分数阶状态空间系统的稳定性分析及其在分数阶混沌控制中的应用*

黄丽莲† 何少杰

(哈尔滨工程大学,信息与通信工程学院,哈尔滨 150001)

(2010 年 6 月 22 日收到;2010 年 7 月 31 日收到修改稿)

基于 Lyapunov 稳定性理论,针对分数阶状态空间系统模型,提出一种稳定性判定方法,并给出了数学证明. 运用该稳定性理论无需求解平衡点,而方便地选择出控制项,对分数阶状态空间系统进行控制. 本文以分数阶统一混沌系统作为控制对象,将所提出的稳定性理论应用于该系统的控制中,仿真结果验证了该理论的有效性.

关键词: 分数阶, 状态空间系统, 稳定性, 统一混沌系统

PACS: 47.51.Df

1. 引 言

分数阶微积分理论的定义在整数阶微积分定义的基础上扩展出来的,至今已经有 300 年的历史,但分数阶微积分理论的发展主要完成于 19,20 世纪中叶,并且主要集中在纯数学领域. 近年来,随着计算机技术的迅猛发展,分数阶微积分已经开始逐步向工程应用领域内渗透,使得分数阶微积分在图像处理、神经网络、信号处理及鲁棒控制等信息领域得到广泛的应用[1—6],引起了国内外学者的高度重视.

混沌是非线性系统的一种形式,在自然界中,混沌几乎无处不在. 早在 1989 年, Hubler 和 Lüscher 发表了控制混沌的第一篇文章[7]. 1990 年, Ott, Grebogi 和 Yorke 首先提出了著名的 OGY 混沌控制方法[8]. 之后,混沌控制的理论与应用研究蓬勃发展,人们提出了一系列控制混沌的方法: OPF 法、跟踪法、反馈法、自适应控制法、参数共振法、神经网络法、人工智能法、外加强迫法等等[9—18]. 混沌控制目标也由最初的不动点、低周期轨道的稳定发展到高周期轨道、准周期轨道的稳定;控制的对象也由最初的低维系统发展到高维系统,乃至于无穷维系统[19—21]. 混沌控制正在逐步形成系统化的理论体系.

对于分数阶混沌系统的控制问题也同样引起了众多研究者的重视. 而由于分数阶状态空间系统的研究起步较晚,分数阶状态空间系统的稳定性理论还处于发展、完善阶段,其控制方法也远没有整数阶状态空间系统的控制方法丰富. 因此本文在现有的理论基础上,提出了一种基于分数阶状态空间模型的稳定性判定定理,并将该理论应用于分数阶混沌控制中.

2. 分数阶微分

Riemann-Liouville 分数导数定义如下:

$$ {}_{\alpha}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (n-1 \leqslant p < n), \tag{1} $$

Caputo 分数导数定义如下:

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (n-1 \leqslant p < n), \tag{2} $$

(1),(2)式中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数

$$ \Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,\mathrm{d}x. \tag{3} $$

* 国家自然科学基金(批准号:F010303)和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

† E-mail: lilianhuang@163.com

Caputo 分数导数定义的最大优点是其初始值有明确的物理意义. 另外, 当 $p \to n, n \in Z$ 时, (1), (2)式为通常意义下整数阶积分和导数,因而整数阶微积分只是分数阶微积分的特例[22]. 本文均采用 Caputo 定义.

3. 状态空间描述

对于分数阶系统,可以用状态变量的分数阶导数来建模,得到规则的矩阵方程组,这种方法建模的优点是矩阵表达式形式简单,便于计算. 考虑分数阶微分方程

$$
\begin{aligned}
&(D^{\frac{n}{r}} + a_{n-1}D^{\frac{n-1}{r}} + \cdots + a_0 D^0)x(t)\\
&= (D^{\frac{m}{r}} + b_{m-1}D^{\frac{m-1}{r}} + \cdots + b_0 D^0)u(t), \qquad (4)
\end{aligned}
$$

其中, m, n, r 均为非负整数, $l-1 < \frac{n}{r} \leqslant l$, $l-1 < \frac{m}{r} \leqslant l$, $l \in N$, $D^{\frac{k}{r}}(0 < k < r)$ 为 Caputo 分数导数定义. 定义状态变量

$$
\begin{cases}
x_1(t) = x(t),\\
x_2(t) = D^{\frac{1}{r}}x_1(t) = D^{\frac{1}{r}}x(t),\\
\vdots\\
x_n(t) = D^{\frac{1}{r}}x_{n-1}(t) = D^{\frac{n-1}{r}}x(t),
\end{cases} \qquad (5)
$$

则系统的状态空间方程为

$$
\begin{cases}
D^{1/r}X(t) = AX(t) + BU(t),\\
y(t) = CU(t),
\end{cases} \qquad (6)
$$

其中 $X(t)$ 是状态变量, $U(t)$ 是控制变量, $y(t)$ 为输出.

