

(2 + 1) 维破裂孤子方程的多方孤子解及其混沌行为*

雷军 马松华[†] 方建平

(浙江丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2010年7月28日收到; 2010年8月7日收到修改稿)

利用投射方程法和变量分离法, 得到(2 + 1)维破裂孤子方程的新显式精确解. 根据得到的孤立波解, 利用 Weierstrass 函数, 构造出多方孤子局域结构. 利用两个混沌系统研究了破裂孤子方程的混沌行为.

关键词: 投射方程法, 破裂孤子方程, 多方孤子, 混沌行为

PACS: 03.40.Kf, 03.65.Ge, 05.45.Yv

1. 引言

非线性科学是现代科学的核心, 在自然科学中许多现象, 如孤立波、分形、混沌、吸引子和逆序结构等都是非线性问题, 非线性可以产生本质上全新的现象, 而这些现象不可能由线性模型出发的微扰理论得到, 用非线性化模型来研究客观世界是科学发展的必然. 而许多非线性现象的描述都涉及到孤子方程, 近年来, 随着人们对非线性理论研究的不断深入, 许多求解非线性孤子方程的新方法也被提出, 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、(G'/G) 展开法、同伦分析法、三角函数法和投射方程法^[1-16]等. 人们也在不同的非线性系统中得到了许多局域激发结构, 如 dromion 解、dromion lattice 解、ring soliton 解、peakon 解和 foldon 解等等^[17-28]. 寻找非线性方程的精确解, 研究其局域激发模式始终是非线性理论工作者研究的重要课题.

2. (2 + 1) 维破裂孤子方程的孤波解

本文的工作是将变系数的投射方程法和变量分离法运用到著名的(2 + 1)维破裂孤子方程

$$u_{xt} - 4u_{xy}u_x - 2u_{xx}u_y - u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

利用 Weierstrass 函数, 构造出多方孤子局域结构, 利用洛伦兹混沌系统和化学动力学混沌系统研究

孤子的混沌现象. 在文献[29]中, Zhang 利用变量分离法得到了破裂孤子方程的变量分离解, 构造出系统的多线孤子局域结构, 在文献[30]中, Ma 利用 Riccati 方程映射法求解了(2 + 1)维破裂孤子方程, 得到了湮没孤子解.

对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \phi^i(q(x)) + C_i(x) \phi^{i-1}(q(x)) \sqrt{\sigma + \phi^2(q(x))}, \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma\phi + \phi^2, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将(3)和(4)式代入(2)式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据投射方程(4)如下形式的通解就可以确定所求方程的解:

$$\phi = \frac{-\sigma e^{\sigma q + c\sigma}}{e^{\sigma q + c\sigma} - 1}, \quad \sigma \neq 0. \quad (5)$$

对(5)式进行适当变换, 可以得到如下的孤立波解:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right], & \sigma \neq 0, \\ -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right], & \sigma = 0. \end{cases} \quad (6)$$

为了寻找破裂孤子方程的新解, 我们将变系数的投射方程法用于(1)式, 并根据(3)式, 设解为

* 浙江省自然科学基金(批准号: Y6100257, Y604106), 浙江丽水学院自然科学基金(批准号: KZ09005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

$$u = f + g\phi(q) + h\sqrt{\sigma + \phi^2}, \quad (7)$$

这里, f, g, h 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数, 将 (7) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 $\phi^i (i = 1, 2, \dots)$ 前的系数, 令其等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得

$$f = -\frac{1}{16} \int \frac{-8q_{xy}q_xq_{xx} + 4q_x^3q_{xy}\sigma + 8q_x^2q_yq_{xx}\sigma - q_{xx}^2q_y}{q_x^2q_y} dx, \quad (8)$$

$$g = -q_x, \quad h = q_x.$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x) + \varphi(y - ct), \quad (9)$$

χ, φ 是所示变量的任意函数, c 是任意常数.

