具有控制项的弱非线性发展方程行波解*

莫嘉琪[1)†] 程荣军[2)] 葛红霞[3)]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖 241003)

2)(浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

3)(宁波大学理学院,宁波 315211)

(2010 年 8 月 29 日收到;2010 年 9 月 14 日收到修改稿)

利用解析方法研究了一类具有控制项的弱非线性发展方程. 由摄动理论得到了相应方程的渐近解,并研究了控制项对渐近解的影响.

关键词: 发展方程, 扰动, 控制函数

PACS: 02.30.Mv

1. 引 言

非线性发展方程存在于物理学、力学和其他自然科学领域的许多应用中. 近几年来在激波[1—4]、光波散射[5, 6]、量子力学[7—9]、大气物理[10, 11]、爆炸与燃烧[12]等方面都涉及到这一方面的研究. 非线性发展方程行波解的各种定量和定性的方法也大量涌现. 作者等[13—22]也利用微分不等式、同伦变换、不动点原理等理论和方法在大气物理、海洋力学、激波、孤子理论、反应扩散等问题中研究了一系列非线性问题. 本文是利用摄动方法研究了一类具有控制项的弱非线性发展方程.

发展方程行波解的摄动渐近方法,其要点是用摄动理论的渐近展开式将非线性行波方程转化为线性方程求解. 这种方法的优点在于思路简明、计算简单,可得到解的较高近似度. 另一个突出的优点是这样求得的解保留了相应的解析特性. 因而不但能对得到的结果直接进行定量方面的分析,而且还能进行更深入的定性方面的解析分析. 具有较广泛的研究前景.

非线性发展方程代表的是一类相应自然现象的高度精简和浓缩. 从进一步研究的意义看,有必要研究它代表真实自然现象的基本理论. 本文就是在这样的背景下提出来的.

讨论如下一类扰动发展方程:

$$u_{tt} - u_{xx} + Lu = \varepsilon g(u, x + at), \tag{1}$$

其中 ε 为小的正参数, $a \neq 1$ 为常数, g 为扰动控制函数,设当 $|x + at| < A$ 时它是关于其变量为解析的函数, 当 $|x + at| \geqslant A$ 时, $g \equiv B$, 而算子 L 为

$$Lu = mu_t + nu_x + cu,$$

这里 A, B, m, n, c 均为常数.

在方程(1)中,作自变量的行波变换

$$\xi = x + at,$$

其中 a 为行波的波速. 这时方程(1)为

$$(a^2 - 1)u_{\xi\xi} + (am + n)u_\xi + cu = \varepsilon g(u, \xi). \tag{2}$$

对应与(2)式的退化方程为

$$(a^2 - 1)u_{\xi\xi} + (am + n)u_\xi + cu = 0. \tag{3}$$

不难得到方程(3)的解为

$$u(\xi) = C_1 \exp r_1 \xi + C_1 \exp r_2 \xi, \tag{4}$$

其中 $C_i (i = 1,2)$ 为任意常数, 而 $r_i (i = 1,2)$ 为特征根

$$t_{1,2} = \frac{-(am + n) \pm \sqrt{(am + n)^2 - 4c(a^2 - 1)}}{2(a^2 - 1)}. \tag{5}$$

* 国家自然科学基金(批准号:40876010, 40906013), 中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08), 公益性行业科研专项(批准号: GYHY200806010), LASG 国家重点实验室专项经费, 上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号: E03004)和宁波市自然科学基金(批准号:2009A610014, 2009A610154)资助的课题.