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_0
\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1}
\end{bmatrix}. \qquad (7)
$$

从上式可以看出,若 A 中不包含状态变量,即 a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为常数,则系统(6)为线性的,反之(6)式为非线性系统.

4. 稳定性理论

1996 年, Matignon 研究了分数阶系统的稳定性理论并且给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件[23].

引理 1　考虑分数阶非线性系统

$$
D^{\alpha}X(t) = AX(t), \qquad (8)
$$

其中 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统状态变量, A 是系数矩阵,如果系数矩阵 A 的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| \geqslant \frac{\alpha\pi}{2}$, 则系统稳定.

分数阶非线性系统的稳定区域如图 1 所示,对于分数阶非线性系统如果其在平衡点处的 Jacobian 矩阵的所有特征值都在稳定区域内,则该平衡点为稳定的平衡点.

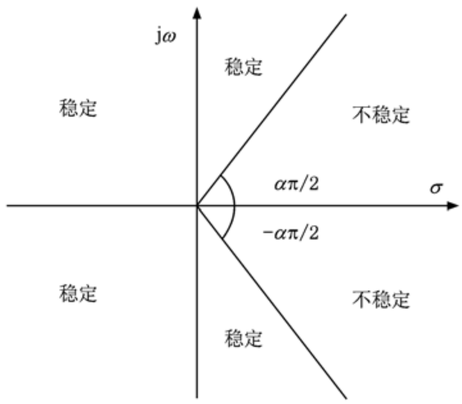

图 1　分数阶状态空间系统的稳定区间

下面给出类似 Lyapunov 函数的稳定性判定定理.

定理　对于真分数阶非线性系统

$$
D^{\alpha}X(t) = AX(t), 0 < \alpha < 1, \qquad (9)
$$

$\boldsymbol{A}$ 为平衡点处的 Jacobian 矩阵,若存在实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, 半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得下式成立:

$$
\begin{aligned}
&(D^{\alpha}X(t))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t) + X^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{Q}X(t) = 0,\\
&X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{H}}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

则系统(9)稳定.

证明　令 ξ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 则

$$
\boldsymbol{A}\xi = \lambda\xi, \xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \bar{\lambda}\xi^{\mathrm{H}}, \qquad (11)
$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 为实对称正定矩阵,故对于任意状态变量下式都成立:

$$
(D^{\alpha}X(t))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t) = X^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{P}D^{\alpha}X(t), \qquad (12)
$$

又由于 $\boldsymbol{Q}$ 为半正定矩阵,即 $-X^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{Q}X(t)\leqslant 0$,所以

$$(D^{\alpha}X(t))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t)\leqslant 0. \tag{13}$$

由(12),(13)式,将(10)式改写为

$$(D^{\alpha}X(t))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t)+X^{\mathrm{H}}(t)PD^{\alpha}X(t)\leqslant 0, \tag{14}$$

把系统(9)代入(14)式,得

$$(\boldsymbol{A}X(t))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t)+X^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}X(t)\leqslant 0, \tag{15}$$

整理得

$$X(t)^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}X(t)+X^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{P}AX(t)\leqslant 0, \tag{16}$$

$$X(t)^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})X(t)\leqslant 0. \tag{17}$$

把(17)式中的 $X^{\mathrm{H}}(t)$ 和 $X(t)$ 分别用 ξ^{H} 和 ξ 替换,不等式仍将成立

$$\xi^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\xi\leqslant 0, \tag{18}$$

对(18)式左边进行推导

$$\begin{aligned}
&\xi^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}P+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\xi\\
&=\xi^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}P\xi+\xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\xi\\
&=(A\xi)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\xi+\xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\xi\\
&=\bar{\lambda}\xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\xi+\xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\lambda\xi\\
&=(\bar{\lambda}+\lambda)\xi^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\xi.
\end{aligned} \tag{19}$$

由于,矩阵 $\boldsymbol{P}$ 正定,所以 $\xi^{\mathrm{H}}P\xi>0$; 再根据(18)式,可以得到下式:

$$\bar{\lambda}+\lambda\leqslant 0. \tag{20}$$

于是,λ 实部不大于零,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ 都满足 $|\arg(\lambda)|\geqslant\frac{\pi}{2}>\frac{\alpha\pi}{2}$,$0<\alpha<1$,根据引理,系统(9)稳定,证毕.

上述定理可以比较方便的判定一个分数阶非线性系统是否稳定,在实际应用中我们不需要计算平衡点,也不考虑 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否含有状态变量. 可以直接运用该定理选择控制量 $U(t)$,使一个不稳定的系统趋于稳定,这将在下一节中详细介绍,下面给出仿真实例.

5. 仿真实例

文献[24]用 Back-Stepping 方法对分数阶混沌系统进行同步控制,并取得了良好的效果. 本文将采用所提出的稳定性理论对分数阶统一混沌系统进行控制.

分数阶统一混沌系统的数学模型如下:

$$\begin{cases}
D^{\alpha}x_1=-(25a+10)x_1+(25a+10)x_2,\\
D^{\alpha}x_2=(28-35a)x_1+(29a-1)x_2-x_1x_3,\\
D^{\alpha}x_3=x_1x_2-(a+8)x_3/3.
\end{cases} \tag{21}$$

其中 $0<a\leqslant 1$,$0\leqslant a\leqslant 1$. 事实上,当 $0\leqslant a<0.8$ 时,系统是 Lorenz 系统,当 $a=0.8$ 时,系统是 Lü 系统,当 $0.8<a\leqslant 1$ 时,系统是 Chen 系统. 下面以该分数阶混沌系统作为受控系统,根据定理 1,设计控制项 $U(t)$,使该系统趋于稳定.

当受控系统加上控制项 $U(t)$ 后,系统变为如下形式,下面来选择控制项 $u_1(t)$,$u_2(t)$,$u_3(t)$,使得下式稳定.

$$\begin{cases}
D^{\alpha}y_1=-(25a+10)y_1+(25a+10)y_2-u_1(t),\\
D^{\alpha}y_2=(28-35a)y_1+(29a-1)y_2-y_1y_3-u_2(t),\\
D^{\alpha}y_3=y_1y_2-(a+8)y_3/3-u_3(t).
\end{cases} \tag{22}$$

若(22)式满足条件(10),即

$$\begin{aligned}
&(D^{\alpha}Y(t))^{\mathrm{H}}PY(t)+Y^{\mathrm{H}}(t)QY(t)=0,\\
&Y(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{H}}.
\end{aligned} \tag{23}$$

为方便计算,令 $\boldsymbol{P}$ 为单位实对称矩阵,由于 $\boldsymbol{Q}$ 为半正定矩阵,则

$$\begin{aligned}
&(D^{\alpha}Y(t))^{\mathrm{H}}Y(t)=-Y^{\mathrm{H}}(t)QY(t)\leqslant 0,\\
&Y(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{H}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

下面计算 $(D^{\alpha}Y(t))^{\mathrm{H}}Y(t)$.

$$\begin{aligned}
&(D^{\alpha}Y(t))^{\mathrm{H}}Y(t)\\
&=(25a+10)(y_1y_2-y_1^2)+(28-35a)y_1y_2\\
&\quad+(29a-1)y_2^2-y_1y_2y_3+y_1y_2y_3-\frac{(a+8)}{3}y_3^2\\
&\quad-y_1u_1(t)-y_2u_2(t)-y_3u_3(t)\\
&=(38-10a)y_1y_2-(25a+10)y_1^2+(29a-1)y_2^2\\
&\quad-\frac{a+8}{3}y_3^2-y_1u_1(t)-y_2u_2(t)-y_3u_3(t)\\
&=-(25a+10)y_1^2-\frac{a+8}{3}y_3^2+y_1((38-10a)y_2\\
&\quad-u_1(t))+y_2((29a-1)y_2-u_2(t))-y_3u_3(t).
\end{aligned} \tag{25}$$

由于 $0\leqslant a\leqslant 1$,因此上式中 $-(25a+10)y_1^2\leqslant 0$,$-\frac{a+8}{3}y_3^2\leqslant 0$.

