构造准正则变换的方法

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

(2010 年 4 月 26 日收到;2010 年 7 月 13 日收到修改稿)

给出构造 Hamilton 系统的准正则变换的方法,首先将 Hamilton 系统变换成 Birkhoff 系统,然后将 Birkhoff 系统作规范变换并实现 Hamilton 化. 指出对一个 Hamilton 系统存在多种准正则变换. 举例说明所得结果的应用.

关键词: Hamilton 系统, 准正则变换, Birkhoff 系统, 规范变换

PACS: 45.20.Jj, 45.90.+i

1. 引 言

变换理论在力学中占有重要地位,正则变换是 Hamilton 力学的核心内容之一,这种相空间变量的变换,要求对所有 Hamilton 函数都保持正则方程形式[1—3]. 存在某些相空间变量的变换,对某个 Hamilton 函数保持着正则方程形式,对其他 Hamilton 函数却未必如此,这种变换称为准正则变换[2,3]. 显然,正则变换就是对所有 Hamilton 函数都是准正则的变换. 文献[2]中给出准正则变换的实例,但未深入讨论如何构造某个 Hamilton 函数的准正则变换. 在传统分析力学中,Lagrange 函数有两类等效变换,第一类是规范等效变换,第二类是同位等效变换,与第一类变换对应的相空间变量变换是正则变换,而与第二类变换对应的相空间变量变换是准正则变换,而且,上述的正则变换和准正则变换是受限制的,因为变换中坐标变量保持不变[3]. 虽然,文献[3]中原则上给出了由 Lagrange 函数同位变换导出对应的 Hamilton 函数准正则变换的途径,但是,由于构造同位等效 Lagrange 函数本身的困难,使这条途径并不实用.

本文研究一种实用的构造准正则变换的方法,这种准正则变换涉及全部相空间变量,同时给出变换得到的 Hamilton 函数的计算方法. 这种方法原理基于 Hamilton 系统与 Birkhoff 系统的相互变换,以及 Birkhoff 系统的规范变换[3—6]. 文献[5]中指出满足一定条件的 Birkhoff 系统可以 Hamilton 化,但结果不是唯一确定的,也就是说,某个 Birkhoff 系统可以对应着不同的 Hamilton 系统,文献[12]利用上述方法实现 Whittaker 方程的 Hamilton 化,指出对应的 Hamilton 函数不是唯一的. 本文研究的结果,说明这些 Hamilton 系统之间是准正则变换的关系. 最后,给出算例说明所得结果的应用.

2. 构造准正则变换的方法

2.1. Hamilton 系统及其 Birkhoff 化[3,4]

设系统的 Hamilton 函数为

$$H = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t), \tag{1}$$

运动方程为正则方程

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i},\quad (i = 1,\cdots,n), \tag{2}$$

上述方程可以写成统一的逆变形式

$$\omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu} = 0,\quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{3}$$

其中

$$a^\mu = \begin{cases} q^\mu, & (\mu = 1,\cdots,n), \\ p_{\mu-n}, & (\mu = n+1,\cdots,2n), \end{cases} \tag{4}$$

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

定义

$$(R^0_\mu) = \begin{pmatrix} p_\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1,\cdots,n \\ \mu = n+1,\cdots,2n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

方程(3)可以写成

† E-mail: wangw@ sina. cn

©2011 中国物理学会 Chinese Physical Society

$$\left(\frac{\partial R_v^0}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu^0}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v-\frac{\partial H}{\partial a^\mu}=0. \tag{7}$$

引入下列变量变换：

$$t\to t'=t, a^\mu\to a'^\mu(t,\boldsymbol{a}), \tag{8}$$

假设 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial a^\mu}{\partial a^v}\right)\neq 0, \tag{9}$$

即变换(8)式存在逆变换

$$t'\to t=t',\quad a'^\mu\to a\mu(t,\boldsymbol{a}'), \tag{10}$$

在此变换下 Hamilton 方程(7)变换成 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R'_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R'_\mu}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v-\left(\frac{\partial B'}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R'_\mu}{\partial t}\right)=0, \tag{11}$$

其中 Birkhoff 函数和函数组为

$$B'(t,a')=\left[H-\frac{\partial a^\rho}{\partial t}R_\rho^0\right](t,a'),$$

$$R'_v(t,a')=\left[\frac{\partial a^\rho}{\partial a'^v}R_\rho^0\right](t,a'), \tag{12}$$

即,在相空间变量的一般变换下,Hamilton 系统变换成 Birkhoff 系统. 我们指出,由于变换可以有多种选择,故得到的 Birkhoff 系统是多样的.