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

2. 行波渐近解

为了进一步求得方程(2)的行波渐近解 $u(\xi,\varepsilon)$, 设

$$u(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\xi)\varepsilon^i . \qquad (6)$$

将(6)式代入方程(2), 按 ε 展开非线性项, 合并 ε 的同次幂的系数, 对于 $\varepsilon^i(i = 0,1,2,\cdots)$ 的系数得

$$(a^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\xi^2} + (am+n)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\xi} + cu_0 = 0, \qquad (7)$$

$$(a^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\xi^2} + (am+n)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\xi} + cu_1 = g(u_0,\xi), \qquad (8)$$

$$(a^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}\xi^2} + (am+n)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\xi} + cu_2 = g_u(u_0,\xi)u_1, \qquad (9)$$

$$(a^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}\xi^2} + (am+n)\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\xi} + cu_i = G_i,\ i = 3,4,\cdots \qquad (10)$$

其中

$$G_i = \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{\partial^{i-1}}{\partial\varepsilon^{i-1}}g\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varepsilon^k\right]_{\varepsilon=0},\quad i = 3,4,\cdots \qquad (11)$$

为逐次已知的函数.

显然, 方程(7)的解就是

$$u_0(\xi) = C_{01}\exp r_1\xi + C_{01}\exp r_2\xi, \qquad (12)$$

其中 $C_{0i}(i = 1,2)$ 为任意常数, 而 $r_i(i = 1,2)$ 由(5)式表示.

方程(8), (9), (10)的解分别为

$$u_1(\xi) = C_{11}\exp r_1\xi + C_{21}\exp r_2\xi + \frac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}} \times \int_0^{\xi}[\exp r_1(\xi-\eta) - \exp r_2(\xi-\eta)]g(u_0(\eta),\eta)\mathrm{d}\eta, \qquad (13)$$

$$u_2(\xi) = C_{21}\exp r_1\xi + C_{21}\exp r_2\xi + \frac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}} \times \int_0^{\xi}[\exp r_1(\xi-\eta) - \exp r_2(\xi-\eta)] \times g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta)\mathrm{d}\eta, \qquad (14)$$

$$u_i(\xi) = C_{i1}\exp\lambda_1\xi + C_{i1}\exp\lambda_1\xi + \frac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}} \times \int_0^{\xi}[\exp r_1(\xi-\eta) - \exp r_2(\xi-\eta)]G_i(\eta,\eta)\mathrm{d}\eta.\quad i = 3,4,\cdots, \qquad (15)$$

于是, 由(6), (12)—(15)式, 便得到方程(2)解的 n 次形式渐近展开式 $\bar{u}_n(\xi,\varepsilon)$,即

$$\bar{u}_n(\xi,\varepsilon) = C_1(\varepsilon\exp r_1\xi + C_2(\varepsilon)\exp r_2\xi + \frac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}} \times \int_0^{\xi}[\exp r_1(\xi-\eta) - \exp r_2(\xi-\eta)] \times [\varepsilon g(u_0(\eta),\eta) + \varepsilon^2 g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta) + \sum_{i=3}^{n}G_i(\eta)\varepsilon^i]\mathrm{d}\eta + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad (16)$$

其中 $C_i(\varepsilon)(i = 1,2)$ 为任意常数, 而 $r_i(i = 1,2)$ 由(5)式表示, $G_i(i = 3,4,\cdots)$ 由(11)表示.

利用不动点定理, 我们可以证明, 表示(16)式为在 $|\xi|\leqslant M$ (M 为任意大的正常数)上关于扰动发展方程(2)行波解为一致有效的渐近展开式.

再将行波变换 $\xi = x + at$ 代入(16)式, 我们便得到控制发展方程(1)在 $|x + at|\leqslant M$ 上的行波解的一致有效的渐近展开式.