设 $\sigma \neq 0$, 可以得到破裂孤子方程如下两个孤波解:

$$u_1 = -\frac{1}{16} \int \frac{8\chi_x^2\chi_{xx}\sigma + 8\chi_x\chi_{xxx} + \chi_x^4\sigma^2 - 4\chi_{xx}^2 + 4\chi_x^2}{\chi_x^2} dx + \frac{1}{2}\chi_x\sigma \left\{ \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) \right] + \sqrt{\tanh\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right)^2 - 1} \right\}, \quad (10)$$

$$u_2 = -\frac{1}{16} \int \frac{8\chi_x^2\chi_{xx}\sigma + 8\chi_x\chi_{xxx} + \chi_x^4\sigma^2 - 4\chi_{xx}^2 + 4\chi_x^2}{\chi_x^2} dx + \frac{1}{2}\chi_x\sigma \left\{ \left[1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) \right] + \sqrt{\coth\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right)^2 - 1} \right\}, \quad (11)$$

3. (2 + 1) 维破裂孤子方程的 dromion 孤子和多方孤子解

由于 (10) 和 (11) 式中都包含有任意函数 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - ct)$, 使得系统的解变的相当丰富. 本文仅以孤波解 (11) 式的势函数为例, 研究破裂孤子方程的局域激发和混沌现象, 将 (11) 式对 y 求一阶导数, 有

$$U = u_{2y} = -\frac{1}{4}\sigma\chi_x\varphi_{(y-ct)} \times \operatorname{csch}\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) \times \left(\operatorname{csch}\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) \right). \quad (12)$$

3.1. dromion 孤子结构

在 (2 + 1) 维孤子系统中, 最简单的局域结构是钟状 dromion 孤子, 其特点是孤子的波幅在 x 方向和 y 方向均按指数规律递减. 例如在 (12) 式中, 取 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - ct)$ 为如下形式:

$$\chi(x) = 0.1 + \exp(x), \quad \varphi(y - ct) = 0.1 + \exp(y - ct), \quad (13)$$

可以得到一个 dromion 孤子结构, 如图 1 所示 (取 $c = 1, t = 0, \sigma = -1$).

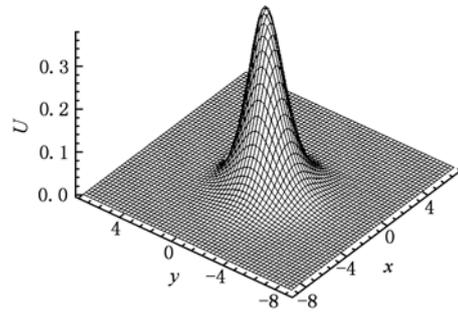


图 1 (12) 式利用 (13) 式得到的 dromion 孤子 (取 $c = 1, t = 0, \sigma = -1$)

3.2. 多方孤子解

另外, 如果取 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - ct)$ 为如下形式:

$$\chi(x) = 0.1 + 0.1\exp(\mathcal{R}(x, 1.0, 1.0)), \quad \varphi(y - ct) = 0.1 + 0.1\exp(\mathcal{R}(y - ct, 1.0, 1.0)), \quad (14)$$

这里的 \mathcal{R} 为 Weierstrassp 函数, 于是可以得到如图 2(a) 所示的“多方孤子”解 (取 $t = 0, \sigma = -1$), 从图中看到该孤子的结构呈现方形. 相应的等高线描述在图 2(b).

4. (2 + 1) 维破裂孤子方程的混沌行为

非线性系统在一定条件下均有可能产生混沌现象, 因此, 混沌理论的研究有着广泛的应用前景. 本文的以下部分分别利用洛伦兹混沌系统和化学动力学混沌系研究 (2 + 1) 维破裂孤子方程的混沌行为.

4.1. 洛伦兹混沌系统和破裂孤子方程的混沌行为

洛伦兹混沌系统的具体表示式为

$$m_j = -10m + 10n, \quad n_j = m(60 - l) - n, \quad l_j = mn - \frac{8}{3}l. \quad (15)$$

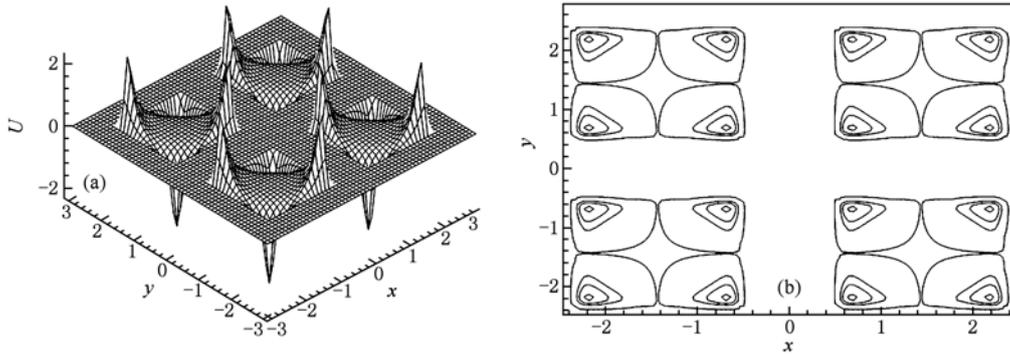


图2 (a)(12)式利用(14)式得到的方孤子解(取 $t = 0, \sigma = -1$); (b)为相应的等高线图 ($|U| = 0.01, 0.5, 1, 2$)