2.2. Birkhoff 系统的再 Hamilton 化[5,6]

由(12)式,得到 Birkhoff 张量为

$$\Omega_{\mu v}=\frac{\partial R'_v}{\partial a'^\mu}-\frac{\partial R'_\mu}{\partial a'^v}=\frac{\partial a^\rho}{\partial a'^\mu}\left(\frac{\partial R_\sigma^0}{\partial a^\rho}-\frac{\partial R_\rho^0}{\partial a^\sigma}\right)\frac{\partial a^\sigma}{\partial a'^v}$$

$$=\frac{\partial a^\rho}{\partial a'^\mu}\omega_{\rho\sigma}\frac{\partial a^\sigma}{\partial a'^v}, \tag{13}$$

根据(9)式,逆变换(10)式的 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial a^\mu}{\partial a'^v}\right)\neq 0, \tag{14}$$

以及由(5)式得

$$\det(\omega_{\rho\sigma})=1, \tag{15}$$

故得到的 Birkhoff 系统是规则的,即

$$\det(\Omega_{\mu v})\neq 0, \tag{16}$$

同时由于张量($\omega_{\rho\sigma}$)的反对称性及(5)式结构,可以导出($\Omega_{\mu v}$)结构为

$$(\Omega_{\mu v})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & \Omega_{n\times n}\\ -\tilde{\Omega}_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

这表明($\Omega_{\mu v}$)至少存在 $2n(n-1)$ 个非对角的零分量,因此 Birkhoff 系统(12)可以重新 Hamilton 化[5].

通过对 a'_μ 和 R'_μ 序号的重新排列和恰当选取 Birkhoff 规范变换函数 $G(t,a')$,使变换后的 Birkhoff 系统

$$R'_\mu\to\bar{R}_\mu=R'_\mu-\frac{\partial G}{\partial a'^\mu},$$

$$B'\to\bar{B}=B'+\frac{\partial G}{\partial t}, \tag{18}$$

满足下列关系：

$$\bar{R}_\mu\equiv 0,\quad (\mu=n+1,\cdots,2n). \tag{19}$$

对重新排序的变量 a'^μ 作如下变换：

$$a'^\mu\to\bar{a}^\mu=\begin{cases}a'^\mu, & (\mu=1,\cdots,n),\\ -\bar{R}_{\mu-n}, & (\mu=n+1,\cdots,2n),\end{cases} \tag{20}$$

并引入新的 Hamilton 函数为

$$\bar{H}=-\bar{B}=-\left[B'+\frac{\partial G}{\partial t}\right](t,\bar{\boldsymbol{a}}), \tag{21}$$

新的正则变量 $\bar{a}^\mu$ 和新的 Hamilton 函数 $\bar{H}(t,\bar{\boldsymbol{a}})$,与原始的 Hamilton 系统 a'^μ 和 $H(t,\boldsymbol{a})$之间是准正则变换关系.

应当说明三点,第一,Birkhoff 系统的规范变换(18),由于变量 a'^μ 的重新排序可能有多种方式,相应的规范变换函数 G 选取也有多种,故导出的 Hamilton 系统也可能有多种,这些不同的 Hamilton 系统之间也是准正则变换关系. 第二,如果 Birkhoff 系统是给定的,或是由微分方程系统导出的 Birkhoff 表示,只要符合 Hamilton 化的条件,就可以化成 Hamilton 系统,这种 Hamilton 化同样是不唯一的,不同的 Hamilton 系统之间也是准正则变换关系. 第三,在这样导出的多种准正则变换中,可能存在真正的正则变换(见算例).

3. 算　　例

例 1　谐振子. 取 $q=a^1, p=a^2, \omega^2=1$,

$$H=\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2]. \tag{22}$$

引入 Birkhoff 变量,作变量变换

$$a'^1=a^1\sin t+a^2\cos t, a'^2=a^1\cos t-a^2\sin t, \tag{23}$$

其逆变换为

$$a^1=a'^1\sin t+a'^2\cos t, a^2=a'^1\cos t-a'^2\sin t. \tag{24}$$

代入(12)式,得到

$$B'=[(a'^2)^2-(a'^1)^2]\cos 2t+a'^1a'^2\sin 2t,$$

$$R'_1=a'^1\cos t\sin t-a'^2\sin^2 t,$$

$$R'_2=a'^1\cos^2 t-a'^2\sin t\cos t. \tag{25}$$

引入规范变换函数

$$G = a'^1 a'^2 \cos^2 t - \frac{1}{2}(a'^2)^2 \sin t \cos t, \tag{26}$$

作规范变换(18),得到

$$\bar{R}_1 = a'^1 \sin t \cos t - a'^2, \bar{R}_2 = 0,$$
$$\bar{B} = -(a'^1)^2 \cos 2t. \tag{27}$$