3. 解的控制式

由扰动项控制函数假设,并由(13)—(16)式, 具有控制项的非线性发展方程(1)解各次近似的渐近展开式 $\bar{u}_i(t,x,\varepsilon)(i = 1,2,\cdots)$ 分别为

$$\bar{u}_1(t,x,\varepsilon) = C_1(\varepsilon)\exp r_1(x+at) + C_2(\varepsilon)\exp r_2(x+at)$$

$$
+\begin{cases}
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\displaystyle\int_0^{A+at}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)-\eta)] \\
\times\varepsilon g(u_0(\eta),\eta)\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^2),\qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\Big[(\dfrac{B}{r_1}(1-\exp r_1((x+at)-A)) \\
-\dfrac{B}{r_2}(1-\exp r_2((x+at)-A)) \\
+\varepsilon\displaystyle\int_0^{A}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)\xi-\eta)]g(u_0(\eta),\eta)\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^2), \\
\qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,
\end{cases}\tag{17}
$$

$$
\bar{u}_2(t,x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)\exp r_1(x+at)+C_2(\varepsilon)\exp r_2(x+at)
$$

$$
+\begin{cases}
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\displaystyle\int_0^{A+at}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)-\eta)] \\
\times[\varepsilon g(u_0(\eta),\eta)+\varepsilon^2 g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta)]\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^3),\qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\Big[(\dfrac{B}{r_1}(1-\exp r_1((x+at)-A)) \\
-\dfrac{B}{r_2}(1-\exp r_2((x+at)-A)) \\
+\displaystyle\int_0^{A}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)\xi-\eta)][\varepsilon g(u_0(\eta),\eta) \\
+\varepsilon^2 g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta)]\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^3),\qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,
\end{cases}\tag{18}
$$

$$
\bar{u}_n(t,x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)\exp r_1(x+at)+C_2(\varepsilon)\exp r_2(x+at)
$$

$$
+\begin{cases}
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\displaystyle\int_0^{A+at}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)-\eta)] \\
\times[\varepsilon g(u_0(\eta),\eta)+\varepsilon^2 g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta)]\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^{n+1}),\qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\
\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\Big[(\dfrac{B}{r_1}(1-\exp r_1((x+at)-A)) \\
-\dfrac{B}{r_2}(1-\exp r_2((x+at)-A)) \\
+\displaystyle\int_0^{A}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)\xi-\eta)][\varepsilon g(u_0(\eta),\eta) \\
+\varepsilon^2 g_u(u_0(\eta),\eta)u_1(\eta)+\displaystyle\sum_{i=3}^{n}G_i(\eta)\varepsilon^i]\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^{n+1}),\qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,
\end{cases}\tag{19}
$$

其中 $C_i(i=1,2)$ 为任意常数, u_0 由(12)式表示. 将 $\xi=x+at$ 分别代入(17)—(19)式, 便可以得到具有控制项的扰动发展方程(1)解的各次近似的渐近解.

4. 举　　例

若在扰动发展方程(1)中的控制项 g 为; 当 $x+at<A$ 时, $g(u,\varepsilon)=\exp u$. 这时由(17), (18)式

可分别得到方程(1)解的一次，二次行波渐近展开式 $\bar{u}_1(t,x,\varepsilon)$ 和 $\bar{u}_2(t,x,\varepsilon)$：

$$\bar{u}_1(t,x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)\exp r_1(x+at)+C_2(\varepsilon)\exp r_2(x+at)$$
$$+\begin{cases}\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\displaystyle\int_0^{A+at}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)-\eta)] \\ \times\varepsilon\exp u_0(\eta)\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^2),\qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\ \dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\Big[(\dfrac{B}{r_1}(1-\exp r_1((x+at)-A)) \\ -\dfrac{B}{r_2}(1-\exp r_2((x+at)-A)) \\ +\varepsilon\displaystyle\int_0^{A}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)\xi-\eta)]\exp u_0(\eta))\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^2), \\ \qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,\end{cases}\tag{20}$$