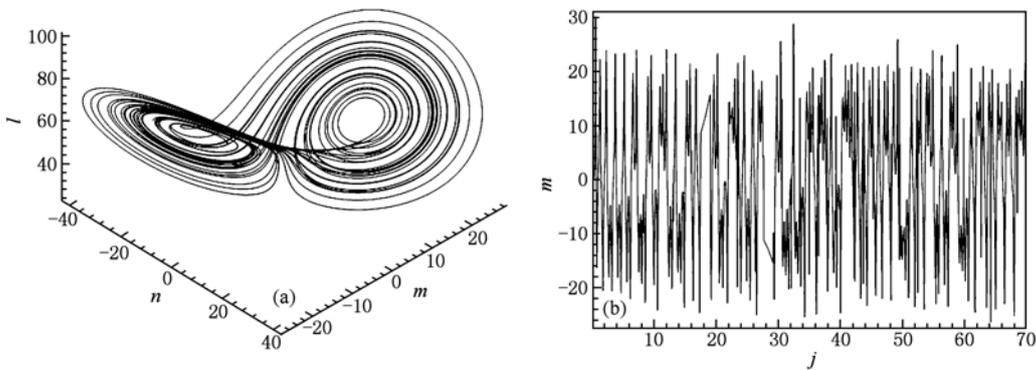


图3 (a)(15)式利用(16)式得到的吸引子; (b)根据(a)图描绘的混沌解 m 随 x 的变化图形

这里 $m, n,$ 和 l 是 j 的函数 ($j = x,$ 或 $j = y - ct$), 图3描绘了洛伦兹混沌系统的解, 初始条件为

$$m(0) = 1, n(0) = 1, l(0) = 1. \quad (16)$$

在(12)式中, 利用洛伦兹混沌系统, 取任意函数为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 + 0.1m(x), \\ \varphi(y - ct) &= 1 + 0.1\exp(y - ct), \end{aligned} \quad (17)$$

于是, 可以得到如图4(a)所示的混沌线孤子(取 $t = 2, c = 1, \sigma = -1$). 从图4(a)可以看到, 虽然在 y 方向还是局域的, 而在 x 方向, 函数 U 的图象中的波峰、形状都已呈现混沌行为.

此外, 如果利用洛伦兹混沌系统, 取任意函数为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 + 0.1m(x), \\ \varphi(y - ct) &= 1 + 0.1m(y - ct), \end{aligned} \quad (18)$$

可以得到如图4(b)所示的混沌解(取 $t = 0, \sigma = -1$). 从图4(b)可以看到, 函数 U 不论在 x 方向还是 y 方向都呈现混沌行为.

4.2. 化学动力学混沌系统和破裂孤子方程的混沌行为

化学动力学混沌系统的具体表示式为

$$\begin{aligned} m_j &= m(A_1 - k_1 - n - l) + k_2 n^2 + A_3, \\ n_j &= n(m - k_2 n - A_5) + A_2, \\ l_j &= l(A_4 - m - k_3 l) + A_3, \end{aligned} \quad (19)$$

这里 $m, n,$ 和 l 是 j 的函数 ($j = x,$ 或 $j = y - ct$), 图5描绘了一个典型的化学动力学混沌系统的解, 具体参数为

$$\begin{aligned} A_1 &= 30, A_2 = A_3 = 0.01, A_4 = 16.5, \\ A_5 &= 10, k_1 = 0.25, k_2 = 0.001, k_3 = 0.5, \\ m(0) &= 1, n(0) = 1, l(0) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

图6(a), (b)是函数 U (12)式根据化学动力学混沌系统得到的混沌图像, χ 和 φ 的选择及参数 t, c 和 σ 的取值与前面都相同. 比较图4(a), (b)和图6(a), (b)可以发现, 一个非线性系统的混沌解可以利用不同的动力学混沌系统求得, 当然, 解的结果是不同的. 另外, 为了证明图4(b)和图6(b)所示

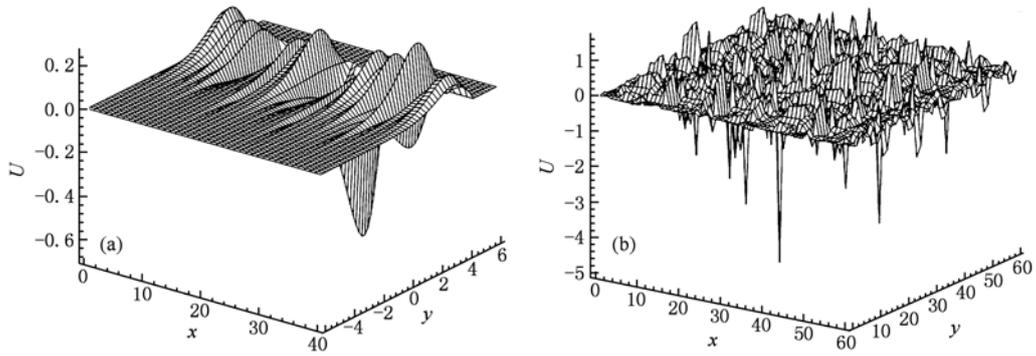


图4 (a) (12)式利用(17)式得到的混沌线孤子(取 $t = 2, c = 1, \sigma = -1$); (b) (12)式利用(18)式得到的混沌解(取 $t = 0, \sigma = -1$)