定义新正则变量

$$\bar{a}^1 = a'^1 = \bar{q}, \bar{a}^2 = -\bar{R}_1 = \bar{p}, \tag{28}$$

并根据(21)式得到新 Hamilton 函数

$$\bar{H} = (\bar{a}^1)^2 \cos 2t = \bar{q}^2 \cos 2t, \tag{29}$$

将(28)式用原始的正则变量表示,即

$$\bar{q} = q\sin t + p\cos t,$$
$$\bar{p} = q\cos^3 t + p\sin^3 t - 2p\sin t. \tag{30}$$

容易验证,对谐振子(22)式,$q \to \bar{q}$, $p \to \bar{p}$, $H \to \bar{H}$ 是准正则变换.

同时指出,若选取规范变换函数为

$$G' = \frac{1}{2}(a'^1)^2 \sin t \cos t - a'^1 a'^2 \sin^2 t, \tag{31}$$

则可导出谐振子的另一个准正则变换.

例 2 二维耦合阻尼运动

$$\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_2 = 0, \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_1 = 0. \tag{32}$$

引入 Birkhoff 变量

$$a^1 = x_1, a^2 = x_2, a^3 = \dot{x}_1, a^4 = \dot{x}_2. \tag{33}$$

方程(32)改写成一阶方程组

$$\dot{a}^1 = a^3, \ \dot{a}^2 = a^4,$$
$$\dot{a}^3 = -(ba^3 + ka^2), \dot{a}^4 = -(ba^4 + ka^1). \tag{34}$$

方程(34)的 Birkhoff 表示之一为

$$R_1 = -a^3 e^{bt}, R_2 = -a^4 e^{bt}, R_3 = R_4 = 0.$$
$$B = -\frac{1}{2}e^{bt}[(a^3)^2 + (a^4)^2 + 2ka^1a^2], \tag{35}$$

引入正则变量,并反解得到

$$q^1 = a^1, q^2 = a^2, p_1 = -R_1, p_2 = -R_2,$$
$$a^3 = p_1 e^{-bt}, a^4 = p_2 e^{-bt}, \tag{36}$$

由此得系统的 Hamilton 函数之一为

$$H = \frac{1}{2}e^{-bt}(p_1^2 + p_2^2) + e^{bt}kq^1q^2. \tag{37}$$

方程(34)的 Birkhoff 表示之二为

$$\bar{R}_1 = -a^4 e^{bt}, \bar{R}_2 = -a^3 e^{bt}, \bar{R}_3 = \bar{R}_4 = 0,$$
$$\bar{B} = -e^{bt}\left\{a^3a^4 + \frac{1}{2}k[(a^1)^2 + (a^2)^2]\right\}. \tag{38}$$

引入正则变量,并反解得到

$$\bar{q}^1 = a^1, \bar{q}^2 = a^2, \quad \bar{p}_1 = -\bar{R}_1, \bar{p}_2 = -\bar{R}_2,$$
$$a^4 = \bar{p}_1 e^{-bt}, \quad a^3 = \bar{p}_2 e^{-bt}, \tag{39}$$

系统的另一个 Hamilton 函数为

$$\bar{H} = e^{-bt}\bar{p}_1\bar{p}_2 + \frac{1}{2}ke^{bt}[(\bar{q}^1)^2 + (\bar{q}^2)^2]. \tag{40}$$

利用规范变换,可以从 Birkhoff 表示(35)式,得到方程(34)的 Birkhoff 表示之三为

$$R'_1 = R'_2 = 0, R'_3 = a^1 e^{bt}, R'_4 = a^2 e^{bt},$$
$$B' = -\frac{1}{2}e^{bt}[(a^3)^2 + (a^4)^2 + 2ka^1a^2 + 2b(a^1a^3 + a^2a^4)]. \tag{41}$$

引入正则变量,并反解得到

$$q^{1'} = a^3, q^{2'} = a^4, p'_1 = -R'_3, p'_2 = -R'_4,$$
$$a^1 = -p'_1 e^{-bt}, a^2 = -p'_2 e^{-bt}. \tag{42}$$

系统的第三个 Hamilton 函数为

$$H' = ke^{-bt}p'_1p'_2 - b(q^{1'}p'_1 + q^{2'}p'_2) + \frac{1}{2}e^{bt}[(q^{1'})^2 + (q^{2'})^2]. \tag{43}$$

不难验证,变换

$$(q^1, q^2, p_1, p_2, H) \to (\bar{q}^1, \bar{q}^2, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{H})$$

是准正则变换;变换

$$(q^1, q^2, p_1, p_2, H) \to (q^{1'}, q^{2'}, p'_1, p'_2, H'),$$

实际上是正则变换. 最后指出,本例表明对一个确定的微分方程系统,其不同的 Birkhoff 表示导出的 Hamilton 函数之间就存在准正则变换关系.