$$\bar{u}_2(t,x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)\exp r_1(x+at)+C_2(\varepsilon)\exp r_2(x+at)$$
$$+\begin{cases}\dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\displaystyle\int_0^{A+at}[\exp r_1((x+at)-\eta)-\exp r_2((x+at)-\eta)] \\ \times\varepsilon\exp u_0(\eta)(1+\varepsilon u_1(\eta))\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^3),\qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\ \dfrac{(a^2-1)}{\sqrt{(am+n)^2-4c(a^2-1)}}\Big[(\dfrac{B}{r_1}(1-\exp r_1((x+at)-A)) \\ -\dfrac{B}{r_2}(1-\exp r_2((x+at)-A))+\varepsilon\displaystyle\int_0^{A}[\exp r_1((x+at)-\eta) \\ -\exp r_2((x+at)\xi-\eta)]\exp u_0(\eta)(1+\varepsilon u_1(\eta))\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^3), \\ \qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,\end{cases}$$

其中 $C_i(i=1,2)$ 为任意常数，u_0 由(12)式表示.

5. 讨　　论

由上述例题的渐近式还可对特殊的控制发展方程作更具体的情况进行讨论.

1)在方程的系数中，若 $m=n=0,c=1,a^2<1$，此时特征根 $r_{1,2}=\mp\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. 于是由(20)式，可得发展方程控制解的一次渐近展开式：

$$\bar{u}_1(t,x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)\exp\frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}(x+at)+C_2(\varepsilon)\exp\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(x+at)$$
$$+\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{1-a^2}}{2}\displaystyle\int_0^{A+at}\Big[\exp\frac{-((x+at)-\eta)}{\sqrt{1-a^2}}-\exp\frac{(x+at)-\eta}{\sqrt{1-a^2}}\Big]\exp u_0(\eta)\mathrm{d}\eta+O(\varepsilon^2), \\ \qquad |x+at|\leqslant A,0<\varepsilon\ll 1, \\ \dfrac{-\sqrt{1-a^2}}{2}\Big[\dfrac{-B}{\sqrt{1-a^2}}\Big(\Big(1-\exp\dfrac{-((x+at)-A)}{\sqrt{1-a^2}}\Big)+\dfrac{B}{\sqrt{1-a^2}}\Big(1-\exp\dfrac{(x+at)-A}{\sqrt{1-a^2}}\Big)\Big) \\ +\varepsilon\displaystyle\int_0^{A}\Big[\exp\frac{-((x+at)-\eta)}{\sqrt{1-a^2}}-\exp\frac{(x+at)-\eta}{\sqrt{1-a^2}}\Big]\exp u_0(\eta)\mathrm{d}\eta\Big]+O(\varepsilon^2), \\ \qquad |x+at|>A,0<\varepsilon\ll 1,\end{cases}$$

其中, $C_i(i=1,2)$ 为任意常数,

$$u_0(\eta) = C_1(\varepsilon)\exp\frac{\eta}{\sqrt{1-a^2}} + C_2(\varepsilon)\exp\frac{-\eta}{\sqrt{1-a^2}}.$$

由上式不难看出, 发展方程(1)的一次控制渐近行波解是非振动型的.

2) 在方程的系数中, 若 $m=n=0, a^2>1$, 此时特征根 $r_{1,2}=\pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{a^2-1}}$, 于是由(20)式, 可得发展方程控制解的一次渐近展开式

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(t,x,\varepsilon) &= \bar{C}_1(\varepsilon)\sin\frac{\mathrm{i}(x+at)}{\sqrt{a^2-1}} + \bar{C}_2(\varepsilon)\cos\frac{\mathrm{i}(x+at)}{\sqrt{a^2-1}} \\ &+ \begin{cases} \frac{\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}}{2}\int_0^{A+at}\left[\exp\frac{\mathrm{i}((x+at)-\eta)}{\sqrt{a^2-1}} - \exp\frac{-\mathrm{i}((x+at)-\eta)}{\sqrt{a^2-1}}\right]\varepsilon\exp u_0(\eta)\mathrm{d}\eta + O(\varepsilon^2), \\ \qquad |x+at|\leqslant A, 0<\varepsilon\ll 1, \\ \frac{\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}}{2}\left[\frac{B}{\sqrt{a^2-1}}\left(1-\exp\frac{\mathrm{i}((x+at)-A)}{\sqrt{a^2-1}}\right) - \frac{B}{\sqrt{a^2-1}}\left(1-\exp\frac{-\mathrm{i}((x+at)-A)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\right] \\ \quad + \varepsilon\int_0^{A}\left[\exp\frac{\mathrm{i}((x+at)-\eta)}{\sqrt{a^2-1}} - \exp\frac{-\mathrm{i}((x+at)-\eta)}{\sqrt{a^2-1}}\right]\exp u_0(\eta))\mathrm{d}\eta] + O(\varepsilon^2), \\ \qquad |x+at|>A, 0<\varepsilon\ll 1, \end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\bar{C}_i(i=1,2)$ 为任意常数,

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(\eta) &= \bar{C}_1(\varepsilon)\sin\frac{x+at}{\sqrt{1-a^2}} \\ &+ \bar{C}_2(\varepsilon)\cos\frac{x+at}{\sqrt{1-a^2}}.\end{aligned}$$

由上式不难看出, 发展方程(1)的一次控制行波解是有界振动型的.

同样, 我们能够得到更高次控制渐近行波解的性态. 并且还可讨论其它特殊情形下的控制行波解的渐近性态. 在此不再进行详细讨论.

6. 结　论

由控制发展方程(1)左端的结构及其控制函数关于变元的性态,我们能够得到所期望的渐近解的性态. 这对一些具体的物理模型是十分需要的, 而且是有很大的使用价值.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]

[4] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[5] Pan L X, Zhuo W M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明 2005 物理学报 **54** 1]

[6] Tang R R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 445 (in Chinese) [唐荣荣 2005 物理学报 **55** 445]

[7] Pan L X, Liu J L, Li S S, Niu Z C, Feng S L, Zheng H Z 2002 *Science in China* A **32** 556 (in Chinese) [潘留仙、金　龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚值 2002 中国科学 A **32** 556]

[8] Lin Y H, Ji Z Z, Zeng Q C 1999 *Prog. Nat. Sci.* **9** 532

[9] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Zhang X 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 1326 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌、张　昕 2002 自然科学进展 **12** 1326]

[10] Lin Y H, Ceng Q C 1999 *Prog. Nat. Sci.* **9** 211

[11] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[12] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y, He X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1668 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩、贺贤士 2003 物理学报 **52** 1668]

[13] Mo J Q 2009 *Science in China* G **52** 1007

[14] Mo J Q, Lin W T 2010 *J. Sys. Sci. & Complexity* **20** 119

[15] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[19] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202

[16] Mo J Q, Liu S D, Tang R R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4403 (in Chineae) [莫嘉琪、刘树德、唐荣荣 2010 物理学报 **59** 4403]

[17] Mo J Q, Yao J S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5190 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2010 物理学报 **59** 5190]

[18] Mo J Q, Chen X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2910(in Chinese) [莫嘉琪、陈贤峰 2010 物理学报 **50** 2919]

[20] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440

[21] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[22] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

Travelling wave solution of the weakly nonlinear evolution equation with control term*

Mo Jia-Qi[1)†] Cheng Rong-Jun[2)] Ge Hong-Xia[3)]

1) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003, *China*)

2) (*Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo* 315100, *China*)

3) (*Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)

(Received 29 August 2010; revised manuscript received 14 September 2010)

Abstract

A weakly nonlinear evolution equation with control term is considered using the analytic method. From the perturbation theory, the solution of the corresponding equation is obtained. And the functions of asymptotic solution for the equation are studied.

Keywords: evolution equation, perturbation, control function

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40876010, 40906013), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2 – YW-Q03-08), the R & D Special Fund for Public Welfare Industry (Meteorology) (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Ningbo (Grant Nos. 2009A610014, 2009A610154).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn