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= 2\dot{\theta} \left(\mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,3}^T N_{e,1} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,1}^T N_{e,3} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{w0} \\
 &\quad + \ddot{\theta} \left(\mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,3}^T N_{e,1} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,1}^T N_{e,3} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} - \bar{\mathbf{W}}_{21}^T \right) \\
 &\quad - \dot{\theta}^2 \left(\mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,1}^T N_{e,1} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A N_{e,2}^T N_{e,2} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{R}^T \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho I_{zz} \frac{\partial N_{e,2}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_{e,2}}{\partial x} d\bar{x} \mathbf{B}_e \mathbf{R} \right) \\
 &\quad + \underline{\underline{\dot{\theta}^2 \bar{\mathbf{W}}_{22}}} + \underline{\underline{\mathbf{D} \dot{\theta}^2}} - \underline{\underline{\dot{r}'_{01} \mathbf{C}}} + \underline{\underline{\dot{r}'_{02} \dot{\theta} \mathbf{C}}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= -\dot{r}'_{01} \mathbf{Y}_1^T - \dot{r}'_{02} \mathbf{Y}_3^T - \ddot{\theta} (\bar{\mathbf{Y}}_2^T + \mathbf{Z}_{13}^T) \\
 &\quad + \dot{\theta}^2 \mathbf{Z}_{11}^T + \underline{\underline{\dot{\theta} (\dot{r}'_{02} \mathbf{Y}_1^T - \dot{r}'_{01} \mathbf{Y}_3^T)}},
 \end{aligned}$$

式中参数见文献[2]. $\dot{\mathbf{r}}'_0 = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}'_0 = \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{r}}_0$ 分别表示连体坐标系下基点的速度、加速度, $\dot{r}'_{01}, \dot{r}'_{02}, \dot{r}'_{01}, \dot{r}'_{02}$ 为其分量. 由上述各项的表达式可见, 考虑剪切效应后, 其动力学方程的 $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}$ 各矩阵中均增加了剪切变形的耦合项, 且 \mathbf{K} 中增加了离心力和惯性力引起的 \mathbf{K}_{w0} 项; 在纵向、横向均考虑了变形的二次耦合项后, 方程中增加了表征纵、横向变型耦合的 $\bar{\mathbf{W}}_{21}$ 项及双下划线项; 广义刚度 \mathbf{K} , 广义力阵 \mathbf{Q} 中增加了梁的转动速度和基点位移速度的耦合项, 即三下划线项. 而基于一次耦合模型建立的动力学方程不含有双下划线项和三下划线项, 基于零次模型建立的动力学方程不含有双下划线项、三下划线项和 \mathbf{C}, \mathbf{D} 项.

4. 仿真计算及结果分析

本文取一固结在旋转中心体上的柔性梁如图 2 所示. 梁长为 l , 高为 a , 宽为 b , 密度 $\rho = 2.767\text{kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 6.875 \times 10^{10}\text{N/m}^2$, 泊松比 $\mu = 0.33$, 剪切修正系数 $\kappa = 10(1 + \mu)/(12 + 11\mu) = 0.85$, 中心刚体半径 $R = 1\text{m}$, 角速度 $\dot{\theta}$ 为恒值 Ω .

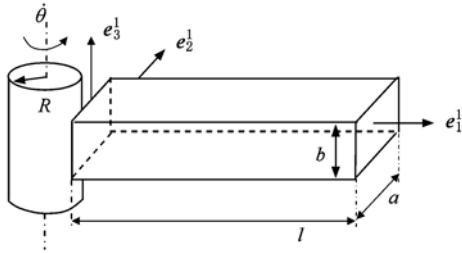


图 2 旋转 Timoshenko 梁

考虑如下四种梁的简化模型:

- A. Euler-Bernoulli 梁, 考虑纵横向二次耦合的模型.
- B. Timoshenko 梁, 考虑纵横向二次耦合以及轴向离心力、横向惯性力的影响, 即本文模型.
- C. Timoshenko 梁, 不考虑纵横向二次耦合, 即不考虑(25)式中双下划线项, 考虑轴向离心力、横向惯性力的影响.
- D. Timoshenko 梁, 同 C, 但不考虑轴向离心力、横向惯性力, 即不考虑 K_{w0} 项.

定义高长比 $\lambda = a/l$, 本文对不同的角速度 Ω , 比较了前六阶固有频率 $p(\text{rad/s})$ 的变化情况. 具体的仿真计算结果如下表 1—3 和图 3—8 所示.

表 1 $\Omega = 5\text{ rad/s}, l = 8\text{ m}, a = 0.05\text{ m}, b = 0.05\text{ m}, \lambda = 6.25 \times 10^{-3}$

	A	B	C	D
第 1 阶	5.4426	6.8738	6.8906	5.5836
第 2 阶	28.3889	33.7303	33.7787	28.5290
第 3 阶	73.8918	80.2785	80.2996	73.8938
第 4 阶	142.2326	149.4281	149.4080	142.1568
第 5 阶	260.4303	267.2562	267.1883	260.3188
第 6 阶	415.6248	422.3192	422.2321	415.4292

表 2 $\Omega = 7\text{ rad/s}, l = 8\text{ m}, a = 0.05\text{ m}, b = 0.05\text{ m}, \lambda = 6.25 \times 10^{-3}$

	A	B	C	D
第 1 阶	6.4981	8.5445	8.5681	6.6384
第 2 阶	31.4462	40.3937	40.4759	31.6208
第 3 阶	77.5184	89.0230	89.0589	77.5409
第 4 阶	146.2956	159.7309	159.6890	146.2022
第 5 阶	264.2555	277.2911	277.1582	264.0789
第 6 阶	419.4016	432.4073	432.2414	419.1225

表 3 $\Omega = 9\text{ rad/s}, l = 8\text{ m}, a = 0.05\text{ m}, b = 0.05\text{ m}, \lambda = 6.25 \times 10^{-3}$

	A	B	C	D
第 1 阶	7.6352	10.2664	10.2966	7.7756
第 2 阶	35.1002	47.8076	47.9265	35.3170
第 3 阶	82.0775	99.3712	99.4217	82.1240
第 4 阶	151.5305	172.4216	172.3477	151.4117
第 5 阶	269.2611	290.0662	289.8472	268.9979
第 6 阶	424.3851	445.4992	445.2344	423.9974

做前六阶频率随角速度的变化如图 3—8, 图中字母由高到低排列对应频率由高到低.

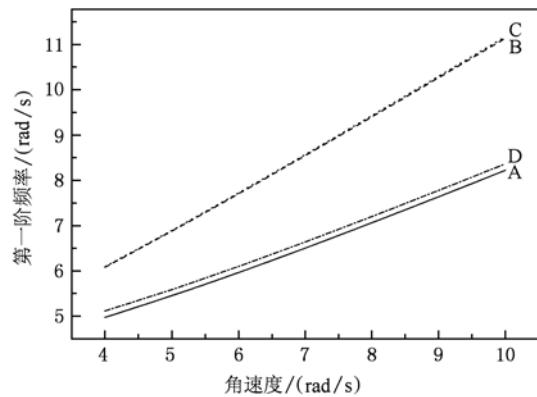


图 3 第一阶频率随角速度的变化

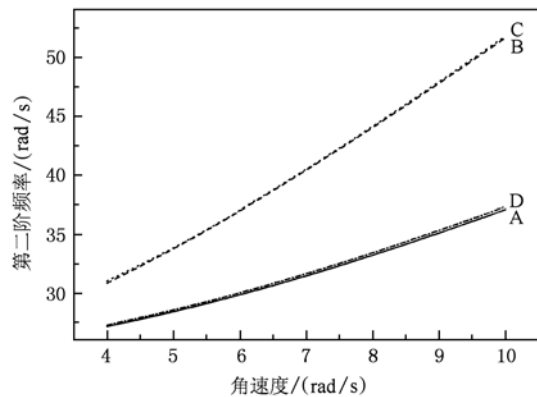


图 4 第二阶频率随角速度的变化

上述仿真计算结果表明, 考虑变形耦合后的 Timoshenko 梁的低阶频率略小于不考虑变形耦合的 Timoshenko 梁, 而其高阶频率略大于不考虑变形耦合的 Timoshenko 梁. 由于动力响应主要受到低阶频率的影响, 因而对于 Timoshenko 梁而言, 增加变形模式后, 虽然使梁具有了更大范围的变形, 因而变形耦合产生了一定的“软化”作用, 但使频率降低的

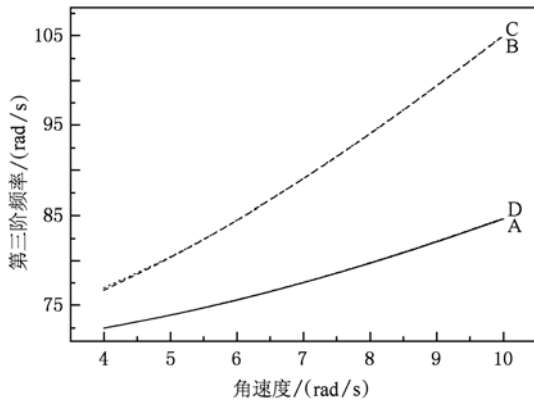


图5 第三阶频率随角速度的变化

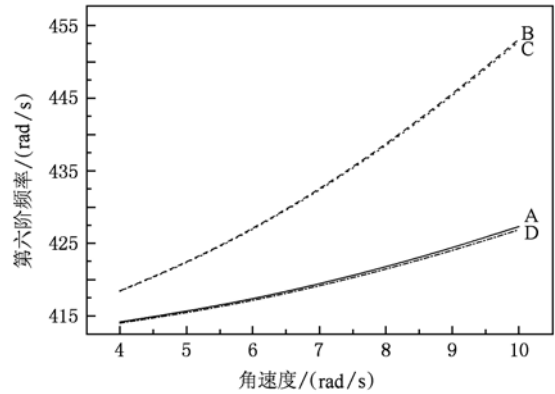


图8 第六阶频率随角速度的变化

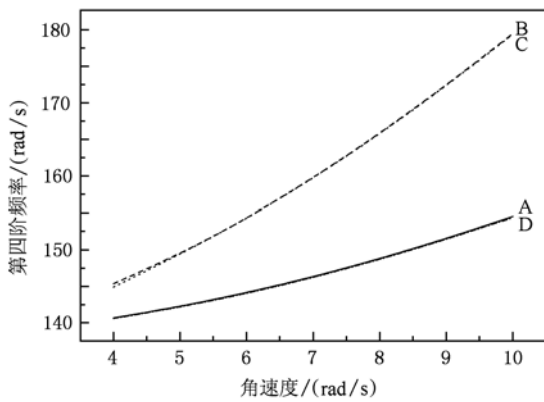


图6 第四阶频率随角速度的变化

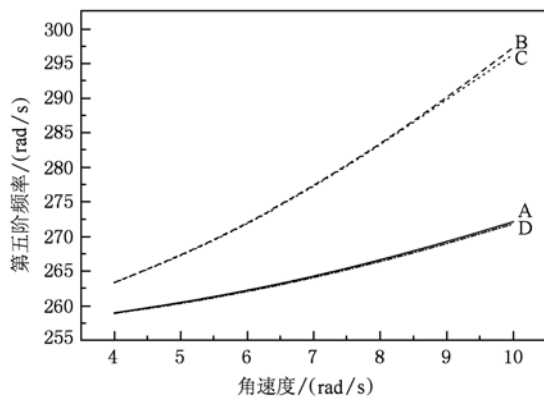


图7 第五阶频率随角速度的变化

幅度不大. 说明在广义陀螺阵 \mathbf{G} , 广义刚度阵 \mathbf{K} 中, 弯曲变形的耦合项 $\bar{\mathbf{W}}_{21}, \bar{\mathbf{W}}_{22}$ 作用较弱, 而由纵向位移中的耦合项、及其在广义刚度阵 \mathbf{K} 中的 \mathbf{D}, \mathbf{C} 项所引起的“动力刚化”现象依然较显著, 表现为各阶频

率随转速增加而升高.