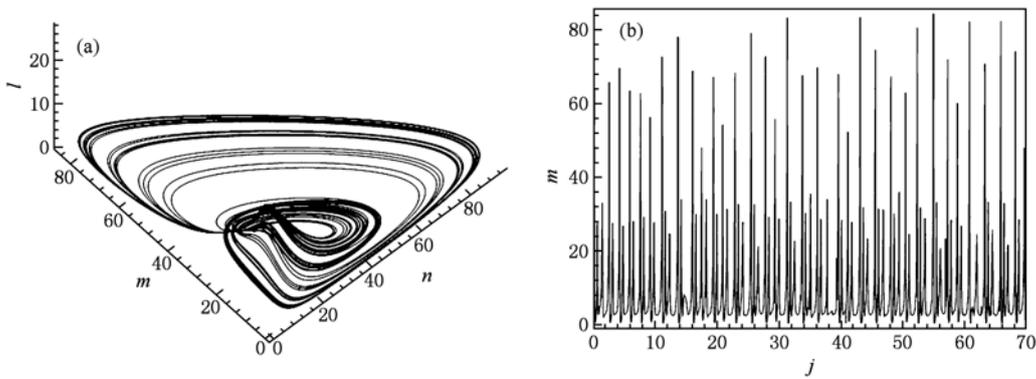


图5 (a) (19)式利用(20)式得到的吸引子; (b) 根据(a)图描绘的混沌解 m 随 x 的变化图形

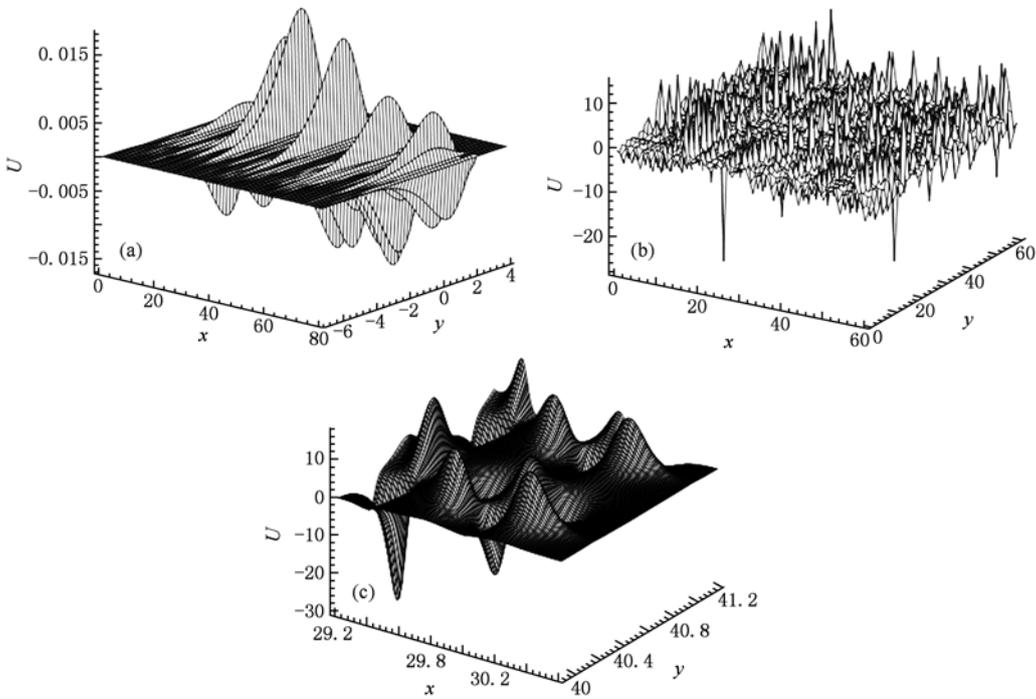


图6 (a) (12)式利用化学动力学混沌系统得到的混沌线孤子; (b) (12)式利用化学动力学混沌系统得到的混沌解; (c) (b)图中心微小部位的放大图像

的混沌图像都是大量孤子的峰值所为,我们将图 6 (b) 的中心微小部位进行放大,取 x 和 y 的坐标范围为 ($x \in [29.20, 30.60], y \in [39.92, 41.20]$) 如图 6(c) 所示. 从图中清楚的看出这是 dromion 孤子结构.

5. 结 论

求解非线性偏微分方程的精确解,研究其局域激发模式一直是非线性理论工作者研究的重要课题. 本文利用投射方程法和变量分离法,得到了 (2 + 1) 破裂孤子方程的精确解. 根据得到的孤立波

解,构造出钟状 dromion 孤子和多方孤子局域结构. 分别利用洛伦兹混沌系统和化学动力学混沌系研究了 (2 + 1) 维破裂孤子方程的混沌行为. 非线性系统在一定条件下均有可能产生混沌现象,因此,混沌理论的研究有着广泛的应用前景. 例如,利用混沌可实现保密通讯;可以解释经济领域的股票、期货的价格波动;探索全球的天气变化等. 对混沌现象的研究,将有助于人们以一种更接近实际的角度认识世界.

作者对张解放教授和张大军教授的建议和指导表示感谢.

- [1] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta. Phys. Sin.* **47** 0353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 0353]
- [2] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen A* **28** 7227
- [3] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [4] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487
- [5] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [6] Zhang D J 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1333
- [7] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [8] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [9] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [10] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *ActaPhys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]
- [11] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *ActaPhys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰、李帮庆、孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [12] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *ActaPhys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰、徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
- [13] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [14] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [15] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *ActaPhys. Sin.* **56** 0620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 0620]
- [16] Ma S H, Fang J P 2006 *ActaPhys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [17] Zheng C L, Zhang J F 2002 *ActaPhys. Sin.* **51** 2426 (in Chinese) [郑春龙、张解放 2002 物理学报 **51** 2426]
- [18] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *ActaPhys. Sin.* **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙、方建平、陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]
- [19] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *ActaPhys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [20] Liang L W, Li X D, Li Y X 2009 *ActaPhys. Sin.* **58** 2159 (in Chinese) [梁立为、李兴东、李玉霞 2009 物理学报 **58** 2159]
- [21] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *ActaPhys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [22] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *ActaPhys. Sin.* **56** 611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 611]
- [23] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1352
- [24] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [25] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys.* **17** 2767
- [26] Ma Y L, Li B Q 2010 *Appl. Math. Comput.* **216** 2137
- [27] Li B Q, Ma Y L 2010 *Z. Naturforsch.* **65a** 518
- [28] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512
- [29] Zhang J F 2007 *Inter. J. Mod. Phys. B* **17** 4376
- [30] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662

Multiple quadrate soliton solutions and chaotic behaviours of (2 + 1)-dimensional breaking soliton equation*

Lei Jun Ma Song-Hua[†] Fang Jian-Ping

(Department of Physics, Zhejiang Lishui College, Lishui 323000, China)

(Received 28 July 2010; revised manuscript received 7 August 2010)

Abstract

With the projective equation method and the variable separation method, new exact solutions of the (2 + 1) - dimensional breaking soliton equation is derived. Based on the derived solitary wave excitation, we obtain multi-quadrate soliton structures with Weierstrassp function and study the chaotic behaviours of the equation for two chaotic systems.

Keywords: projective equation method, breaking soliton equation, multi-quadrate soliton, chaotic behaviours

PACS: 03.40.Kf, 03.65.Ge, 05.45.Yv

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant Nos. Y6100257, Y604106), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University (Grant No. KZ09005).

[†] Corresponding author. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn