一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新构造方法

丁光涛†
(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)
(2010 年 6 月 10 日收到;2010 年 7 月 5 日收到修改稿)

提出构造二阶微分方程的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新路径. 将二阶方程写成一阶方程组并构造出对应的一阶 Lagrange 函数后,直接从一阶 Lagrange 函数导出二阶 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 利用上述方法得到若干耗散和类耗散系统的一阶和二阶 Lagrange 函数以及 Hamilton 函数;讨论了这种方法的优点. 举例说明所得结果的应用.

关键词:逆问题,耗散系统,Lagrange 函数,Hamilton 函数
PACS:45.20.Jj,45.05.+x,02.30.Zz

1. 引 言

Lagrange 力学逆问题系研究给定的系统运动微分方程,是否存在并能否构造出对应的 Lagrange 函数,以将其表示为 Lagrange 方程形式,在得到 Lagrange 表示后可进一步导出 Hamilton 函数. 运动微分方程实现分析力学化,就可以运用分析力学理论和方法来研究这些系统,包括一些非力学非物理学的实际系统,同时也得到了经典物理通向近代物理,如量子理论和场论的桥梁. 因此,这种逆问题研究具有重要的理论意义和实用价值,并已取得一系列重要成果[1—10].

在逆问题研究中实现耗散系统的分析力学化是长期的热门课题,近来仍不断有新的工作出现[8,10,11,12]. 本文将提出一种构造系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新路径,即将给定的二阶微分方程变换成一阶方程组,利用文献[13]中提出的一种直接方法,导出与之对应的 Lagrange 函数(本文以后称为一阶 Lagrange 函数),利用文献[14]中提出的位形空间与状态空间中 Lagrange 函数的变换关系,导出与给定二阶微分方程对应的 Lagrange 函数(本文以后称为二阶 Lagrange 函数);再利用文献[15]中方法,直接从一阶 Lagrange 函数导出系统的 Hamilton 函数;然后,通过具体算例说明上述方法的应用. 本文讨论限于一维系统,即一个二阶运动微分方程的情况,涉及的算例却不限于经典力学领域,得到的结果有些与已有结果相符,有些是新的结果.

2. 构造 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的基本方法

设一维运动微分方程为

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), \tag{1}$$

引入新变量

$$y = \dot{x}, \tag{2}$$

则方程(1)变换为一阶微分方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(t,x,y). \tag{3}$$

对方程组(3),一阶 Lagrange 函数一般形式为

$$L = A(t,x,y)\dot{x} + B(t,x,y)\dot{y} + G(t,x,y),$$

考虑到 Lagrange 函数的规范等效变换,可以通过适当选择规范变换函数而使 $B=0$,同时由下面讨论可见,这样处理将简化导出二阶 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的过程,故设一阶 Lagrange 函数为

$$L = A(t,x,y)\dot{x} + G(t,x,y), \tag{4}$$

对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\omega\dot{y} + \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} = 0,\ -\omega\dot{x} - \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

† E-mail:dgt695@sina.com

式中

$$\omega = \frac{\partial A}{\partial y},\ (\omega \neq 0). \tag{6}$$

将方程(3)代入方程(5),得到

$$\omega y = -\frac{\partial G}{\partial y},\ \omega f(t,x,y) = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{7}$$

根据文献[13]中提出的直接方法2,若给定方程(3),则 ω 应满足下列方程:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x}y + \frac{\partial \omega}{\partial y}f(t,x,y) + \omega\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

由方程(8)解出 ω 后,代入方程(6)和(7),确定函数 A 和 G,即导出(4)式的一阶 Lagrange 函数 L.

引入变量 y,从方程(1)变换成(3),相当于从位形空间变换成坐标—速度状态空间运动微分方程. 文献[14]中给出了位形空间中力学系统二阶 Lagrange 函数 $\overline{L}$ 和状态空间中一阶 Lagrange 函数 L 之间的关系为

$$L = \frac{\partial \overline{L}}{\partial y}(\dot{x} - y) + \overline{L}. \tag{9}$$

因此,在得到(4)式中 L 后,改写成

$$L = A(t,x,y)(\dot{x} - y) + G'(t,x,y), \tag{10}$$

$$G'(t,x,y) = G(t,x,y) + A(t,x,y)y. \tag{11}$$

如果条件 $A = \frac{\partial G'}{\partial y}$成立,即

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y}y = 0, \tag{12}$$

那么一维系统(1)二阶 Lagrange 函数为

$$\overline{L}(t,x,\dot{x}) = G'(t,x,y)\mid_{y\to\dot{x}}. \tag{13}$$

应当指出,对(2)式引入的变量变换,利用(6)和(7)式可以证明条件(12)必然成立.