当

$$\begin{cases}
u_1(t)=(38-10a)y_2,\\
u_2(t)=(29a-1)y_2,\\
u_3(t)=0,
\end{cases} \tag{26}$$

$(D^{\alpha}Y(t))^{\mathrm{T}}Y(t)=-(25a+10)y_1^2-\frac{a+8}{3}y_3^2\leqslant 0$. 根据定理,受控分数阶系统趋于稳定. 而且该控制项对于统一混沌模型的三种混沌状态都适用,下面分

别对分数阶 Chen 系统,Lorenz 系统及 Lü 系统进行数值仿真.

分数阶系统的仿真计算目前主要有两种,一种是预估-校正法,另一种是时域与复频域转换法,文献[25]证明了利用时域与复频域转换法进行仿真时会导致某些错误的结论,并且指出了最近有些研究者利用时域与复频域转换法得到的有些结论是不正确的[26]. 本文采用预估-校正法[27]对系统(1)数值仿真. 当分数阶统一混沌系统是 Chen 系统时,即取 $\alpha = 0.9$, $a = 1$,初始值 $Y(0) = (2,1,3)^{\mathrm{T}}$. 当 $t = 15$ 时,加入控制项

$$\begin{cases} u_1(t) = 28y_2, \\ u_2(t) = 28y_2,, \\ u_3(t) = 0, \end{cases}$$

得到图 2 所示的仿真结果.

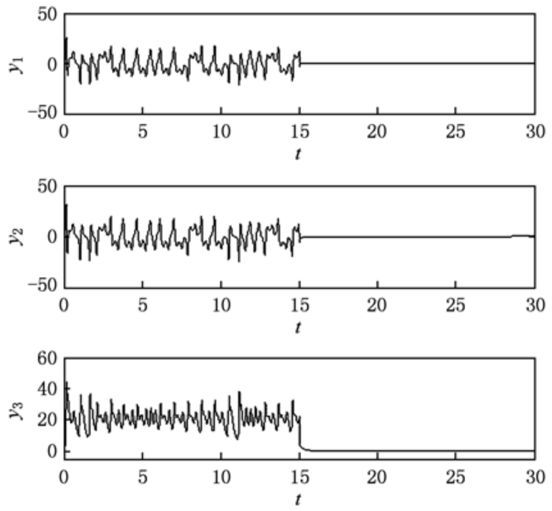

图 2　Chen 系统 $Y(t)$ 随时间 t 变化波形

当分数阶统一混沌系统是 Lü 系统时,即取 $\alpha = 0.9$, $a = 0.8$,初始值 $Y(0) = (0,1,3)^{\mathrm{T}}$. 当 $t = 15$ 时,加入控制项

$$\begin{cases} u_1(t) = 30y_2, \\ u_2(t) = 22.2y_2,, \\ u_3(t) = 0, \end{cases}$$

得到图 3 所示的仿真结果.

当分数阶统一混沌系统是 Lorenz 系统时,即取 $\alpha = 0.98$, $a = 0.2$,初始值 $Y(0) = (-3.5, 4.2, 2.5)^{\mathrm{T}}$. 当 $t = 15$ 时,加入控制项

$$\begin{cases} u_1(t) = 36y_2, \\ u_2(t) = 4.8y_2,, \\ u_3(t) = 0, \end{cases}$$

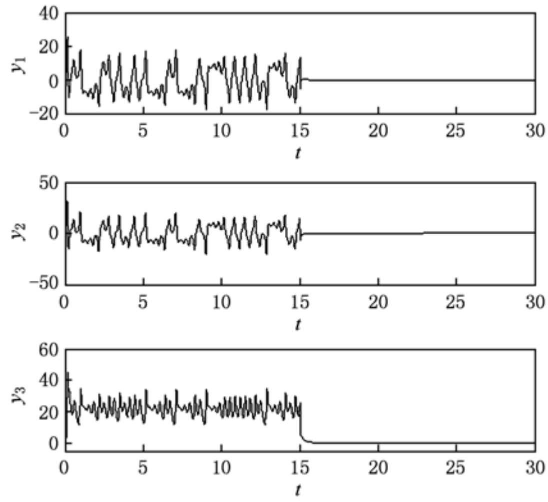

图 3　Lü 系统 $Y(t)$ 随时间 t 变化波形

得到图 4 所示的仿真结果.