在不考虑轴向离心力、横向惯性力的情况下, 梁的各阶频率均较低, 说明轴向离心力、横向惯性力使梁的频率增加, 结论与有关文献一致. 在考虑了剪切效应的影响后, 随着高长比的增加, 除第一阶频率外, 各阶频率与不考虑剪切效应的 Euler-Bernoulli 梁的频率差值由正变负, 差距变大, 并逐渐低于 Euler-Bernoulli 梁的频率, 说明剪切作用使梁的高阶频率降低, 从而也验证了前人研究得到的结论.

5. 结 论

本文研究了非惯性系下考虑剪切变形、且作大范围旋转运动的 Timoshenko 梁的动力学建模问题. 由于在梁的纵向、横向均考虑了变形的相互耦合作用, 并在截面转角中考虑了剪切变形的影响, 从而得到了一种新的转动 Timoshenko 梁的动力学方程 ((25) 式). 首次建立了包含变形二次耦合量的 Timoshenko 梁的动力学方程.

由于增加变形模式后产生的相互耦合作用, 对 Timoshenko 梁产生了一定的“软化”, 表现为考虑耦合作用后频率略有降低. 轴向离心力、横向惯性力使梁的频率增加, 随角速度的增加, 其增幅逐渐变大, 而随高长比的增加, 其增幅逐渐变小. 考虑剪切变形后, 除第一阶频率外, 各高阶频率随高长比的增加而逐渐降低, 并逐渐低于相同参数下的 Euler-Bernoulli 梁. 本文的建模方法和所得结论对于柔性梁的理论分析和工程应用具有重要的参考价值.

- [1] He X S, Deng F Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 25 (in Chinese) [和兴锁、邓峰岩 2010 物理学报 **59** 25]
- [2] Deng F Y, He X S, Li L, Zhang J 2007 *Multibody Syst. Dyn.* **18** 559
- [3] Liu Y Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1
- [4] He X S, Deng F Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1428 (in Chinese) [和兴锁、邓峰岩 2010 物理学报 **59** 1428]
- [5] Bai C L, Zhang X, Zhang L H 2009 *Chin. Phys. B.* **18** 475
- [6] Zhang S Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1335 (in Chinese) [张善卿 2008 物理学报 **57** 1335]
- [7] Bai C L, Zhang X, Zhang L H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 475
- [8] Meng Z, Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese) [孟宗、刘彬 2008 物理学报 **57** 1329]
- [9] Yang H 2002 *PhD thesis* (Shanghai Jiaotong Uni., Shanghai, China) (in Chinese) [杨辉 2002 博士学位论文, 上海: 上海交通大学]
- [10] Fu J L, Chen B Y, Tang Y F, Fu H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3942

Dynamic modeling of flexible beam with considering shear deformation in non-inertial reference frame*

He Xing-Suo[†] Song Ming Deng Feng-Yan

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 30 May 2010; revised manuscript received 15 July 2010)

Abstract

In this paper, the effect of shear deformation is considered into flexural deflection of the geometrically nonlinear deformation of a flexible beam. Then, considering the coupling effect of deformation in to the extensional and flexural deflection, the second-order coupling terms of deformation in two displacement fields are developed and the axial inertial force and transverse distributed force are considered. The finite element method is used for the system discretization and the coupling dynamic equations of flexible beam are obtained by Lagrange's equations. In this way, the new governing differential equations of the beam in the geometrically non-linear kinematics of deformation are derived. Numerical examples of a flexible beam are studied to analyze the effect of shear deformation on the dynamic character and to investigate the coupling effect. Furthermore, from this present method, a moving Timoshenko beam can also produce the dynamic stiffening phenomenon and some new properties can be shown.

Keywords: non-inertial reference frame, shear deformation, flexible beam, dynamic modeling

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672133).

[†] E-mail: xingsuoh@nwpu.edu.cn