文献[15]中给出一阶 Lagrange 系统 Hamilton 函数的直接构造方法,即对(4)式 L,引入正则动量

$$p = A(t,x,y), \tag{14}$$

由于$\frac{\partial A}{\partial y}\neq 0$,如可以反解出

$$y = y(t,x,p), \tag{15}$$

则系统 Hamilton 函数为

$$H(t,x,p) = -G(t,x,y)\mid_{y\to y(t,x,p)}. \tag{16}$$

3. 一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

利用上述方法实现若干变系数耗散系统的分析力学化.

$$\ddot{x} = \varphi_1(t)\dot{x} + \varphi_2(x)\dot{x}^2 + \varphi_0(t,x). \tag{17}$$

变换成一阶方程组

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = \varphi_1 y + \varphi_2 y^2 + \varphi_0, \tag{18}$$

代入方程(8),得到

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x}y + \frac{\partial \omega}{\partial y}(\varphi_1 y + \varphi_2 y^2 + \varphi_0) + \omega(\varphi_1 + 2\varphi_2 y) = 0, \tag{19}$$

方程(19)的一个特解为

$$\omega = \mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]}. \tag{20}$$

函数 A,G 和一阶 Lagrange 函数 L 分别为

$$A = y\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]}, \tag{21}$$

$$G = -\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]} + \int^x \varphi_0(t,\xi)\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^\xi \varphi_2(\eta)\mathrm{d}\eta\right]}\mathrm{d}\xi, \tag{22}$$

$$L = \left(y\dot{x} - \frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]} + \int^x \varphi_0(t,\xi)\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^\xi \varphi_2(\eta)\mathrm{d}\eta\right]}\mathrm{d}\xi, \tag{23}$$

由 L 导出系统(17)的传统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数分别为

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]} + \int^x \varphi_0(t,\xi)\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^\xi \varphi_2(\eta)\mathrm{d}\eta\right]}\mathrm{d}\xi. \tag{24}$$

$$H = \frac{1}{2}p^2\mathrm{e}^{\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^x \varphi_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]} - \int^x \varphi_0(t,\xi)\mathrm{e}^{-\left[\int^t \varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau + 2\int^\xi \varphi_2(\eta)\mathrm{d}\eta\right]}\mathrm{d}\xi. \tag{25}$$

例题 1 广义相对论中 Buchduhl 方程

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{3\dot{x}^2}{x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x}y + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{y}{t} + \frac{3y^2}{x}\right) + \omega\left(\frac{1}{t} + \frac{2y}{3x}\right) = 0. \tag{27}$$

由(20)—(25)式,分别得到

$$\omega = t^{-1}x^{-6}, \tag{28}$$

$$A = t^{-1}x^{-6}y, \tag{29}$$

$$G = -\frac{1}{2}y^2t^{-1}x^{-6}, \tag{30}$$

$$L = \left(y\dot{x} - \frac{1}{2}y^2\right)t^{-1}x^{-6}, \tag{31}$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2t^{-1}x^{-6}, \tag{32}$$

$$H = \frac{1}{2}p^2tx^6. \tag{33}$$

应当指出,方程(27)的解不是唯一的,例如[12]

$$\omega' = 6t^3x^6y^{-4}, \tag{34}$$

由此可以导出

$$\overline{L}' = t^3x^6\dot{x}^{-2}. \tag{35}$$

解(28)式是文献[12]中没有的,显然其 ω 比(34)式中 ω' 简单.

例题 2 Emden 方程[16]

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0. \tag{36}$$

方程(19)写成

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}y - \frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\frac{2}{t}y + x^5\right) - \frac{2}{t}\omega = 0, \tag{37}$$

利用(20)—(25)式,容易导出

$$\omega = t^2, \tag{38}$$

$$\overline{L} = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6\right), \tag{39}$$

$$H = \frac{1}{2}t^{-2}p^2 + \frac{1}{6}t^2x^6. \tag{40}$$

与例题 1 相似,方程(37)还有其他解,例如

$$\omega' = t^5y^2 + t^4xy + \frac{1}{3}t^5x^6 \tag{41}$$

可以导出另一个二阶 Lagrange 函数为

$$\overline{L}' = \frac{1}{12}t^5\dot{x}^4 + \frac{1}{6}t^4x\dot{x}^3 + \frac{1}{6}t^5x^6\dot{x}^2 - \frac{1}{36}t^5x^{12}. \tag{42}$$

$$\ddot{x} = \varphi(t,x)\dot{x}^n \quad (n \neq 1,2) \tag{43}$$

代入方程(8),得到

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}y + \frac{\partial\omega}{\partial y}\varphi y^n + n\varphi y^{n-1}\omega = 0, \tag{44}$$

方程(44)的一个特解为

$$\omega = y^{-n}. \tag{45}$$

函数 A,G 和 L 分别为

$$A = \frac{1}{(1-n)}y^{1-n}. \tag{46}$$

$$G = -\frac{1}{(2-n)}y^{2-n} + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{47}$$

$$L = \frac{1}{1-n}y^{1-n}\dot{x} - \frac{1}{2-n}y^{2-n} + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{48}$$

二阶 Lagrange 函数和 Hamilton 函数分别为

$$\overline{L} = \frac{1}{(1-n)(2-n)}\dot{x}^{2-n} + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{49}$$

$$H = \frac{1}{2-n}[(1-n)p]^{\frac{2-n}{1-n}} - \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{50}$$

例题 3 分数次方阻尼

$$\ddot{x} = -k\dot{x}^{1/2}, \quad (k \text{ 为常数}), \tag{51}$$

即方程(43)中 $n = \frac{1}{2}$,$\varphi(t,x) = (-k)$,由(49)和(50)式得

$$\overline{L} = \frac{4}{3}\dot{x}^{3/2} - kx, \tag{52}$$

$$H = \frac{1}{12}p^3 + kx. \tag{53}$$

$$\ddot{x} = \varphi(t,x)\psi(\dot{x}), \tag{54}$$

ψ 为其宗量的任意光滑函数,该系统可以看成系统(43)的普遍形式. 代入方程(8)得到

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}y + \frac{\partial\omega}{\partial y}\varphi(t,x)\psi(y) + \varphi\omega\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{55}$$

方程(55)有一个特解

$$\omega = \omega(y) = 1/\psi(y), \tag{56}$$

代入(6)和(7)式得到

$$A = \int^y\frac{\mathrm{d}\eta}{\psi(\eta)}, \tag{57}$$

$$G = -\int^y\frac{\eta d\eta}{\psi(\eta)} + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{58}$$

因此得到一阶 Lagrange 函数、二阶 Lagrange 函数分别为

$$L = \dot{x}\int^y\mathrm{d}\eta/\psi(\eta) - \int^y\eta\,\mathrm{d}\eta/\psi(\eta) + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{59}$$

$$\overline{L} = \int^{\dot{x}}\mathrm{d}\eta\int^\eta\frac{d}{\psi(\xi)} + \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{60}$$

若要导出 Hamilton 函数,可引入正则变量

$$p = A = \int^y\mathrm{d}\eta/\psi(\eta), \tag{61}$$

如果由(61)式可以反解得到

$$y = y(p),$$

则 Hamilton 函数为

$$H = \int^y\frac{\eta\mathrm{d}\eta}{\psi(\eta)}\Big|_{y\to y(p)} - \int^x\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{62}$$

例题 4 变系数一次方阻尼运动

$$\ddot{x} = f(t,x)\dot{x}. \tag{63}$$

由(57)和(58)式可得

$$A = \ln y, \tag{64}$$

$$G = -y + \int^x f(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{65}$$

一阶 Lagrange 函数、二阶 Lagrange 函数和 Hamilton 函数分别为

$$L = \dot{x}\ln y - y + \int^x f(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{66}$$

$$\overline{L} = \dot{x}\ln\dot{x} - \dot{x} + \int^{x} f(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (67)$$

$$H = \mathrm{e}^{p} - \int^{x} f(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (68)$$

4. 结论和讨论

本文提出了从系统运动微分方程导出对应的二阶 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新路径,由 4 个步骤组成:1)引入“速度”变量,将给定的二阶微分方程变换为一阶方程组;2)直接从一阶方程组出发,构造对应的一阶 Lagrange 函数;3)利用速度—坐标状态空间中一阶 Lagrange 函数与位形空间中二阶 Lagrange 函数的变换关系,直接导出二阶 Lagrange 函数;4)引入正则“动量”,直接从一阶 Lagrange 函数导出 Hamilton 函数. 根据上述步骤构造了几种典型的变系统耗散和类耗散系统的一阶和二阶 Lagrange 函数,以及 Hamilton 函数,并通过 4 个算例说明所得结果的应用.

对本文提出的方法作几点讨论和说明:

1. 本文提出的方法的主要特点是以一阶 Lagrange 函数为中间环节,这是因为一阶 Lagrange 函数的结构比较确定比较简单,是状态变量导数的线性函数,构造一阶 Lagrange 函数比直接构造二阶 Lagrange 函数难度低. 在本文中又对一维情况利用了规范等效变换,使一阶 Lagrange 函数结构更加简化,待求的未知函数数量减少,而且简化了步骤 3)和 4)的计算. 文献[5]在讨论关于变分法的逆问题时,强调了一阶 Lagrange 函数在力学和物理学中的已有应用和重要性,并且指出对有些微分方程系统虽没有对应的二阶 Lagrange 函数,但存在一阶 Lagrange 函数,例如有名的 Hojman-Urrutia 方程[2,5,15],指出在变分原理中应用一阶形式的优越性. 本文提出的方法也再次表明一阶 Lagrange 函数在分析力学中的重要意义.

2. 应当说明,从同一个一阶微分方程组可以导出不同的一阶 Lagrange 函数,但这些函数等效;由不同的一阶 Lagrange 函数导出的二阶 Lagrange 函数也是不同而等效的.

3. 由一阶 Lagrange 函数导出 Hamilton 函数时,正则动量变量的引入((14)式)是直接的,但是有些情况中其逆变换((15)式)却不能解出,故对应的 Hamilton 函数也就不能以显式表示出来. 这种情况,在例题 2 中已出现.

最后,应指出本文讨论仅限于一维系统,故相关的结果有待推广到多维系统.

[1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Springer-Verlag)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X 1988 *Special Problems of Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1988 分析力学专题 北京:北京工业学院出版社)]

[4] Currie D F, Saletan E J 1966 *J. Math. Phys.* **7** 967

[5] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1896

[6] Lopez G 1996 *Ann. Phys.* **251** 363

[7] Lopez G 1996 *Ann. Phys.* **251** 372

[8] Ding G T 1996 *J. Anhui Normal Univ.* **19** 382 (in Chinese) [丁光涛 1996 安徽师范大学学报 **19** 382]

[9] Pen H W 1980 *Acta Phys. Sin.* **29** 1084 (in Chinese) [彭恒武 1980 物理学报 **29** 1084]

[10] Lopez G, Lopez P 2006 *Int. J. Theor. Phys.* **45** 734

[11] Musielak Z E 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 055205

[12] Cieslinski J L, Nikiciuk T 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 175205

[13] Ding G T, Tao S T 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 872 (in Chinese) [丁光涛、陶松涛 2008 科学通报 **53** 872]

[14] Ding G T 2009 *Science in China* G **39** 813 (in Chinese) [丁光涛 2009 中国科学 G 辑 **39** 813]

[15] Ding G T 2009 *China. Sci. Bull.* **54** 337 (in Chinese) [丁光涛 2009 科学通报 **54** 337]

[16] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5041 (in Chinese) [梅凤翔、解加芳、江铁强 2007 物理学报 **56** 5041]

A new approach to the construction of Lagrangians and Hamiltonians for one-dimensional dissipative systems with variable coefficients

Ding Guang-Tao†

(*The Collega of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

(Received 10 June 2010; revised manuscript received 5 July 2010)

Abstract

A new approach to the construction of Lagrangian and Hamiltonian for a second-order differential equation is presented. By writing the second-order equation in the first-order form and constructing first-order Lagranian corresponding to the set of the first-order equations, the second-order Lagrangian and Hamiltionian are deduced from the first-order Lagrangian directly. By using the above method the first-order ane the second-order Lagrangians and the Hamiltonians for some of dissipative and dissipative-like systems are obtained. The advantage of the approach is discussed. Four examples are given to illustrate the applications of the results.

Keywords: inverse problem, dissipative system, Lagrangian, Hamiltonian

PACS: 45.20.Jj, 45.05.+x, 02.30.Zz

† E-mail: dgt695@sina.com