4. 结论与讨论

本文提出了一种规范的程序化的构造 Hamilton 系统准正则变换的方法:第一,将原 Hamilton 系统通过相空间中一般变量变换化为 Birkhoff 系统;第二,将得到的 Birkhoff 系统经过规范变换化为另一个 Birkhoff 系统;第三,将新的 Birkhoff 系统 Hamilton 化,从而得到新的 Hamilton 系统. 新老 Hamilton 系统之间是准正则变换关系,其中可能存在正则变换关系,利用正则变换条件来检验得到的不同的准正则变换,就可能发现其中的正则变换,因此,本文提出的方法也可以认为是一种非传统的构造正则变换的方法.

上述构造方法表明,一个 Hamilton 系统的准正则变换系统不是唯一的. 在上述方法第一步相空间变量变换有很大的任意性,不同的选择导出的 Birkhoff 系统是不同的;第二步中变量排列和规范变换函数也有多种选择,因而 Hamilton 化的结果也不是唯一的. 由于分析力学方法,特别是 Hamilton 力学的方法,既多种多样,又严格规范,故常常利用分

析力学理论和方法来处理微分方程问题,包括研究众多非力学非物理系统的微分方程模型[7—13],因此,本文提出的构造准正则变换方法,以及构造结果的多样性,不仅有理论意义,而且有实用价值.

最后,还应当说明一点,应当重视 Lagrange 力学和 Birkhoff 力学中规范变换的研究,本文和其他相关研究表明这是一种常见的重要变换[5,14—17]. Hamilton 力学中没有规范变换,本文结果表明准正则变换与之相对应,由规范变换关联的 Lagrange 系统或 Birkhoff 系统,是等效的系统;由准正则变换关联的 Hamilton 系统,由包括正则变换关联的系统,也可以看成等效的系统.

[1] Goldstein H, PooleC, Safko J 2002 *Classical mechanics*, 3nd ed. (Redwood City: Addison-Wesley)

[2] Saletan E J, Cromer A H 1997 *Theoretical mechanics* (New York: John Wiley)

[3] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoff system* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京: 北京理工大学出版社)]

[5] Ding G T 2010 *Journal of Dynamics and Control* **8** 8 (in Chinese) [丁光涛 2010 动力学与控制学报 **8** 8]

[6] Li Y C, Liang J H, Mei F X 2002 *Acta Mechanica Solida Sinica* **23** 203 (in Chinese) [李元成、梁景辉、梅凤翔 2002 固体力学学报 **23** 203]

[7] Wu H B, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 2391

[8] Mei F X, Wu H B, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1662

[9] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 2845

[10] Zhang R C, Wang L H, Yue C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3050 (in Chinese) [张睿超、王连海、岳成庆 2007 物理学报 **56** 3050]

[11] Lou Z M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1307 (in Chinese) [楼智美 2008 物理学报 **57** 1307]

[12] Ding G T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8326 (in Chinese) [丁光涛 2010 物理学报 **59** 8326]

[13] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 等 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

[14] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3620 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 3620]

[15] Ding G T 2009 *Science in China* (Series G) **39** 785 (in Chinese) [丁光涛 2009 中国科学(G 辑) **39** 785]

[16] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6725 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 6725]

[17] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7431 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 7431]

A Method of constructing canonoid transformations

Ding Guang-Tao
(The College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)
(Received 26 April 2010; revised manuscript received 13 July 2010)

Abstract
A method of constructing canonoid transformations with respect to a Hamiltonian is presented. First, the Hamiltonian system is transformed into a Birkhoffian system. Second, the Birkhoffian system is transformed into a new one under gauge transformation. Finally, the Hamiltonization of new Birkhoffian system is realized. It is pointed out that there exist many different canonoid transformations for one Hamiltonian system. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Hamiltonian system, canonoid transformation, Birkhoffian system, gauge transformation
PACS: 45.20.Jj, 45.90.+i

† E-mail: wangw@ sina. cn