物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 60, No. 5 (2011) 050202

# 广义 Birkhoff 系统的一类积分*

葛伟宽[1)†] 张 毅[2)]

1)(湖州师范学院物理系, 湖州 313000)

2)(苏州科技学院土木工程学院,苏州 215011)

(2010 年 6 月 29 日收到;2010 年 8 月 17 日收到修改稿)

将 Birkhoff 方程添加一附加项成为广义 Birkhoff 方程. 将 Birkhoff 方程的一类积分推广并应用于广义 Birkhoff 方程. 举例说明结果的应用.

**关键词**: Birkhoff 方程, 广义 Birkhoff 方程, 积分

**PACS**: 02.30.Jr, 02.30.Rz, 45.20.Jj

## 1. 引 言

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的自然推广,对 Birkhoff 系统的研究已取得重要进展[1—12]. 文献[1]证明,为将 $2n$ 个一阶微分方程表为 Birkhoff 方程,可由物理理由选择 Birkhoff 函数 $B$, 将方程表为相对函数组 $R_\mu$ 的偏微分方程. 由于这些方程是 Cauchy-Kovalevskaya 型的,因此总是有解的. 但用这种方法去解具体问题时,在大多数情形下会遇到极大困难. 文献[13]在研究了 Pfaff 作用量在广义准对称变换下的不变性时,提出在 Birkhoff 方程右端增加一个附加项 $-\Lambda_\mu$, 并称其为广义 Birkhoff 方程. 文献[14]将 Pfaff-Birkhoff 原理加以推广,再一次导出广义 Birkhoff 方程. 广义 Birkhoff 方程比 Birkhoff 方程更具普遍性. 而且, 由于广义 Birkhoff 方程比 Birkhoff 方程多出一项, 因而构造它们比构造 Birkhoff 方程要容易得多. 对广义 Birkhoff 方程的研究已取得一定进展[15—23]. 文献[3]给出 Birkhoff 系统的一类守恒量. 本文将这类守恒量推广并应用于广义 Birkhoff 系统.

## 2. 广义 Birkhoff 方程

广义 Birkhoff 方程有形式[13,14]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu,\quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n),\tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数, $R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组. $\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项. 用方程(1)描述状态的物理系统和描述运动的力学系统称为广义 Birkhoff 系统. 当 $\Lambda_\mu=0(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时,方程(1)成为 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0,\quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n).\tag{2}$$

因此,广义 Birkhoff 方程(1)比 Birkhoff 方程(2)理论上更为一般.

将 $2n$ 个一阶方程

$$\dot{a}^\mu-F_\mu(t,\boldsymbol{a})=0\tag{3}$$

表为方程(2)有较大困难,但表为方程(1)却比较容易,因为有较大自由去选择附加项 $\Lambda_\mu$. 因此,广义 Birkhoff 方程(1)比 Birkhoff 方程(2)容易构造.

## 3. Birkhoff 系统的一类积分

文献[3]对 Birkhoff 系统(2)给出如下定理:

如果 Birkhoff 方程允许有形如

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{a}),\quad a^{\mu *}=a^\mu+\varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a})\tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10772025,10932002)资助的课题.

† E-mail: gwk@hutc.zj.cn

 

的对称变换,那么形如

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial a^\nu} + S\ln\sqrt{|\det\Omega|} = \text{const.} \tag{5}$$

的关系是方程的第一积分,其中

$$S_\mu = \xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0, \quad S = S_\mu\left(\frac{\partial}{\partial a^\mu}\right),$$

$$(\Omega) = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right). \tag{6}$$

上述定理的证明过程主要用到 $\Omega$ 的性质和方程的 Lie 对称性. 因此,这个定理也可用于寻求广义 Birkhoff 系统的积分.

## 4. 广义 Birkhoff 系统的一类积分

假设方程(1)是非奇异的,即设

$$\det\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right) \neq 0, \tag{7}$$

则可解出所有的 $\dot{a}^\mu$, 记作

$$\dot{a}^\mu = f_\mu(t, \boldsymbol{a}), \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{8}$$

其中

$$f_\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right), \tag{9}$$

$$\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{10}$$

方程(8) Lie 对称性的确定方程可表为

$$\dot{\xi}_\mu - f_\mu \dot{\xi}_0 = \frac{\partial f_\mu}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial f_\mu}{\partial a^\nu}\xi_\nu,$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{11}$$

于是有如下结果:

对于广义 Birkhoff 系统(1),如果无限小生成元 $\xi_0, \xi_\mu$ 满足方程(11),则系统有形如式(5)的第一积分.

## 5. 算例

为说明上述结果,给出一典型算例.

Hojman-Urrutia 方程为[1]

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \ \ddot{y} + y = 0. \tag{12}$$

令

$$a^1 = x, \ a^2 = y, \ a^3 = \dot{x}, \ a^4 = \dot{y},$$

则方程(12)表为

$$\dot{a}^1 = a^3, \quad \dot{a}^2 = a^4, \quad \dot{a}^3 = -a^4, \quad \dot{a}^4 = -a^2.$$

现将其化为广义 Birkhoff 系统,有

$$R_1 = \frac{1}{2}a^2, \ R_2 = -\frac{1}{2}a^1,$$

$$R_3 = -\frac{1}{2}a^4, \ R_4 = \frac{1}{2}a^3$$

$$B = a^2 a^3 + \frac{1}{2}(a^4)^2, \ \Lambda_1 = a^4,$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_4 = 0, \ \Lambda_3 = 2a^2, \tag{13}$$

确定方程(11)给出

$$\dot{\xi}_1 - a^3\dot{\xi}_0 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 - a^4\dot{\xi}_0 = \xi_4,$$

$$\dot{\xi}_3 + a^4\dot{\xi}_0 = -\xi_4, \quad \dot{\xi}_4 + a^2\dot{\xi}_0 = -\xi_2. \tag{14}$$

注意到

$$\det(\Omega) = 1, \tag{15}$$

积分式(5)给出

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial a^\nu} = \text{const.} \tag{16}$$

可找到方程(14)的如下解:

$$\begin{aligned} &\xi_0 = 0, \ \xi_1 = t(a^2 + a^3)^2, \\ &\xi_3 = (a^2 + a^3)^2, \ \xi_2 = \xi_4 = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\xi_0 = 0, \ \xi_1 = [a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t]^2, \\ &\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\xi_0 = 0, \ \xi_1 = t[a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t]^2, \\ &\xi_3 = [a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t]^2, \\ &\xi_2 = \xi_4 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

将(17)—(19)式代入(16)式,分别得到积分

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial a^1} + \frac{\partial \xi_3}{\partial a^3} = 2(a^2 + a^3) = \text{const.} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial a^1} = 2[a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t] = \text{const.} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial a^1} + \frac{\partial \xi_3}{\partial a^3} = 0, \tag{22}$$

其中(22)式为平凡积分.

## 6. 结 论

文献[3]给出的一类积分不仅适合 Birkhoff 系统,而且可应用于广义 Birkhoff 系统. 考虑广义 Birkhoff 系统比 Birkhoff 系统易于构造且更具一般性,本文的结论更具有普遍意义.

[1] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (NewYork: Springer-Verlag)

[2] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京:北京理工大学出版社)]

[3] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan AM 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: RZUFN) (in Russian)

[4] Chen X W 2002 *Global Analysis of Birkhoff System* (Kaifeng: Henan Univ. Press) (in Chinese) [陈向炜 2002 Birkhoff 系统的全局分析 (开封:河南大学出版社)]

[5] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张 毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[6] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]

[7] Zhang H B, Gu S L 2002 *Chin. Phys.* **11** 765

[8] Luo S K, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[9] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[10] Fu J L, Chen L Q, Xue F P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2664 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、谢凤萍 2003 物理学报 **52** 2664]

[11] Zhang P Y, Fang J H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3813 (in Chinese) [张鹏玉、方建会 2006 物理学报 **55** 3813]

[12] Mei F X, Gang T Q, Xie J F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1678

[13] Mei F X 1993 *Sience in China Ser.* A **36** 1456

[14] Mei F X, Zhang Y F, He G, Gang T Q, Xie J F 2007 *J. of Beijing Institute of Technology* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔、张永发、何 光、江铁强、解加芳 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

[15] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4649 (in Chinese) [梅凤翔、解加芳、江铁强 2008 物理学报 **57** 4649]

[16] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4657 (in Chinese) [梅凤翔、蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4657]

[17] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Mech. Sin.* **24** 583

[18] Ge W K, Mei F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 699 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2009 物理学报 **58** 699]

[19] Zhang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7436 (in Chinese) [张 毅 2009 物理学报 **58** 7436]

[20] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3155

[21] Li YM, Mei F X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5219 (in Chinese) [李彦敏、梅凤翔 2010 物理学报 **59** 5219]

[22] Mei F X, Wu H B 2010 *Chin. Phys.* B **19** 050301

[23] Li YM, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080302

# An integral of a generalized Birkhoff system*

Ge Wei-Kuan[1)†] Zhang Yi[2)]

1) (*Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

2) (*College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 29 June 2010; revised manuscript received 17 August 2010)

Abstract

The generalized Birkhoff equations are obtained by using supplementary terms added to the Birkhoff equations. An integral of the Birkhoff equations can be used to the generalized Birkhoff equations. An example is given to illustrate the application of the result.

**Keywords**: Birkhoff equations, generalized Birkhoff equations, integral

**PACS**: 02.30.Jr, 02.30.Rz, 45.20.Jj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10772025, 10932002).

† E-mail: gwk@hutc.zj.cn