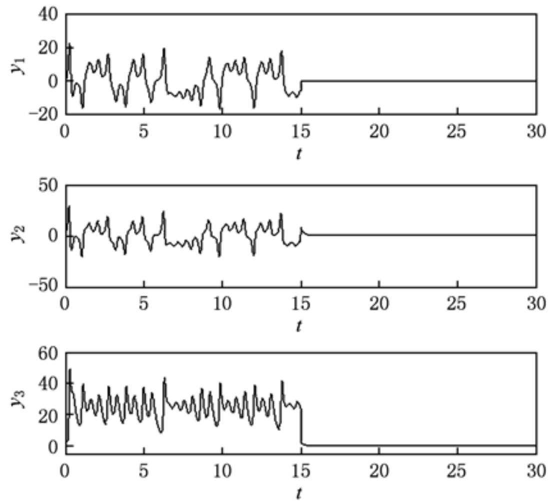

图 4　Lorenz 系统 $Y(t)$ 随时间 t 变化波形

从图 2—4 的仿真结果中可以看到,给分数阶统一混沌系统加上控制项 $U(t)$ 后,系统都会快速趋于稳定. 仿真结果验证了提出理论的正确性和通用性.

6. 结　论

本文基于分数阶状态空间系统模型,提出一种稳定性理论,这种理论以 Lyapunov 稳定性理论为依据,不用计算系统平衡点,可以方便地计算出控制项,对分数阶状态空间系统进行控制. 然后以分数阶统一混沌系统作为控制对象,将所提出的稳定性

理论应用于该系统的控制中,仿真结果验证了该理论的有效性. 该理论的成立对于将稳定性理论从整数阶扩展到分数阶具有理论意义,为分数阶状态空间系统的稳定性研究奠定了良好的基础.

[1] Chen J R, Tao R J 2001 *Journal of Shanghai University* **5** 292

[2] Abbisso S, Caponetto R 2001 *ISCAS* 2001, Ⅲ—688

[3] Wang F P, Guo J B, Wang Z J, Xiao D C, Li M T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 (in Chinese) [汪芙平、郭静波、王赞基、萧达川、李茂堂 2001 物理学报 **50** 1019]

[4] Cui B T, Lou X Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 520

[5] Cui B T, Ji Y, Qiu F 2009 *Chin. Phys.* B **18** 5203

[6] Wang F P, Wang Z J, Guo J B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 474 (in Chinese) [汪芙平、王赞基、郭静波 2002 物理学报 **51** 474]

[7] Hubler A, Helv 1989 *Phys. Acta* **62** 343

[8] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.*, **64** 1196

[9] Lu J A, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 492

[10] Wu Z Q, Yue D, Xu S F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1193 (in Chinese) [吴忠强、岳 东、许世范 2002 物理学报 **51** 1193]

[11] Gao X, Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 84 (in Chinese) [高心、刘兴文 2007 物理学报 **56** 84]

[12] Gu C M, Shen K 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 732 (in Chinese) [顾春明、沈 柯 1998 物理学报 **47** 732]

[13] Yu H J 2005 *Acta Phys. Sin* **54** 5044 (in Chinese) [于洪洁 2005 物理学报 **54** 5044]

[14] Hunt E R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1953

[15] Pyragas K 1992 *Phys. Lett.* A **170** 421

[16] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys.* B **17** 135

[17] Zhang H G, Fu J, Ma T D, Tong S C 2009 *Chin. Phys.* B **18** 969

[18] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 503

[19] Hu G, He K F 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 3794

[20] Auerbach D 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1184

[21] Hu G, Xiao J H, Gao J H 2000 *Phys. Rev.* E **62** 3043

[22] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press)

[23] Matignon D 1996 *IMACS*, *IEEE2SMC*, *Lille*, France 963

[24] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2009 物理学报 **58** 2235]

[25] Mohammad S T, Mohammad H 2007 *Physics Letters* A **367** 102

[26] Zhou P 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3252

[27] Li C P, Peng G J 2004 Chaos, *Soliton and Fractals* **22** 443

Stability of fractional state space system and its application to fractional order chaotic system*

Huang Li-Lian†　He Shao-Jie

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin　150001, China)

(Received 22 June 2010; revised manuscript received 31 July 2010)

Abstract

In this paper, an stability theorem is proposed for a fractional state space system based on Lyapunov stability theory. Controller can be achieved easily by this theory without calculating any equilibrium point. The fractional unified chaotic system is used to improve the stability theorem. The effectiveness of the theory is verified by the simulation results.

Keywords: fractional-order, state space system, stability, unified chaotic systems

PACS: 47.51.Df

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. F010303) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.

† E-mail: lilianhuang@163.com